UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Departamento de Matemática Aplicada

Algoritmos para la integración de problemas oscilatorios en varias frecuencias

Fernando L. García Alonso, 2002

UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Departamento de Matemática Aplicada

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Algoritmos para la integración de problemas oscilatorios en varias frecuencias

Memoria que presenta
D. Fernando L.García Alonso
para optar al grado de
Doctor en Ciencias
(Sección Matemáticas)

Deseo expresar mi agradecimiento:

A los Drs. José Manuel Ferrándiz Leal y Jesús Vigo Aguiar, por su dirección y orientación a lo largo de la realización del presente trabajo.

A todos mis compañeros del I.E.S. "Miguel Hernández" y a los del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Alicante por sus consejos, y en especial por los ánimos que me han dado.

A Maria José, a mis hijos Fernando y Maria José y a mis padres, por el cariño, y la ayuda moral que me han prestado durante todo este tiempo.

A todos aquellos que han contribuido a que este trabajo llegara a buen término, mi más sincera gratitud.

Índice General

Prólogo **vii**

1 Funciones G de Scheifele **1**

1.1 Introducción 1

1.2 G-funciones para osciladores perturbados 4

1.3 Independencia lineal de las G-funciones 10

1.4 Relación con las funciones elementales 12

1.5 Relación con las funciones Stumpff 13

1.6 Desarrollos finitos y desarrollos en G-funciones 16

1.6.1 Error de truncación 20

1.7 Las G-funciones como un método de integración numérica 21

1.8 Ejemplos 23

1.8.1 Ejemplo 1 23

1.8.2 Ejemplo 2 25

1.9 Figuras Capítulo 1 28

1.9.1 Ejemplo 1 28

1.9.2 Ejemplo 2 30

2 Integración numérica de osciladores perturbados con dos frecuencias. Método de series de φ-funciones **31**

2.1 Introducción 31

2.2 Las funciones φ aplicadas a osciladores libres en una frecuencia y forzada en otra 33

2.2.1 Caso I $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$ 38

2.2.2 Caso II $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ 48

2.2.3 Caso III $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ 52

2.2.4 Caso IV $\alpha = \beta \neq 0$ 55

2.2.5 Caso V $\alpha = \beta = 0$ 59

2.3 Las φ-funciones como un método de integración numérica. 61

2.4 Ejemplos 64

2.4.1 Ejemplo 1 65

2.4.2 Ejemplo 2 68

2.5 Figuras Capítulo 2 73

2.5.1 Ejemplo 1 73

2.5.2 Ejemplo 2 75

3 Integración numérica de osciladores perturbados: métodos numéricos multipaso **77**

3.1 Introducción 77

3.2 Métodos numéricos multipaso 78

3.2.1 Caso I $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$ 78

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

3.2.2 Caso II $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ 82

3.2.3 Caso III $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ 83

3.2.4 Caso IV $\alpha = \beta \neq 0$ 84

3.2.5 Caso V $\alpha = \beta = 0$ 85

4 Implementación de los métodos multipaso para la integración de osciladores perturbados 87

4.1 Introducción 87

4.2 Estableciendo el método multipaso explícito MDFpE para osciladores perturbados 88

4.3 Estableciendo el método multipaso implícito MDFpI para osciladores perturbados 93

4.4 Polinomios Simétricos 97

4.5 Cálculo recurrente de las matrices A_p^{-t} y B_p^{-t}. 102

4.5.1 Cálculo recurrente de A_p^{-t}. 103

4.5.2 Cálculo recurrente de B_p^{-t}. 107

4.6 Método multipaso explícito MDFpE para osciladores perturbados . . 110

4.6.1 Caso I $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$ 112

4.6.2 Caso II $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ 116

4.6.3 Caso III $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ 118

4.6.4 Caso IV $\alpha = \beta \neq 0$ 120

4.6.5 Caso V $\alpha = \beta = 0$ 122

4.7 Método multipaso implícito MDFpI para osciladores perturbados . . . 125

4.7.1 Caso I $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$ 126

4.7.2 Caso II $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ 128

4.7.3 Caso III $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ 129

4.7.4 Caso IV $\alpha = \beta \neq 0$ 130

4.7.5 Caso V $\alpha = \beta = 0$ 131

4.8 Método multipaso predictor corrector MDFpPC para osciladores perturbados 132

4.8.1 Códigos para los método MDFpPC. 133

4.9 Ejemplos numéricos 134

4.9.1 Ejemplo 1 134

4.9.2 Ejemplo 2 136

4.9.3 Ejemplo 3 138

4.9.4 Ejemplo 4 139

4.9.5 Ejemplo 5 141

4.10 Figuras Capítulo 4 143

4.10.1 Ejemplo 1 143

4.10.2 Ejemplo 2 146

4.10.3 Ejemplo 3 149

4.10.4 Ejemplo 4 150

4.10.5 Ejemplo 5 151

Anexo I **153**

Anexo II **159**

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Anexo III 165

Anexo IV 171

Anexo V 177

Bibliografía 181

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Prólogo

En los últimos años, debido fundamentalmente a las mayores exigencias de los programas espaciales, ha ido ganando interés el cálculo preciso de órbitas de satélites artificiales, pues se manejan precisiones mejores que un milímetro en distancias de más de diez mil kilómetros, mantenidas durante muchas revoluciones. Desde la década de los años noventa, para la resolución de problemas geodésicos o geodinámicos, los geodestas necesitan precisiones subcentimétricas en el cálculo de la posición exacta del satélite artificial en una referencia inercial.

En los métodos de cálculo de órbitas resulta ventajoso sustituir las ecuaciones newtonianas del movimiento por otras mejor acondicionadas para su integración numérica, como las variables universales de Battin [2], los métodos de Encke [59] y sus posteriores mejoras, o las ecuaciones obtenidas después de aplicar diversos cambios de variables que regularizan las ecuaciones del movimiento. En Mecánica Celeste, las transformaciones que permiten escribir las ecuaciones del movimiento como ecuaciones diferenciales lineales se llaman linealizaciones, no debiéndose confundir éstas con el método que consiste en desarrollar en serie de Taylor y conservar la parte lineal, pues las transformaciones anteriores son exactas y reducen la ecuación del movimiento

a osciladores armónicos.

La linealización más extendida es la basada en la introducción de la matriz KS [59],[29], que es una generalización de la matriz de Levi-Civita; esta matriz permite definir las coordenadas de Kunstaanheimo-Stiefel $\overrightarrow{u}$ a partir de las coordenadas cartesianas $\overrightarrow{r}$ y reduce las ecuaciones del movimiento a cuatro osciladores armónicos perturbados con todas las frecuencias iguales a un medio, cuando la variable independiente tiene el significado de la anomalía excéntrica. El cambio de coordenadas se une a una regularización, que se logra introduciendo un tiempo ficticio s definido como $\frac{d}{ds} = r\frac{d}{dt}$. La transformación KS está ampliamente descrita en el libro de Stiefel y Scheifele [67].

Otra linealizacion destacable es la correspondiente a las variables focales, es decir a los cosenos de dirección y el inverso del radio, que utiliza la anomalía verdadera como variable independiente. Estas variables, llamadas de Burdet-Ferrándiz [16], [17], [18], [19], [23], [24], permiten reducir el problema de Kepler a cuatro osciladores armónicos con frecuencia unidad, mediante la introducción del momento angular en las ecuaciones del movimiento y el uso de la anomalía verdadera como variable independiente.

Reducidas las ecuaciones del movimiento a forma de osciladores armónicos, pueden aplicarse para su integración códigos numéricos especiales, que consiguen integrar el problema sin error de discretización. Existen distintos métodos para el tratamiento de problemas oscilatorios en una frecuencia.

Como primer precedente claro de estos métodos, señalemos que en 1961 Gautschi [32], [33] desarrolló una teoría sobre la adaptación de la integración numérica a los

fenómenos oscilatorios, tomando como funciones básicas las funciones trigonométricas. El método permitía integrar simultáneamente soluciones que correspondian a una truncación finita del desarrollo de Fourier de la función solución, siendo la frecuencia fundamental del desarrollo conocida. Brock y Murray [6], Dennis [9] y Simos [61],[62] utilizaron como funciones básicas las exponenciales y Sheffield [63] desarrolló una teoría para distintos conjuntos de funciones básicas.

Stiefel y Bettis [4], [68] modificaron los métodos clásicos de diferencias de Cowell para la integración numérica de ciertos productos de polinomios ordinarios y de Fourier, en varias frecuencias, sin error de truncación. En el primer artículo se dieron las expresiones explícitas de los coeficientes de los métodos de orden cuatro y seis, mientras que en el segundo, Bettis dio formulaciones recurrentes válidas para modificar los métodos de Störmer, Cowell, Adams - Bashforth y Adams - Moulton con orden arbitrario. Asimismo, Bettis desarrolló un procedimiento complicado para integrar oscilaciones con varias frecuencias ω_1, ω_2, etc, que utilizaba interpolación trigonométrica en su derivación. Dos años más tarde Lyche [46] publicó algunos resultados teóricos que permitieron contemplar los métodos anteriores desde un punto de vista más amplio.

Los métodos de Bettis, que presentan un buen comportamiento en la integración numérica de un oscilador perturbado, presentan también algunos problemas. En primer lugar, hay dificultades en su implementación, pues requieren la modificación de coeficientes del método de partida en número igual al doble del número de frecuencias que se pretende integrar exactamente, cuando se realiza la integración exacta de un problema cuasi-periódico. Además, cuando se desea integrar funciones donde los

coeficientes de las funciones circulares pueden ser polinomios de un cierto grado, el número de coeficientes se incrementa proporcionalmente en el doble del grado del polinomio. Existen también limitaciones del tamaño de la región de estabilidad al crecer el orden (Ferrándiz, comunicación personal). Estos problemas son mayores en el caso de varias frecuencias o cuando las amplitudes de las oscilaciones son polinomios no constantes que se suelen llamar, siguiendo la terminología de Mecánica Celeste, términos seculares mixtos.

Vigo y Ferrándiz, [73], [74], [77], proponen al menos en los casos usuales, algoritmos alternativos más simples para calcular los coeficientes, comparando la precisión obtenida en los coeficientes de los metodos de Bettis calculados según los nuevos algoritmos y los algoritmos dados por Stiefel y Bettis y por Bettis. Los algoritmos presentados por Vigo y Ferrándiz para un cálculo alternativo de los coeficientes del método de Bettis, además de permitir una implementación eficaz de los diversos métodos adaptados existentes, mejora algunos métodos multipaso actuales, permitiendo la creación de nuevos esquemas adaptados, que integran sin error de truncamiento senos y cosenos en una frecuencia conocida debido a su generalidad. Los elegidos fueron los PFML [31], [73], y las fórmulas de Falkner [73]. Asimismo los algoritmos descritos por Vigo y Ferrándiz permiten ampliar estos métodos adaptándolos a un número superior de frecuencias así como a frecuencias con multiplicidad superior a uno; no habiéndose realizado más estudios con varias frecuencias.

Casi en la misma época que Bettis, Scheifele [60], [67] obtuvo un refinamiento de los métodos de Taylor basados en sus G-funciones, que se utilizan para definir series que permiten construir un método de integración numérica con la propiedad de que

si los términos de perturbación son eliminados, entonces el método numérico integra exactamente el correspondiente problema no perturbado. El método de Scheifele es muy preciso, pero es prácticamente imposible de aplicar cuando los términos de perturbación son funciones algo complicadas. Martín y Ferrándiz [48], [49] modifican el método de Scheifele convirtiéndolo en el esquema multipaso SMF, que conservando las buenas propiedades del método de Scheifele, evitan los cálculos previos que éste requería. Como comentario, el método SMF puede también deducirse a partir de una función generatriz como se expone en [74].

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

En esta memoria nos proponemos desarrollar métodos numéricos para la integración de osciladores perturbados del tipo:

$$x'' + \alpha^2 x = \varepsilon\, f(x, x', t)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0' \quad t \in [a, b] = I$$

donde el pequeño parámetro ε indica que los términos de la perturbación son pequeños con respecto al resto de los términos.

A tal efecto, dependiendo del término de perturbación, se calcularán unas funciones apropiadas para su integración que generalizan las $G-$ funciones de Gérard Scheifele. Estas funciones, que llamaremos φ - funciones (por analogía con f de Ferrándiz), se obtendrán aplicando un operador adecuado al PVI precedente.

El trabajo realizado en esta memoria se ha dividido en cuatro capítulos.

En el primero, se describe el método general de las G - funciones de Scheifele para osciladores perturbados, así como sus propiedades y su relación con las funciones elementales y las funciones de Stumpf. También se expone el método de integración

numérica basado en las G - funciones, completándose la exposición con ejemplos numéricos, contrastados con el código LSODE.

La definición, construcción, propiedades y relación de las φ - funciones con las G - funciones y otros tipos de funciones se estudian con detalle, según los distintos valores de la frecuencia, en el capítulo dos de esta memoria. Se introduce un nuevo método de integración numérica basado en el uso de series de φ - funciones, que integra exactamente soluciones que son oscilaciones con dos frecuencias arbitrarias. Finaliza este capítulo con la presentación de dos ejemplos numéricos, que sirven para ilustrar dicha propiedad y donde se contrasta el método de las φ - funciones con el código LSODE, (versión Maple V). En el segundo de estos ejemplos numéricos, en el que la función de perturbación depende explícitamente del tiempo, se introduce una modificación para controlar el crecimiento del error, en el sentido introducido por Ferrándiz y Novo [22] y continuado en [73].

El método de series de φ - funciones, tiene un mejor comportamiento que el método de series de G - funciones, pues permite ganar un orden de ε con respecto a éstas, es decir, el método nuevo permite obtener un error de truncación con el factor ε^2 mientras que en el antiguo sólo se obtenía ε (siendo ε el parámetro de perturbación). Por otra parte, comparte con el método de series de $G-$ funciones la dificultad de su adaptación a cada problema particular. Este inconveniente se supera con la construcción de un esquema multipaso, basado en el método de φ - funciones, que generaliza el correspondiente método SMF para $G-$funciones. Este esquema se introduce en el capítulo tres de esta memoria.

Los métodos multipaso anteriores presentan dificultades en su implementación,

pues sus coeficientes no están calculados de forma recurrente. Este incoveniente se resuelve en el capítulo cuatro en dos pasos; primero aproximando las derivadas de la función de perturbación por diferencias divididas y, en un segundo paso, estableciendo una forma de cálculo recurrente para éstas, lo que facilita su implementación en un ordenador y supone una ventaja frente a otros métodos. Una vez resuelto este problema, se definen los métodos MDFpE (Método Doble Frecuencia de p pasos Explícito), MDFpI (Método Doble Frecuencia de p pasos Implícito), MDFpPC (Método Doble Frecuencia de p pasos Predictor - Corrector), estudiándose las condiciones de estabilidad. Las definiciones son válidas para un número de pasos p arbitrario y para paso variable. El capítulo finaliza con ejemplos numéricos en los que se utilizan los nuevos algoritmos y se comparan con códigos bien conocidos como LSODE, GEAR y MGEAR, empleándose en estos últimos las implementaciones de Maple V, para asegurar que los resultados no quedan distorsionados por una mala programación que favorezca a nuestros códigos. El beneficio producido por el uso de los nuevos algoritmos se patentiza en los ejemplos, cuando se aplican a los problemas para los que han sido diseñados.

La memoria se completa con los anexos donde figuran los códigos de los nuevos algoritmos, implementados en Maple V.

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Capítulo 1

Funciones G de Scheifele

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

1.1 Introducción

Expondremos, en este primer capítulo, el método de las G-funciones de Scheifele [60], adaptado para la integración de un oscilador armónico perturbado:

$$\begin{aligned} x'' + \alpha x &= \varepsilon \cdot f(x(t), x'(t), t) \\ x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= x_0' \end{aligned}$$

donde α es constante y ε un pequeño parámetro de perturbación. La solución $x(t)$ obtenida con las condiciones iniciales anteriores es continuamente diferenciable en $[-T, T]$. La función de perturbación $f(x, x', t)$ se supone que admite derivadas parciales continuas con respecto a sus variables independientes x, x', t en un dominio cerrado del (x, x', t)-espacio que contiene a $t \in [-T, T]$ y a todos los valores de la solución $x(t)$ y de su derivada $x'(t)$.

La integración de osciladores armónicos perturbados es un problema común en muchos campos. A veces, las ecuaciones originales que describen un fenómeno ya están expresadas de esta forma, y, si no lo están, se efectúan cambios de variables adecuados, reduciendo el problema a forma de oscilador. Este procedimiento ha sido muy común en investigaciones sobre dinámica espacial llevadas a cabo en los últimos años. Una extensa lista de referencias, desde los pioneros trabajos de Laplace a las más recientes transformaciones canónicas de Scheifele y Stiefel [67] o Ferrándiz [18],[19] se encuentran en [10].

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Sería deseable que los métodos numéricos que se utilicen en la resolución de osciladores armónicos perturbados verifiquen la siguiente propiedad: Si los términos de la perturbación desaparecen en un instante arbitrario de la variable independiente t (o s) entonces el método numérico deberá integrar sin error de discretización el oscilador no perturbado.

La necesidad de resolver los problemas de dinámica orbital de satélites con buena precisión, impulsó, el desarrollo de una gran variedad de códigos adaptados para integrar exactamente un oscilador armónico no perturbado. Además, el error local de estos códigos contiene un pequeño parámetro de perturbación como factor, que produce muy buenos resultados.

Algoritmos desarrollados con este propósito son descritos en [46],[53],[48],[58],[73]. Todos estos son métodos multipaso, con paso fijo. Los algoritmos con paso variable son poco frecuentes, y su aplicabilidad real a los problemas orbitales no está clara. Podemos citar el conocido método de Deuflhard [12],[13], basado en técnicas de extrapolación, y más recientemente los desarrollos de Denk [11].

La aplicación de estos métodos adaptados a soluciones oscilatorias no se restringe a la Mecánica Celeste, [74],[76],[77], existiendo otros ejemplos centrados en problemas altamente oscilatorios o en las ecuaciones de Schrödinger, como [72],[61],[62].

Los métodos de Runge-Kutta [52], también integran el problema para $\varepsilon = 0$. Basta con utilizar el método de variación de constantes, pero presentan las siguientes dificultades: es necesario realizar una transformación de las ecuaciones diferenciales, es complicado cambiar de orden la integración y es necesario conocer las raíces de la ecuación característica.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

En 1971 Scheifele [60] ideó un método para la integración de osciladores perturbados, basado en un refinamiento del método clásico de las series de potencias, utilizando una sucesión de funciones $G_k(t)$ que nos permite expresar la solución en términos de series como la siguiente:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k G_k(t)$$

que se aplican a la construcción de un método de integración numérica.

El método de las G-funciones de Scheifele presenta la ventaja de verificar no sólo la propiedad anteriormente expresada sino que además integra con los dos primeros términos de la serie el problema homogéneo, mientras que el método de series de potencias sólo nos da una aproximación a la solución mediante una función lineal si tomamos dos términos [15].

A pesar del buen comportamiento del método de las G-funciones, sólo es práctico si se utiliza en unos pocos casos particulares, concretamente en aquellos en los que la función de perturbación es muy sencilla, debido a la complejidad de los cálculos pre-

liminares que se necesitan para obtener las fórmulas de recurrencia de los coeficientes $b_{k.}$

Se completa la exposición con los resultados de algunos experimentos numéricos que incluyen comparaciones con métodos conocidos

1.2 G-funciones para osciladores perturbados

Describiremos el método empleado por G. Scheifele [60] para la integración de osciladores perturbados.

BIBLIOTECA VIRTUAL

Sea $x(t)$ la solución del oscilador perturbado de ecuación:

$$x^{''} + \alpha x = \varepsilon \cdot f(x, x^{'}, t), \qquad x(0) = x_0, \quad x^{'}(0) = x_0^{'}$$

suponemos que la función $g(t) = f(x(t), x^{'}(t), t)$ admite un desarrollo de la forma:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$$

con lo cual, el PVI anterior, puede escribirse de la forma siguiente:

$$x^{''} + \alpha x = \varepsilon \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}, \qquad x(0) = x_0, \quad x^{'}(0) = x_0^{'}$$

La solución del problema precedente, puede obtenerse de forma habitual, calculando la solución de la ecuación homogénea con las condiciones iniciales dadas y sumando a ésta una solución particular de la ecuación completa, en la que se anula la solución y su derivada en $t = 0$. Esta última puede calcularse resolviendo los PVI:

$$x_n^{''} + \alpha x_n = \frac{t^n}{n!}, \qquad x_n(0) = x_n^{'}(0) = 0, \quad n \geqq 0$$

y combinando linealmente sus soluciones con los coeficientes ε y c_n.

Esta idea inspiró a G. Scheifele la introducción de una familia de funciones especiales, adecuada para resolver este tipo de problemas.

Definición 1.1 *Llamaremos funciones G de Scheifele, a las funciones G_n que verifican:*

$$G_n(t) = x_{n-2}(t), \quad n \geqq 2$$

donde $x_n(t)$ son las soluciones de los problemas $x_n^{''}+\alpha x_n = \frac{t^n}{n!}$, $\qquad x_n(0) = x_n^{'}(0) = 0$, $n \geqq 0$, es decir, las funciones G_n verifican:

$$G_n^{''}(t) + \alpha G_n(t) = \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}, \qquad G_n(0) = G_n^{'}(0) = 0, \quad n \geqq 2$$

Es conveniente resaltar que las G-funciones dependen de n, t y también de α.Cuando sea necesario especificaremos esta dependencia, mediante la notacion $G_n(t, \alpha)$.

Proposición 1.1 *Para $n \geqq 3$, se verifica que:*

$$G_n^{'}(t) = G_{n-1}(t)$$

D/.

Bastará probar que $G_n^{'}(t)$ verifica el mismo PVI que $G_{n-1}(t)$, es decir que cumple la ecuación:

$$x_{n-3}^{''} + \alpha x_{n-3} = \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}, \qquad x_{n-3}(0) = x_{n-3}^{'}(0) = 0$$

en efecto:

$$(G_n^{'})^{''}(t) + \alpha G_n^{'}(t) = \frac{d}{dt}(G_n^{''}(t) + \alpha G_n(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\right) = \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}$$

Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} G_n^{'}(0) &= 0 \\ (G_n^{'})^{'}(0) &= G_n^{''}(0) = -\alpha G_n(0) + \frac{0^{n-2}}{(n-2)!} = 0 \end{aligned}$$

Luego $G_n^{'}$ es solución del mismo problema de valores iniciales que G_{n-1} y por tanto:

$$G_n^{'}(t) = G_{n-1}(t),\ n \geqq 3 \qquad \clubsuit$$

Definición 1.2 *Las soluciones de los problemas homogéneos:*

$$\begin{aligned} x^{''} + \alpha x &= 0,\ con: \quad x(0) = 1, \quad x^{'}(0) = 0 \\ x^{''} + \alpha x &= 0,\ con: \quad x(0) = 0, \quad x^{'}(0) = 1 \end{aligned}$$

definen respectivamente las funciones de Scheifele $G_0(t)$ *y* $G_1(t)$.

Proposición 1.2 *Las funciones* $G_0(t)$ *y* $G_1(t)$ *verifican:*

$$G_2^{'}(t) = G_1(t) \quad , \quad G_1^{'}(t) = G_0(t)$$

D/.Como:

$$\begin{aligned} (G_1^{'})^{''}(t) + \alpha G_1^{'}(t) &= \frac{d}{dt}(G_1^{''}(t) + \alpha G_1(t)) = 0 \\ G_1^{'}(0) &= 1 \\ G_1^{''}(0) &= -\alpha G_1(0) = 0 \end{aligned}$$

se cumple que:

$$G_1^{'}(t) = G_0(t)$$

Análogamente, de:

$$\begin{aligned}(G_2^{'})^{''}(t)+\alpha G_2^{'}(t) &= \frac{d}{dt}(G_2^{''}(t)+\alpha G_2(t))=\frac{d}{dt}(1)=0\\ G_2^{'}(0) &= 0\\ G_2^{''}(0) &= -\alpha G_2(0)+1=0+1=1\end{aligned}$$

obtenemos:

$$G_2^{'}(t)=G_1(t) \qquad \clubsuit$$

Corolario 1.1 *Para $n \geqq 1$, se verifica que:*

$$G_n^{'}(t)=G_{n-1}(t)$$

D/.

Se deduce trivialmente, de la proposición n^o 1.1 y de la definición n^o 1.2 $\clubsuit$

Teorema 1.1 *Las G-funciones de Scheifele, verifican la siguiente relación de recurrencia:*

$$G_n(t)+\alpha G_{n+2}(t)=\frac{t^n}{n!}, \qquad \textit{para,} \quad n \geqq 0$$

D/.

Por la definición n^o 1.1 y por corolario n^o 1.1 se cumple:

$$\begin{aligned}G_n^{''}(t)+\alpha G_n(t) &= \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}, \qquad \text{para,} \quad n \geqq 2\\ G_{n-2}(t)+\alpha G_n(t) &= \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}, \qquad \text{para,} \quad n \geqq 2\\ G_n(t)+\alpha G_{n+2}(t) &= \frac{t^n}{n!}, \qquad \text{para,} \quad n \geqq 0 \qquad \clubsuit\end{aligned}$$

Teorema 1.2 *La solución del problema de valores iniciales* $x^{''} + \alpha x = \varepsilon \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$, $x(0) = x_0$, $x^{'}(0) = x_0^{'}$, *viene dada por la función:*

$$x(t) = x_0 G_0(t) + x_o^{'} G_1(t) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n G_{n+2}(t)$$

D/.

$$\begin{aligned} x^{''} + \alpha x &= x_0 G_0^{''}(t) + x_o^{'} G_1^{''}(t) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n G_{n+2}^{''}(t) + \\ &\quad + \alpha \left(x_0 G_0(t) + x_0^{'} G_1(t) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n G_{n+2}(t) \right) \\ &= x_0 \left((G_0^{''}(t) + \alpha G_0(t) \right) + x_0^{'} \left((G_1^{''}(t) + \alpha G_1(t) \right) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(G_{n+2}^{''}(t) + \alpha G_{n+2}(t) \right) \\ &= \varepsilon \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

con lo que se verifica la ecuación diferencial.

Las condiciones iniciales también se cumplen, en efecto:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 G_0(0) + x_o^{'} G_1(0) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n G_{n+2}(0) = x_0 \\ x^{'}(0) &= x_0 G_0^{'}(0) + x_o^{'} G_1^{'}(0) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n G_{n+2}^{'}(0) = x_0^{'} \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Proposición 1.3 *Las* G*-funciones de Scheifele, pueden expresarse mediante desarrollos en serie absolutamente convergentes para todo valor de* t*, del tipo siguiente:*

$$G_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \frac{t^{j+n}}{(j+n)!}, \quad n \geqq 0$$

donde:

$$\beta_{2j} = (-\alpha)^j \quad y \quad \beta_{2j+1} = 0, \quad j \geqq 0$$

D/.

Por como están definidas las β_i, estas series son absolutamente convergentes.

Definiendo:

$$g_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j \frac{t^{2j+n}}{(2j+n)!}$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} g_0''(t) + \alpha g_0(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha)^k \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^{j+1} \frac{t^{2j}}{(2j)!} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!} = 0 \end{aligned}$$

BIBLIOTECA VIRTUAL

con

$$g_0(0) = 1 \quad \text{y} \quad g_0'(0) = 0$$

MIGUEL DE CERVANTES

luego $g_0(t) = G_0(t)$, por verificar el mismo PVI.

Análogamente se demuestra:

$$g_1(t) = G_1(t)$$

como:

$$\begin{aligned} g_n''(t) + \alpha g_n(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k \frac{t^{2k+n-2}}{(2k+n-2)!} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j \frac{t^{2j+n}}{(2j+n)!} = \\ &= \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^{j+1} \frac{t^{2j+n}}{(2j+n)!} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j \frac{t^{2j+n}}{(2j+n)!} = \\ &= \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \end{aligned}$$

y además:

$$g_n(0) = 0 \quad \text{y} \quad g_n'(0) = 0$$

se verifica que:

$$g_i(t) = G_i(t) \quad \text{para,} \quad i \geqq 2 \qquad \clubsuit$$

1.3 Independencia lineal de las G-funciones

Las funciones $G_0(t)$, ... ,$G_n(t)$ forman un sistema libre; para su comprobación será suficiente verificar que el wronskiano asociado no es idénticamente nulo.

Hagamos la comprobación para $n = 3$. En efecto, por el corolario n^o 1.1 y la relación

$$G_0^{'}(t) = -\alpha G_1(t)$$

tenemos:

$$W_3 = \begin{vmatrix} G_0(t) & G_1(t) & G_2(t) & G_3(t) \\ -\alpha G_1(t) & G_0(t) & G_1(t) & G_2(t) \\ -\alpha G_0(t) & -\alpha G_1(t) & G_0(t) & G_1(t) \\ \alpha^2 G_1(t) & -\alpha G_0(t) & -\alpha G_1(t) & G_0(t) \end{vmatrix}$$

y por transformaciones elementales llegamos a

$$W_3 = \begin{vmatrix} G_0(t) & G_1(t) & G_2(t) & G_3(t) \\ -\alpha G_1(t) & G_0(t) & G_1(t) & G_2(t) \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = G_0^2(t) + \alpha G_1^2(t)$$

fácilmente se comprueba que W_n tendrá este valor $\forall n > 0$, pues

$$\begin{aligned} W_n &= G_0^2(G_0 + \alpha G_2)^{n-2} + \alpha G_1^2(G_0 + \alpha G_2)^{n-2} = \\ &= (G_0^2 + \alpha G_1^2)(1)^{n-2} = (G_0^2 + \alpha G_1^2) \end{aligned}$$

Por otra parte la cuestión de la independencia lineal se resolverá cuando se pruebe el siguiente resultado:

Proposición 1.4 $G_0^2(t) + \alpha G_1^2(t) = 1$ *para todo* t.

D/:

Por el teorema nº1.1, para $n = 0$, tenemos:

$$G_0(t) + \alpha G_2(t) = 1$$

multiplicando por $G_1(t)$, e integrando con respecto a t, se tiene:

$$\begin{aligned} \int G_1 dG_1 + \alpha \int G_2 dG_2 &= \\ \frac{G_1^2}{2} + \alpha \frac{G_2^2}{2} &= \int G_1 dt = G_2 \end{aligned}$$

BIBLIOTECA VIRTUAL

de donde

$$G_1^2 + \alpha G_2^2 = 2G_2$$

MIGUEL DE CERVANTES

o

$$G_1^2 + G_2(1 - G_0) = 2G_2$$

luego

$$G_2 = G_1^2 - G_0 G_2$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación $G_0(t) + \alpha G_2(t) = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} G_0(t) + \alpha G_2(t) &= 1 = G_0(t) + \alpha \left(G_1^2 - G_0 G_2 \right) = \\ &= G_0(t) + \alpha G_1^2 - G_0 \left(1 - G_0 \right) = \\ &\quad G_0^2(t) + \alpha G_1^2(t) \end{aligned}$$

probándose la identidad ♣

1.4 Relación con las funciones elementales

Se obtienen resolviendo los problemas homogéneos que definen $G_0(t)$ y $G_1(t)$ y utilizando la relación establecida en la proposición nº 1.1.

Si $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
G_0(t) &= \cos\sqrt{\alpha}t \\
G_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sin\sqrt{\alpha}t \\
G_2(t) &= \frac{-1}{\alpha}\left(\cos\sqrt{\alpha}t - 1\right) \\
G_3(t) &= \frac{-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sin\sqrt{\alpha}t - t\right) \\
&\vdots \\
G_{2n}(t) &= \frac{(-1)^n}{\alpha^n}\left(\cos\sqrt{\alpha}t - \sum_{k=0}^{n-1}(-\alpha)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}\right) \quad \text{con} \quad n > 0 \\
G_{2n+1}(t) &= \frac{(-1)^n}{\alpha^n}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sin\sqrt{\alpha}t - \sum_{k=0}^{n-1}(-\alpha)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \quad \text{con} \quad n > 0
\end{aligned}$$

Si $\alpha < 0$

$$\begin{aligned}
G_0(t) &= \cosh\sqrt{-\alpha}t \\
G_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\sinh\sqrt{-\alpha}t \\
G_2(t) &= \frac{-1}{\alpha}\left(\cosh\sqrt{-\alpha}t - 1\right) \\
G_3(t) &= \frac{-1}{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\sinh\sqrt{-\alpha}t - t\right) \\
&\vdots \\
G_{2n}(t) &= \frac{(-1)^n}{\alpha^n}\left(\cosh\sqrt{-\alpha}t - \sum_{k=0}^{n-1}(-\alpha)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}\right) \quad \text{con} \quad n > 0
\end{aligned}$$

$$G_{2n+1}(t) = \frac{(-1)^n}{\alpha^n}\left(\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\sinh\sqrt{-\alpha}t - \sum_{k=0}^{n-1}(-\alpha)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \quad \text{con} \quad n > 0$$

Si $\alpha = 0$

$$G_n(t) = \frac{t^n}{n!} \quad \text{con} \quad n \geqq 0$$

1.5 Relación con las funciones Stumpff

Es importante notar que las G-funciones están íntimamente relacionadas con las funciones de Stumpff [67].

BIBLIOTECA VIRTUAL

Por la proposición n^{o}1.3, sabemos que:

$$G_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty}(-\alpha)^j\frac{t^{2j+n}}{(2j+n)!} = \sum_{j=0}^{\infty}(-\alpha)^j\frac{t^{2j}t^n}{(2j+n)!} =$$
$$= t^n\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\alpha t^2)^j}{(2j+n)!}$$

Stumpff [69],[70],[71] introdujo las funciones enteras:

$$c_n(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\tau^j}{(2j+n)!} \quad \text{con} \quad n \geqq 0$$

con el fin de encontrar una representación uniforme para los diferentes tipos de órbitas del movimiento kepleriano. La relación entre las G-funciones de Scheifele y las funciones de Stumpff es evidentemente:

$$G_n(t) = t^n c_n(\alpha t^2)$$

Tomando $\tau = \alpha t^2$, de las propiedades anteriores de las G-funciones, y de la relación de éstas con las funciones de Stumpff, se deducen fácilmente las siguientes fórmulas de recursión e identidades:

Fórmulas de recursión:

$$c_n(\tau) + \tau c_{n+2}(\tau) = \frac{1}{n!} \quad \text{con} \quad n \geqq 0$$

$$\frac{dc_n}{d\tau} = \frac{1}{2}\left(nc_{n+2} - c_{n+1}\right) \quad \text{con} \quad n \geqq 0$$

Relación pitagórica:

$$c_0^2(\tau) + \tau c_1^2(\tau) = 1$$

Como en el caso de las G-funciones, también se puede establecer una relación entre las funciones de Stumpff y las funciones elementales, para los distintos valores de α.

Si $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
c_0(\tau) &= \cos(\sqrt{\tau}) \\
c_1(\tau) &= \frac{\sin(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}} \\
c_2(\tau) &= \frac{1-\cos(\sqrt{\tau})}{\tau} \\
c_3(\tau) &= \frac{\sqrt{\tau}-\sin(\sqrt{\tau})}{\tau\sqrt{\tau}} \\
&\vdots \\
c_{2n}(t) &= \frac{(-1)^n}{\tau^n}\left(\cos\sqrt{\tau} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\tau^k}{(2k)!}\right) \quad \text{con} \quad n > 0 \\
c_{2n+1}(t) &= \frac{(-1)^n}{\tau^n}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\sin\sqrt{\tau} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\tau^k}{(2k+1)!}\right) \quad \text{con} \quad n > 0
\end{aligned}$$

Si $\alpha < 0$

$$\begin{aligned}
c_0(\tau) &= \cosh(\sqrt{-\tau}) \\
c_1(\tau) &= \frac{\sinh(\sqrt{-\tau})}{\sqrt{-\tau}} \\
c_2(\tau) &= \frac{1-\cosh(\sqrt{-\tau})}{\tau}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_3(\tau) &= \frac{\sinh(\sqrt{-\tau}) - \sqrt{-\tau}}{-\tau\sqrt{\tau}} \\
&\vdots \\
c_{2n}(t) &= \frac{(-1)^n}{\tau^n}\left(\cosh\sqrt{-\tau} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\tau^k}{(2k)!}\right) \quad \text{con} \quad n > 0 \\
c_{2n+1}(t) &= \frac{(-1)^n}{\tau^n}\left(\frac{1}{\sqrt{-\tau}}\sinh\sqrt{-\tau} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\tau^k}{(2k+1)!}\right) \quad \text{con} \quad n > 0
\end{aligned}
$$

Si $\alpha = 0$

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

$$
\begin{aligned}
c_0(\tau) &= 1 \\
c_1(\tau) &= 1 \\
c_2(\tau) &= \frac{1}{2} \\
c_3(\tau) &= \frac{1}{6} \\
&\vdots \\
c_n(\tau) &= \frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

Las funciones $c_2(\tau)$ y $c_3(\tau)$ son idénticas respectivamente a las funciones $C(x)$ y $S(x)$ que originalmente definió Battin [2],[3] en su obra Astronautical Guidance. Las funciones de Stumpff, y por tanto las G-funciones de Scheifele, están en la base de diversos métodos de cálculo de órbitas, destacando su aplicación en el programa Apollo. Además de las de Battin, existe gran número de publicaciones al respecto, podemos citar entre los autores más relevantes a Goodyear [35], Herrick [39], Pitkin [55],[56],[57] y Shepperd [64],[65].

1.6 Desarrollos finitos y desarrollos en G-funciones

Desarrollando en serie de Taylor y truncando la solución x(t) del PVI:

$$x^{''} + \alpha x = \varepsilon \cdot f(x, x^{'}, t), \qquad x(0) = x_0, \quad x^{'}(0) = x_0^{'}$$

obtenemos una aproximación de la solución, en la forma:

$$x_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} a_k \quad \text{con} \quad a_k = x^{k)}(0)$$

Al sustituir en la expresión anterior, la relación de recurrencia del teorema n^o 1.1, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_m(t) &= \sum_{k=0}^{m} \left(G_k(t) + \alpha G_{k+2}(t)\right) a_k = \\ &= G_0(t)a_0 + G_1(t)a_1 + \sum_{k=2}^{m} G_k(t)\left(a_k + \alpha a_{k-2}\right) + \alpha G_{m+1}(t)a_{m-1} + \alpha G_{m+2}(t)a_m \end{aligned}$$

Definiendo una nueva sucesión de coeficientes, como:

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \quad b_k = a_k + \alpha a_{k-2} \quad \text{con} \quad k \geqq 2$$

el desarrollo anterior se reduce a:

$$x_m(t) = \sum_{k=0}^{m} G_k(t)\, b_k + \alpha \left(G_{m+1}(t)a_{m-1} + G_{m+2}(t)a_m\right)$$

eliminando el último término, obtenemos una aproximación diferente,

$$X_m(t) = \sum_{k=0}^{m} G_k(t)\, b_k$$

que proporciona mayor precisión que $x_m(t)$, como vamos a ver.

Nos restringiremos al caso especial, en el que f depende sólo de t, presentando, posteriormente, algunos resultados pertinentes al caso general.

En este caso, $f(x(t), x^{'}(t),t) = g(t)$, es una función analítica en todos sus argumentos, podemos escribir:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} g^{k)}(0)$$

Los coeficientes de $x_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} a_k$ y $X_m(t) = \sum_{k=0}^{m} G_k(t)\, b_k$ para el PVI:

$$x^{''} + \alpha x = \varepsilon \cdot f(x(t), x^{'}(t), t), \qquad x(0) = x_0, \quad x^{'}(0) = x_0^{'}$$

vendrán dados por:

$$a_0 = x_0, \quad , a_1 = x_0^{'}, \quad a_{k+2} + \alpha a_k = \varepsilon g^{k)}(0) \quad \text{con} \quad k \geqq 0$$

$$b_0 = x_0, \quad , b_1 = x_0^{'}, \qquad b_{k+2} = \varepsilon g^{k)}(0) \quad \text{con} \quad k \geqq 0$$

en efecto, si

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k$$

es la solución del PVI, tenemos :

$$x(0) = x_0 = a_0.$$

sustituyendo

$$x^{'}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_{k+1}, \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k \quad \text{y} \quad g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} g^{k)}(0)$$

en el PVI resulta:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_{k+2} + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} g^{k)}(0)$$

e identificando coeficientes, obtenemos la relación:

$$a_{k+2} + \alpha a_k = \varepsilon g^{k)}(0) \quad \text{con} \quad k \geqq 0$$

Trivialmente:

$$\begin{aligned} b_0 &= x_0 \\ b_1 &= x_0^{'} \end{aligned}$$

y como

$$b_{k+2} = a_{k+2} + \alpha a_k = -\alpha a_k + \varepsilon g^{k)}(0) + \alpha a_k = \varepsilon g^{k)}(0) = \varepsilon c_k$$

entonces:

$$X_m(t) = \sum_{k=0}^{m} G_k(t)\, b_k = G_0(t)x_0 + G_1(t)x_0^{'} + \varepsilon \sum_{k=2}^{m} g^{k-2)}(0) G_k(t)$$

BIBLIOTECA VIRTUAL

Insertando este último resultado en la ecuación diferencial, se obtiene el residuo $R_m(t)$, correspondiente a $X_m(t)$:

$$\begin{aligned} R_m(t) &= \varepsilon g(t) - \left(X_m^{''}(t) + \alpha X_m(t) \right) = \\ &= \varepsilon g(t) - \varepsilon \left(\sum_{k=2}^{m} g^{k-2)}(0) G_{k-2}(t) + \alpha \sum_{k=2}^{m} g^{k-2)}(0) G_k(t) \right) = \\ &= \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} g^{k)}(0) - \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{m-2} g^{k)}(0) G_k(t) + \alpha \sum_{k=0}^{m-2} g^{k)}(0) G_{k+2}(t) \right) = \\ &= \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} g^{k)}(0) - \varepsilon \sum_{k=0}^{m-2} g^{k)}(0) \left(G_k(t) + \alpha G_{k+2}(t) \right) = \\ &= \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} g^{k)}(0) - \varepsilon \sum_{k=0}^{m-2} g^{k)}(0) \frac{t^k}{k!} = \varepsilon \sum_{k=m-1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} g^{k)}(0) \end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} x_m^{''}(t) + \alpha x_m(t) &= \sum_{k=2}^{m} \left(G_{k-2}(t) + \alpha G_k(t) \right) b_k + \\ &\quad + \alpha \left(a_{m-1} \left(G_{m-1}(t) + \alpha G_{m+1}(t) \right) + a_m \left(G_m(t) + \alpha G_{m+2}(t) \right) \right) \end{aligned}$$

y el teorema nº 1.1, el residuo $r_m(t)$, correspondiente a $x_m(t)$ es:

$$r_m(t) = \varepsilon g(t) - \left(x_m^{''}(t) + \alpha x_m(t) \right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} g^{k)}(0) - \left(\sum_{k=2}^{m} \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} b_k + \alpha \left(a_{m-1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + a_m \frac{t^m}{m!} \right) \right) = \\
&= \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} g^{k)}(0) - \left(\sum_{k=0}^{m-2} \frac{t^k}{k!} b_{k+2} + \alpha \left(a_{m-1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + a_m \frac{t^m}{m!} \right) \right) = \\
&= \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} g^{k)}(0) - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{t^k}{k!} \varepsilon g^{k)}(0) - \alpha \left(a_{m-1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + a_m \frac{t^m}{m!} \right) = \\
&= \varepsilon \sum_{k=m-1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} g^{k)}(0) - \alpha \left(a_{m-1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + a_m \frac{t^m}{m!} \right)
\end{aligned}
$$

Podemos concluir: que, mientras que en $R_m(t)$ el parámetro de perturbación ε es un factor, en $r_m(t)$ no lo es. En consecuencia $R_m(t)$ será pequeño con ε, pero $r_m(t)$ no. Si $\varepsilon = 0$ el método de series de potencias produce un error y sin embargo el método de las G-funciones de Scheifele, con sólo el primer y segundo término, integra exactamente la ecuación.[67],[60],[74].

Volviendo al caso general: $f(x, x^{'}, t)$ es conocido el siguiente resultado, [67]:

Si la solución $x(t)$ es continuamente diferenciable en $[-T, T]$ con $T > 0$ y las derivadas parciales de f, incluyendo la m-ésima, son continuas, en un dominio cerrado, del espacio tridimensional de varibles reales $(x, x^{'}, t)$, que contiene a todos los valores exactos de la solución $x(t)$, $x^{'}(t)$, t, además de las aproximaciones consideradas $x_m(t)$, $x_m^{'}(t)$, $X_m(t)$, $X_m^{'}(t)$, en el intervalo $[-T, T]$, entonces los residuos:

$$
\begin{aligned}
R_m(t) &= \varepsilon f(X_m(t), X_m^{'}(t), t) - \left(X_m^{''}(t) + \alpha X_m(t) \right) \\
r_m(t) &= \varepsilon f(x_m(t), x_m^{'}(t), t) - \left(x_m^{''}(t) + \alpha x_m(t) \right)
\end{aligned}
$$

correspondientes respectivamente al método de G-funciones y al método de desarrollos en serie, satisfacen para $t \to 0$, los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} R_m(t) &\sim \varepsilon \left[\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}\right]_{t=0} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ r_m(t) &\sim \left(-\alpha a_{m-1} + \varepsilon \left[\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}\right]_{t=0}\right) \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \end{aligned}$$

La notación $\sim$ indica que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{R_m(t)}{t^{m-1}} = \frac{\varepsilon}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}\right]_{t=0}$$

análogamente en el caso de $r_m(t)$.

Es de destacar [60], que es irrelevante calcular la derivada $\left[\frac{d^{m-1}f}{dt^{m-1}}\right]_{t=0}$, sustituyendo en f la solución exacta $x(t)$ o cualquiera de sus aproximaciones $x_m(t)$ y $X_m(t)$.

1.6.1 Error de truncación

Desarrollando en serie de potencias, la solución exacta $x(t)$ del PVI:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k$$

y dado que

$$a_{k+2} = -\alpha a_k + \varepsilon f^{k)}(0) \text{ con } k = 0, 1, ...$$

el error de truncación para

$$x_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} a_k$$

es:

$$\begin{aligned} e_m &= x(t) - x_m(t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(-\alpha a_{k-2} + \varepsilon f^{k-2)}(0)\right) = \\ &= \left(-\alpha a_{m-1} + \varepsilon f^{m-1)}(0)\right) \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} + O(t^{m+1}) \end{aligned}$$

Por otra aprte, expresando la solución del PVI, en términos de G-funciones:

$$x(t) = G_0(t)x_0 + G_1(t)x_0^{'} + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} g^{k)}(0)G_{k+2}(t)$$

el error de truncación para:

$$X_m(t) = G_0(t)x_0 + G_1(t)x_0^{'} + \varepsilon \sum_{k=0}^{m-2} g^{k)}(0)G_{k+2}(t)$$

viene dado por:

$$E_m = x(t) - X_m(t) = \varepsilon \sum_{k=m-1}^{\infty} g^{k)}(0)G_{k+2}(t)$$

BIBLIOTECA VIRTUAL

Si $\varepsilon = 0$ el método de las series de potencias produce un error de truncación y sin embargo el método de las G-funciones, no genera error de truncación.

MIGUEL DE CERVANTES

1.7 Las G-funciones como un método de integración numérica

Consideramos el PVI:

$$x^{''} + \alpha x = \varepsilon \cdot f(x, x^{'}, t), \qquad x(0) = x_0, \quad x^{'}(0) = x_0^{'}$$

y supongamos que tanto su solución $x(t)$ y su función de perturbación $f(t)$ son funciones analíticas, es decir:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k$$

y

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_k$$

Para obtener una aproximación a la solución $x(t)$ sustituimos una truncación de su desarrollo en el PVI, lo que nos permitirá establecer relaciones de recurrencia, para calcular los coeficientes $c_k = g^{k)}(0)$, a partir de x_0 y $x_0^{'}$.

Una vez calculados los coeficientes c_k para $k = 0, ..., m-2$ y fijado un paso h, la aproximación a la solución y su derivada en el punto h, vienen dadas respectivamente por

$$x_1 = G_0(h)x_0 + G_1(h)x_0^{'} + \varepsilon \sum_{k=0}^{m-2} c_k G_{k+2}(h)$$

$$x_1^{'} = G_0(h)x_0^{'} - \alpha G_1(h)x_0 + \varepsilon \sum_{k=0}^{m-2} c_k G_{k+1}(h)$$

Supongamos que tenemos ya calculada una aproximación a la solución y a su derivada en el punto $t = nh$, que llamaremos respectivamente x_n y $x_n^{'}$.

Para calcular una aproximación a la solución y a su derivada de:

$$x^{''} + \alpha x = \varepsilon \cdot f(x, x^{'}, t), \qquad x(nh) = x_n, \quad x^{'}(nh) = x_n^{'}$$

en el punto $(n+1)h$, realizamos el cambio de variable $t = \tau + nh$, obteniéndose

$$x^{''} + \alpha x = \varepsilon \cdot f(x, x^{'}, \tau + nh), \qquad x(0) = x_n, \quad x^{'}(0) = x_n^{'}$$

con lo que estamos en la situación inicial. Calculamos por recurrencia los coeficientes del desarrollo

$$f(x(\tau), x^{'}(\tau), \tau + nh) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} c_k \quad \text{con } c_k = \frac{d^k g(0)}{d\tau^k} = \frac{d^k g(nh)}{dt^k}$$

y la aproximación a la solución en el punto $(n+1)h$ viene dada por

$$x_{n+1} = G_0(h)x_n + G_1(h)x_n^{'} + \varepsilon \sum_{k=0}^{m-2} c_k G_{k+2}(h)$$

$$x_{n+1}^{'} = G_0(h)x_n^{'} - \alpha G_1(h)x_n + \varepsilon \sum_{k=0}^{m-2} c_k G_{k+1}(h)$$

1.8 Ejemplos

Se ha escogido los siguientes ejemplos por ser ecuaciones diferenciales de segundo orden, que Maple V [1],[7],[14],[30],[34],[54] no puede resolver simbólicamente, y es preciso un tratamiento numérico de los mismos. Les aplicaremos la técnica de G-funciones, pues a pesar de su simplicidad presentan particularidades suficientes para documentar el comportamiento del método y su modo de empleo.

1.8.1 Ejemplo 1

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Consideramos el problema de valores iniciales [22]:

$$x^{''} + \alpha x = \varepsilon x^2 \text{ con } x(0) = 1 \text{ y } x^{'}(0) = 0$$

con integral primera para $\alpha = 1$

$$F(x, x^{'}) = \frac{1}{2}\left(x^2 + x^{'\,2}\right) - \frac{\varepsilon}{3}x^3$$

Sea $x(t)$ la solución del problema anterior, que suponemos analítica, por lo que

$$x(t) = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k$$

sustituyendo esta expresión en el PVI obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}\frac{t^k}{k!} + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} = \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k\right)$$

identificando coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0 \\ a_1 &= x_0^{'} \\ a_{k+2} + \alpha a_k &= \varepsilon \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j a_{k-j} \text{ con } k \geqq 0 \end{aligned}$$

que nos permite definir la siguiente sucesión

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1 \\ b_{k+2} &= a_{k+2} + \alpha a_k \end{aligned}$$

Con estas fórmulas de recurrencia calculamos los coeficientes b_k para $k = 0, ..., m$, pues vamos a integrar numéricamente este problema utilizando $m + 1$ funciones G. Evaluamos $G_n(t)$ para un paso $t = h$ utilizando la fórmula

$$G_n(h) = \sum_{j=0}^{\infty} (-\alpha)^j \frac{h^{2j+n}}{(2j+n)!}$$

Por ser $\alpha > 0$, la serie anterior es alternada y puede calcularse con un error prefijado sin más que sumar términos sucesivos hasta que los sumandos sean menores que una cierta tolerancia.

Denotando por x_1 y $x_1^{'}$ las aproximaciones a $x(h)$ y $x^{'}(h)$ respectivamente, la aproximación a la solución vendrá dada por

$$x_1 = G_0(h)x_0 + G_1(h)x_0^{'} + \varepsilon \sum_{k=0}^{m-2} c_k G_{k+2}(h)$$

$$x_1^{'} = G_0(h)x_0^{'} - \alpha G_1(h)x_0 + \varepsilon \sum_{k=0}^{m-2} c_k G_{k+1}(h)$$

Para efectuar un segundo paso de integración se toman como valores iniciales x_1 y $x_1^{'}$ y se realiza el mismo proceso. No es necesario calcular el valor de las G-funciones por tenerlo del primer paso.

En resumen: una vez obtenido el valor de las G-funciones, cada paso se completa mediante el algoritmo siguiente

$$a_0 = x_0$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= x_0^{'} \\
a_{k+2} &= -\alpha a_k + \varepsilon \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j a_{k-j} \text{ con } 0 \leqq k \leqq m-2 \\
b_0 &= a_0 \\
b_1 &= a_1 \\
b_{k+2} &= a_{k+2} + \alpha a_k \text{ con } 0 \leqq k \leqq m-2 \\
x_{i+1} &= G_0(h)x_i + G_1(h)x_i^{'} + \sum_{k=0}^{m-2} b_{k+2} G_{k+2}(h) \\
x_{i+1}^{'} &= G_0(h)x_i^{'} - \alpha G_1(h)x_i + \sum_{k=0}^{m-2} b_{k+2} G_{k+1}(h)
\end{aligned}
$$

BIBLIOTECA VIRTUAL

En la figura n^{o}1.1 se muestra el resultado obtenido al comparar el método de las G-funciones con un método LSODE de $tol = 10^{-16}$. La integración se realizó con 1000 iteraciones, paso $h = 0^{'}1$ y $\varepsilon = 10^{-3}$.

En la figura n^{o}1.2 se muestra el resultado obtenido al comparar el método de las G-funciones con un método LSODE de $tol = 10^{-16}$. La integración se realizó con 250 iteraciones, paso $h = 0^{'}4$ y $\varepsilon = 10^{-3}$.

En la figura n^{o}1.3 se muestra el resultado obtenido al comparar el método de las G-funciones con un método LSODE de $tol = 10^{-16}$. La integración se realizó con 125 iteraciones, paso $h = 0^{'}8$ y $\varepsilon = 10^{-3}$.

1.8.2 Ejemplo 2

Consideramos el problema de Duffin [37]:

$$x^{''} + \alpha x = \varepsilon x^3 \text{ con } x(0) = 1 \text{ y } x^{'}(0) = 0$$

Para valores pequeños de ε, Kirchgraber [41], aproxima la solución mediante un

desarrollo en serie que es más apropiado que la solución exacta expresada en términos de funciones elípticas.

Sin embargo utilizaremos, para contrastar el método, la integral primera para $\alpha = 1$

$$F(x, x') = \frac{1}{2}\left(x^2 + x'^{\,2}\right) - \frac{\varepsilon}{4}x^4$$

Sea $x(t)$ la solución del problema anterior, que suponemos analítica, por lo que

$$x(t) = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k$$

sustituyendo esta expresión en el PVI obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}\frac{t^k}{k!} + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} = \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k\right)$$

identificando coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0 \\ a_1 &= x_0' \\ a_{k+2} + \alpha a_k &= \varepsilon \sum_{j=0}^{k} \left[\binom{k}{j} a_{k-j} \left(\sum_{i=0}^{j} a_i a_{j-i}\right)\right] \text{ con } k \geqq 0 \end{aligned}$$

que nos permite definir la siguiente sucesión

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1 \\ b_{k+2} &= a_{k+2} + \alpha a_k \end{aligned}$$

Denotando por x_1 y x_1' las aproximaciones a $x(h)$ y $x'(h)$ respectivamente, la aproximación a la solución vendrá dada por

$$x_1 = G_0(h)x_0 + G_1(h)x_0' + \varepsilon \sum_{k=0}^{m-2} c_k G_{k+2}(h)$$

$$x_1^{'} = G_0(h)x_0^{'} - \alpha G_1(h)x_0 + \varepsilon \sum_{k=0}^{m-2} c_k G_{k+1}(h)$$

Una vez obtenido el valor de las G-funciones, cada paso se completa mediante el algoritmo siguiente

$$\begin{aligned}
a_0 &= x_0 \\
a_1 &= x_0^{'} \\
a_{k+2} &= -\alpha a_k + \varepsilon \sum_{j=0}^{k} \left[\binom{k}{j} a_{k-j} \left(\sum_{i=0}^{j} a_i a_{j-i} \right) \right] \text{ con } 0 \leqq k \leqq m-2 \\
b_0 &= a_0 \\
b_1 &= a_1 \\
b_{k+2} &= a_{k+2} + \alpha a_k \text{ con } 0 \leqq k \leqq m-2 \\
x_{i+1} &= G_0(h)x_i + G_1(h)x_i^{'} + \sum_{k=0}^{m-2} b_{k+2} G_{k+2}(h) \\
x_{i+1}^{'} &= G_0(h)x_i^{'} - \alpha G_1(h)x_i + \sum_{k=0}^{m-2} b_{k+2} G_{k+1}(h)
\end{aligned}$$

En la figura n^{o}1.4 se muestra el resultado obtenido al comparar el método de las G-funciones con un método LSODE de $tol = 10^{-16}$. La integración se realizó con 1000 iteraciones, paso $h = 0^{'}1$ y $\varepsilon = 10^{-3}$.

En la figura n^{o}1.5 se muestra el resultado obtenido al comparar el método de las G-funciones con un método LSODE de $tol = 10^{-16}$. La integración se realizó con 250 iteraciones, paso $h = 0^{'}4$ y $\varepsilon = 10^{-3}$.

1.9 Figuras Capítulo 1

1.9.1 Ejemplo 1

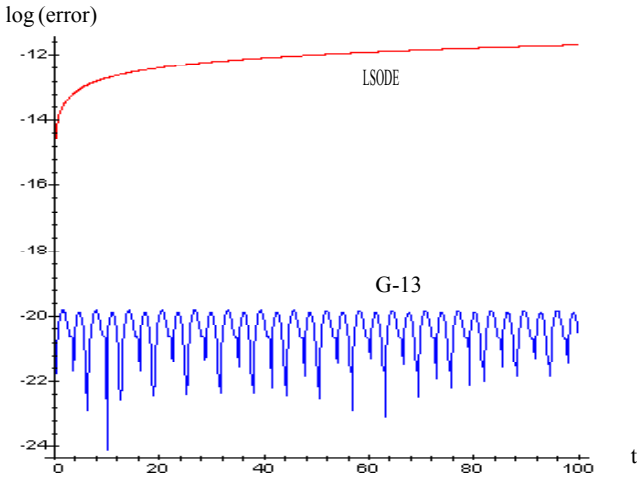


Figura n^o 1.1. $x'' + \alpha x = \varepsilon x^2,\ \varepsilon = 10^{-3}$

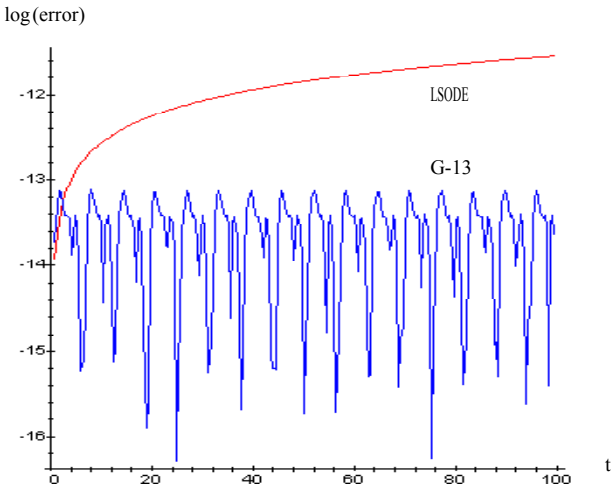
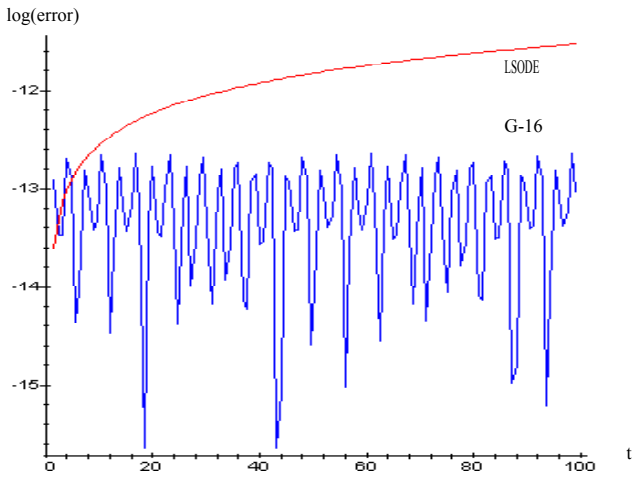


Figura n^o 1.2. $x'' + \alpha x = \varepsilon x^2,\ \varepsilon = 10^{-3}$



BIBLIOTECA VIRTUAL

Figura n^o 1.3. $x^{''} + \alpha x = \varepsilon x^2,\ \varepsilon = 10^{-3}$

MIGUEL DE CERVANTES

1.9.2 Ejemplo 2

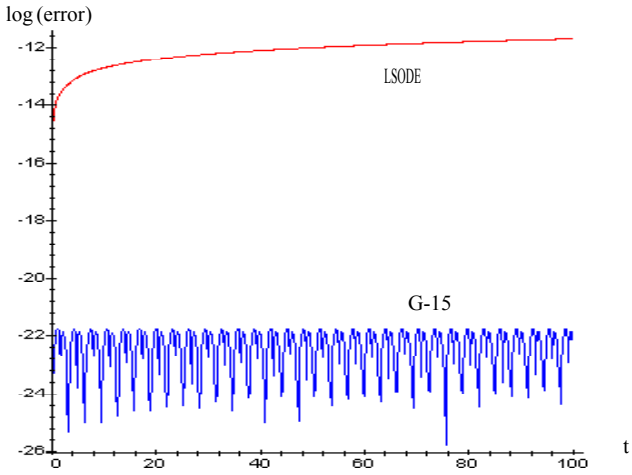


Figura n^o 1.4. $x^{''} + \alpha x = \varepsilon x^3$ $\varepsilon = 10^{-3}$

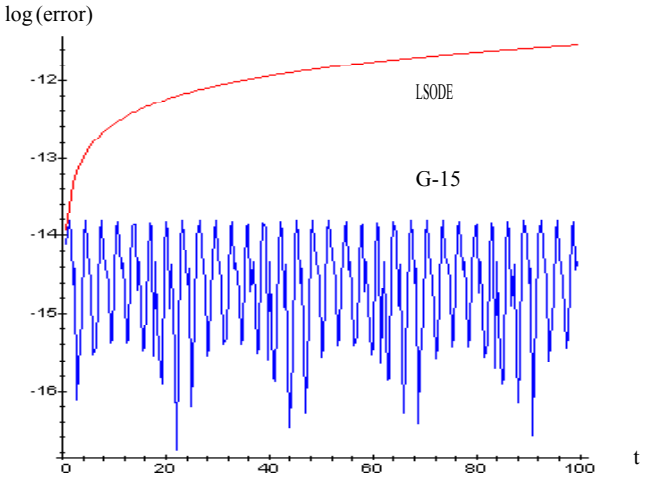


Figura n^o 1.5. $x^{''} + \alpha x = \varepsilon x^3$ $\varepsilon = 10^{-3}$

Capítulo 2

Integración numérica de osciladores perturbados con dos frecuencias. Método de series de φ-funciones

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

2.1 Introducción

Es sabido las que G-funciones de Scheifele integran exactamente el problema homogéneo asociado al siguiente PVI:

$$x'' + \alpha^2 x = \varepsilon\, f(x, x', t)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0' \quad t \in [a, b] = I$$

En el presente capítulo, se introducirán métodos de integración numérica de doble frecuencia para resolver el PVI anterior; para ello, dependiendo del término de perturbación, se calcularán unas funciones adecuadas para su integración. Estas funciones,

que llamaremos φ-funciones de Ferrándiz, las obtendremos aplicando un operador $(D^2+\beta^2)$ al PVI precedente, siendo $D=\dfrac{d}{dt}$.

El cálculo de las φ-funciones lo realizaremos en varias etapas; en un principio se calcularán unas Ψ-funciones como soluciones de los problemas no homogéneos:

$$(D^2+\beta^2)(D^2+\alpha^2)(\Psi_n(t))=\frac{t^n}{n!}$$

$$\Psi_n(0)=\Psi_n^{'}(0)=\Psi_n^{''}(0)=\Psi_n^{'''}(0)=0$$

posteriormente, se obtendrán las soluciones del problema homogéneo:

$$(D^2+\beta^2)(D^2+\alpha^2)(\varphi_i(t))=0$$

$$\varphi_i^{j)}(0)=\delta_{i,j}\quad i,j=0,1,2,3$$

y finalmente, definiremos las φ-funciones, ensamblando las dos definiciones anteriores.

También en este capítulo se estudiarán las propiedades y distintas expresiones de las φ-funciones, así como su relación con las G-funciones, Stumpff y las funciones elementales en los distintos casos, según los valores de las frecuencias α y β. Cada caso se completa, con el estudio del error de truncación.

La exposición finaliza con la aplicación a dos ejemplos del método de series de φ - funciones y su comparación con el método de G- funciones, pudiéndose apreciar la ventaja de aquel sobre éste.

2.2 Las funciones φ aplicadas a osciladores libres en una frecuencia y forzada en otra

Consideramos el problema de valores iniciales, correspondiente a una oscilación forzada de frecuencia α y función de perturbación $f = f(x(t), x^{'}(t), t)$

PVI (1):

$$x^{''} + \alpha^2 x = \varepsilon\, f(x(t), x^{'}(t), t)$$

con condiciones iniciales

$$x(0) = x_{0,} \quad x^{'}(0) = x_0^{'} \quad t \in [-T, T] = I$$

donde α es constante y ε un pequeño parámetro de perturbación. La solución $x(t; x_0, x_0^{'}, t_0)$ obtenida con las condiciones iniciales anteriores es continuamente diferenciable en $[-T, T]$. La función de perturbación $f(x(t), x^{'}(t), t)$ se supone que admite derivadas parciales continuas con respecto a sus variables independientes x, $x^{'}$, t en un dominio cerrado del $(x, x^{'}, t)$-espacio que contiene a $t \in [-T, T]$ y a todos los valores de la solución $x(t; x_0, x_0^{'}, t_0)$ y de su derivada $x^{'}(t; x_0, x_0^{'}, t_0)$.

Por las propiedades que satisface la función de perturbación:

$$g(t) = f(x(t; x_0, x_0^{'}, t_0), x^{'}(t; x_0, x_0^{'}, t_0), t)$$

en I, se puede desarrollar en serie de potencias.

Evidentemente el PVI

PVI (2):

$$x^{''} + \alpha^2 x \;\; = \;\; \varepsilon\, g(t)$$

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= x_0' \end{aligned}$$

con $t \in [-T, T] = I$ tiene la misma solución que el problema anterior.

Si queremos integrar una segunda oscilación de frecuencia β procedemos del modo siguiente: aplicamos el operador $(D^2 + \beta^2)$ a cualquiera de los problemas anteriores, de modo que se cumple

$$\begin{aligned} (D^2+\beta^2)(D^2+\alpha^2)x &= (D^2+\beta^2)\varepsilon g(t) \\ D^4x + (\alpha^2+\beta^2)D^2x + \alpha^2\beta^2 x &= (D^2+\beta^2)\varepsilon g(t) \end{aligned}$$

a lo largo de la solución $x(t; x_0, x_0', t_0)$.

Los dos primeros valores iniciales son obviamente

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0'$$

y se deducirán del PVI(1) los de $x''(0)$, $x'''(0)$:

$$x''(0) = -\alpha^2 x_0 + \varepsilon f(x_0, x_0', 0) = x_0''$$

y dado que $x'''(t; x_0, x_0', t_0)$ es:

$$\begin{aligned} &-\alpha^2 x'(t) + \varepsilon \left(\tfrac{\partial f(x(t),x'(t),t)}{\partial x} x'(t) + \tfrac{\partial f(x(t),x'(t),t)}{\partial x'} x''(t) + \tfrac{\partial f(x(t),x'(t),t)}{\partial t} \right) = \\ &= -\alpha^2 x'(t) + \varepsilon \overrightarrow{\nabla} f(x(t), x'(t), t) \cdot \big(x'(t), x''(t), 1\big) \end{aligned}$$

entonces:

$$x'''(0) = -\alpha^2 x_0' + \varepsilon \overrightarrow{\nabla} f(x_0, x_0', 0) \cdot (x_0', x_0'', 1) = x_0'''$$

Así podemos, a partir de PVI(1) o de PVI(2) considerar el PVI "ampliado":

PVI(3):

$$(D^2+\beta^2)(D^2+\alpha^2)x = (D^2+\beta^2)\varepsilon f(x,x^{'},t) = (D^2+\beta^2)\varepsilon g(t)$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x(0) &= x_{0,} \quad x^{'}(0) = x_0^{'} \\ x^{''}(0) &= x_0^{''} \\ x^{'''}(0) &= x_0^{'''} \end{aligned}$$

BIBLIOTECA VIRTUAL

cuya solución exacta $x(t;x_0,x_0^{'},t_0)$ es la misma que la de PVI(1) o la de PVI(2).

MIGUEL DE CERVANTES

Si denotamos por

$$L_4(x) = (D^2+\beta^2)(D^2+\alpha^2)x$$

el PVI(3) se expresará en lo sucesivo del modo siguiente:

$$\begin{aligned} L_4(x) &= (D^2+\beta^2)\varepsilon g(t) \\ x(0) &= x_{0,} \quad x^{'}(0) = x_0^{'} \\ x^{''}(0) &= x_0^{''} \\ x^{'''}(0) &= x_0^{'''} \end{aligned}$$

Dado que $g(t)$ analítica podemos escribir:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{n)}(0)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$$

y el PVI(3) se expresa como:

$$L_4(x) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (D^2+\beta^2)\left(c_n \frac{t^n}{n!}\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} c_n \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \beta^2 c_n \frac{t^n}{n!} = \\
&= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} \frac{t^n}{n!} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \beta^2 c_n \frac{t^n}{n!} = \\
&= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Es importante resaltar, que lo básico es no derivar la funcion $f(x(t), x^{'}(t), t)$, ni tan siquiera la función $g(t)$ sino utilizar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$, porque sus coeficientes $c_n = g^{n)}(0)$ serán calculados aproximadamente por diferencias divididas de la función $g(t)$.

La solución de PVI(3), puede obtenerse de forma habitual según la teoría general de EDO lineales [51], como la suma de la solución de la homogénea con las condiciones dadas y una solución de la ecuación no homogénea en la que ésta y sus tres primeras derivadas, se anulan en $t = 0$.

La no homogénea, se obtiene como solución de los problemas particulares de valores iniciales:

PVI(4):

$$
\begin{aligned}
L_4(x_n) &= \frac{t^n}{n!} \\
x_n(0) &= x_n^{'}(0) = x_n^{''}(0) = x_n^{'''}(0) = 0
\end{aligned}
$$

con $n \geqslant 0$, combinándolas con las c_j y β^2 del PVI(3)

Definición 2.1 *Llamaremos funciones $\Psi_n(t)$, a las que cumplen para $n \geqslant 0$:*

$$
\begin{aligned}
L_4(\Psi_n(t)) &= \frac{t^n}{n!} \\
\Psi_n(0) &= \Psi_n^{'}(0) = \Psi_n^{''}(0) = \Psi_n^{'''}(0) = 0
\end{aligned}
$$

Proposición 2.1 *Si $n \geqslant 1$ se verifica $\Psi_n^{'}(t) = \Psi_{n-1}(t)$.*

D/.

Dado que

$$\begin{aligned} L_4(\Psi_n^{'}(t)) &= \frac{d}{dt}\left(L_4(\Psi_n(t))\right) = \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{t^n}{n!}\right) = L_4(\Psi_{n-1}(t)) \end{aligned}$$

$\Psi_n^{'}(t)$ cumple la misma ecuación diferencial que $\Psi_{n-1}(t)$ y además, de forma inmediata por la definición n^o 2.1, se tiene:

$$\Psi_n(0) = \Psi_n^{'}(0) = \Psi_n^{''}(0) = \Psi_n^{'''}(0) = 0$$

y

$$\Psi_n^{IV)}(0) = D^4(\Psi_n(0)) = -(\alpha^2+\beta^2)D^2\Psi_n(0) - \alpha^2\beta^2\Psi_n(0) + \frac{0^n}{n!} = 0$$

por tanto $\Psi_n^{'}(t)$ y $\Psi_{n-1}(t)$ verifican el mismo PVI, y por tanto coinciden.♣

Proposición 2.2 *Para $n \geqslant 0$ se verifica la siguiente recurrencia:*

$$\Psi_n(t) + (\alpha^2+\beta^2)\Psi_{n+2}(t) + \alpha^2\beta^2\Psi_{n+4}(t) = \frac{t^{n+4}}{(n+4)!}$$

D/.

Aplicando la proposición n^o 2.1 y la definición n^o 2.1, tenemos:

$$\begin{aligned} L_4(\Psi_{n+4}(t)) &= D^4\Psi_{n+4}(t) + (\alpha^2+\beta^2)D^2\Psi_{n+4}(t) + \alpha^2\beta^2\Psi_{n+4}(t) = \\ &= \Psi_n(t) + (\alpha^2+\beta^2)\Psi_{n+2}(t) + \alpha^2\beta^2\Psi_{n+4}(t) = \frac{t^{n+4}}{(n+4)!} \quad ♣ \end{aligned}$$

Las expresiones explícitas y analíticas de las Ψ_n-funciones soluciones de los PVI(4), dependerán de los valores de las frecuencias α y β.

Análogamente ocurre con la expresión explícita y analítica de la solución del problema homogéneo con las condiciones iniciales dadas. Dicha solución se obtendrá por combinación lineal de cuatro problemas homogéneos particulares cuyas expresiones dependerán de los valores de las frecuencias α y β.

Una vez obtenidas las expresiones analíticas de estas funciones podemos, en cada caso, construir la solución del PVI(3). Para no trabajar con dos tipos de funciones las unificamos definiendo unas nuevas funciones que llamaremos φ - funciones, en base a las cuales, redefineremos la solución del PVI(3), en cada caso.

BIBLIOTECA VIRTUAL

2.2.1 Caso I $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$

Proposición 2.3 *Las funciones $\Psi_n(t)$, se pueden expresar mediante las series:*

$$\begin{aligned}
\Psi_{2r}(t) &= \sum_{m=r+2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+r}}{(2m)!} \frac{\beta^{2m-(2r+2)} - \alpha^{2m-(2r+2)}}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m} \quad con \quad r \geqslant 0 \\
\Psi_{2r-1}(t) &= \sum_{m=r+2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+r}}{(2m-1)!} \frac{\beta^{2m-(2r+2)} - \alpha^{2m-(2r+2)}}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m-1} \quad con \quad r \geqslant 1
\end{aligned}$$

D/.

Suponiendo que $\Psi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{[n]} t^k$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
L_4(\Psi_n(t)) &= \sum_{k=4}^{\infty} k(k-1)(k-2)(k-3) b_k^{[n]} t^{k-4} + \\
&\quad + (\alpha^2 + \beta^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k^{[n]} t^{k-2} + \\
&\quad + \alpha^2 \beta^2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{[n]} t^k
\end{aligned}$$

e integrando, mediante desarrollos en serie, el PVI(4) resulta:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left((k+4)(k+3)(k+2)(k+1) b_{k+4}^{[n]} + (\alpha^2 + \beta^2)(k+1)(k+2) b_{k+2}^{[n]} + \alpha^2 \beta^2 b_k^{[n]} \right) t^k = \frac{t^n}{n!}$$

e identificando coeficientes, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias:

$$(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)b_{k+4}^{[n]} + (\alpha^2+\beta^2)(k+1)(k+2)b_{k+2}^{[n]} + \alpha^2\beta^2 b_k^{[n]} = \frac{\delta_{k,n}}{k!}$$

de la que conocemos, debido a las condiciones iniciales del PVI(4):

$$b_0^{[n]} = b_1^{[n]} = b_2^{[n]} = b_3^{[n]} = 0$$

resolviendo esta ecuación para los distintos valores de n se obtienen las fórmulas propuestas.♣

Corolario 2.1 *Las $\Psi_n(t)$, se pueden expresar mediante funciones trigonométricas elementales, de la manera siguiente*

Para $r \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\Psi_{2r}(t) &= -\sum_{m=0}^{r+1} \frac{(-1)^{m+r}}{(2m)!} \frac{\beta^{2m-(2r+2)} - \alpha^{2m-(2r+2)}}{\beta^2-\alpha^2} t^{2m} + \\ &+ \frac{(-1)^r}{\beta^2-\alpha^2}\left(\frac{\cos(\beta t)}{\beta^{2r+2}} - \frac{\cos(\alpha t)}{\alpha^{2r+2}}\right)\end{aligned}$$

Para $r \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\Psi_{2r-1}(t) &= -\sum_{m=1}^{r+1} \frac{(-1)^{m+r}}{(2m-1)!} \frac{\beta^{2m-(2r+2)} - \alpha^{2m-(2r+2)}}{\beta^2-\alpha^2} t^{2m-1} + \\ &+ \frac{(-1)^{r+1}}{\beta^2-\alpha^2}\left(\frac{\sin(\beta t)}{\beta^{2r+1}} - \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha^{2r+1}}\right)\end{aligned}$$

D/.

Para $\Psi_{2r}(t)$ bastaría inicializar en cero el sumatorio de la expresión dada en la proposición nº 2.3, y realizar adecuadas transformaciones algebraicas elementales.

En el caso de $\Psi_{2r-1}(t)$, se procedería de manera análoga, inicializando el sumatorio en uno.♣

Corolario 2.2 *Las funciones* $\Psi_n(t)$ *se pueden expresar de forma única, mediante la siguiente fórmula:*

$$\Psi_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+4+n)!} \frac{\beta^{2m+2} - \alpha^{2m+2}}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m+4+n} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{[n]} t^{2m+4+n}$$

donde

$$b_m^{[n]} = \frac{(-1)^m}{(2m+4+n)!} \frac{\beta^{2m+2} - \alpha^{2m+2}}{\beta^2 - \alpha^2}$$

con $n \geqslant 0$.

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

D/.

Efectuando el cambio de índices: $m = i + r + 2$ obtenemos:

$$\Psi_{2r}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2(i+r+2))!} \frac{\beta^{2i+2} - \alpha^{2i+2}}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2(i+r+2)}$$

$$\Psi_{2r-1}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2(i+r+2)-1)!} \frac{\beta^{2i+2} - \alpha^{2i+2}}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2(i+r+2)-1}$$

bastaría notar $2r$ como N y $2r-1$ como M para constatar que se puede expresar de forma única.♣

Construiremos la solución del problema homogéneo, mediante una combinación lineal de funciones φ_i con $i = 0, 1, 2, 3$ que definimos a continuación.

Definición 2.2 *Sean* φ_i *con* $i = 0, 1, 2, 3$. *las soluciones del problema de valores iniciales:*

$$\begin{aligned} L_4(\varphi_i(t)) &= 0 \\ \varphi_i^{j)}(0) &= \delta_{i,j} \quad i, j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Proposición 2.4 *Las funciones $\varphi_n(t)$ con $n = 0, 1, 2, 3.$ se pueden expresar mediante las series siguientes:*

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!} \frac{\alpha^2\beta^2(\beta^{2m-2} - \alpha^{2m-2})}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m} \\
\varphi_1(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} \frac{\alpha^2\beta^2(\beta^{2m-2} - \alpha^{2m-2})}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m+1} \\
\varphi_2(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!} \frac{(\beta^{2m} - \alpha^{2m})}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m} \\
\varphi_3(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} \frac{(\beta^{2m} - \alpha^{2m})}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m+1}
\end{aligned}$$

BIBLIOTECA VIRTUAL

D/.

Análoga a la proposición n^o 2.3♣

Proposición 2.5 *Las $\varphi_n(t)$, con $n = 0, 1, 2, 3.$ se pueden expresar mediante funciones trigonométricas elementales, de la manera siguiente*

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\alpha^2 \cos(\beta t) - \beta^2 \cos(\alpha t)\right) \\
\varphi_1(t) &= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\frac{\alpha^2}{\beta} \sin(\beta t) - \frac{\beta^2}{\alpha} \sin(\alpha t)\right) \\
\varphi_2(t) &= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\cos(\beta t) - \cos(\alpha t)\right) \\
\varphi_3(t) &= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\frac{1}{\beta} \sin(\beta t) - \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t)\right)
\end{aligned}$$

D/.

Basta aplicar los métodos tradicionales de resolución de EDO'S.♣

Proposición 2.6 *El conjunto de funciones $S = \{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}$ es un sistema fundamental de soluciones del problema homogéneo $L_4(x(t)) = 0.$*

D/.

Se deduce de ser el wronskiano no idénticamente nulo; en efecto:

$$W\left(\varphi_0(0), \varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)\right) = 1 \quad \clubsuit$$

Proposición 2.7 *La solución del problema de valores iniciales siguiente (PVI(5))*

$$\begin{aligned} L_4(x(t)) &= 0 \\ x(0) &= x_0, \quad x^{'}(0) = x_0^{'}, \quad x^{''}(0) = x_0^{''}, \quad x^{'''}(0) = x_0^{'''} \end{aligned}$$

viene dada por la expresión siguiente:

$$x_H(t) = x_0\varphi_0(t) + x_0^{'}\varphi_1(t) + x_0^{''}\varphi_2(t) + x_0^{'''}\varphi_3(t)$$

D/.

Por la proposición n^o 2.6

$$x_H(t) = C_0\varphi_0(t) + C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + C_3\varphi_3(t)$$

y resolviendo el sistema que resulta de aplicar las condiciones iniciales obtenemos

$$C_0 = x_0, \quad C_1 = x_0^{'}, \quad C_2 = x_0^{''}, \quad C_3 = x_0^{'''} \quad \clubsuit$$

Para lograr una notación más compacta expresaremos $x_H(t)$ como:

$$x_H(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x}$$

donde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}(t) &= \left(\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\right) \\ \mathbf{x} &= \left(x_0, x_0^{'}, x_0^{''}, x_0^{'''}\right) \end{aligned}$$

Teorema 2.1

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \Psi_n(t)$$

es solución del problema PVI(3).

D/.

Aplicando el operador L_4 a la función $x(t)$ resulta:

$$\begin{aligned} L_4(x(t)) &= L_4\left(\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x}\right) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) L_4\left(\Psi_n(t)\right) = \\ &= 0 + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

veamos las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x(0) &= \boldsymbol{\nu}(0) \cdot \mathbf{x} = x_0 \\ x'(0) &= \boldsymbol{\nu}'(0) \cdot \mathbf{x} = x_0' \\ x''(0) &= \boldsymbol{\nu}''(0) \cdot \mathbf{x} = x_0'' \\ x'''(0) &= \boldsymbol{\nu}'''(0) \cdot \mathbf{x} = x_0''' \end{aligned}$$

de donde se deduce la tesis.♣

La relación expresada en el teorema anterior es análoga a:

$$x(t) = G_0(t)x_0 + G_1(t)x_0' + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n G_{n+2}(t)$$

que obtendríamos para el oscilador armónico y las G-funciones de Scheifele.

Para obtener una notación más compacta y uniforme, procederemos del modo siguiente:

Definición 2.3 *Sea:*

$$\varphi_{n+4}(t) = \Psi_n(t) \quad con \quad n \geqslant 0$$

que llamaremos, junto con las anteriores φ_0, φ_1, φ_2 *y* φ_3, *φ-funciones de Ferrándiz.*

Pudiéndose entonces escribir la solución de PVI(3) en la forma:

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \varphi_{n+4}(t)$$

Llamando

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_{k+2} + \beta^2 c_k\right) \varphi_{k+4}(t)$$

podemos expresar la solución de PVI(3), $x(t)$ del modo siguiente:

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon S(t)$$

donde la notación $S(t)$ es indicativa de serie.

Teorema 2.2

$$\varphi_n^{'}(t) = \varphi_{n-1}(t) \quad \forall n \geqslant 1 \quad excepto\ para\ n = 2$$

D/.

Por la proposición nº2.1, el teorema se verifica para $n \geqslant 5$. Para los casos $n = 1, 3, 4$. basta derivar las funciones φ_1, φ_3 y φ_4.♣

Veamos ahora una relación entre las G-funciones y las φ-funciones. Para ello introducimos la notación: $\varphi_n(t, \alpha, \beta)$, para indicar explícitamente que las φ-funciones dependen de las frecuencias α y β. Notaremos por $G_n(t, \alpha)$ y $G_n(t, \beta)$ a las G-funciones para indicar que dependen solamente de la frecuencia α ó solamente de la frecuencia β.

Teorema 2.3

$$\varphi_n(t,\alpha,\beta)=\frac{\alpha^2G_n(t,\alpha)-\beta^2G_n(t,\beta)}{\alpha^2-\beta^2}\quad\forall n\geqslant 2$$

D/.

Aclaremos que las $G_n(t,\alpha)$ y las $G_n(t,\beta)$ se calculan para las ecuaciones

$$x^{''}+\alpha^2x = \varepsilon g(t)$$

$$x^{''}+\beta^2x = \varepsilon g(t)$$

respectivamente y vienen dadas por las expresiones:

$$G_n(t,\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\alpha^2\right)^k\frac{t^{2k+n}}{(2k+n)!}$$
$$G_n(t,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\beta^2\right)^k\frac{t^{2k+n}}{(2k+n)!}$$

obtenidas en el capítulo n^{o}1

Si $n\geqslant 4$ entonces:

$$\begin{aligned}\varphi_n(t,\alpha,\beta) &= \Psi_{n-4}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+n)!}\frac{\beta^{2k+2}-\alpha^{2k+2}}{\beta^2-\alpha^2}t^{2k+n}=\\ &= \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\alpha^2\right)^k\frac{t^{2k+n}}{(2k+n)!}-\beta^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\beta^2\right)^k\frac{t^{2k+n}}{(2k+n)!}\right)=\\ &= \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha^2G_n(t,\alpha)-\beta^2G_n(t,\beta)\right)\end{aligned}$$

Si $n=2,3$ tenemos:

$$\begin{aligned}\varphi_n(t,\alpha,\beta) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+n-2)!}\frac{\beta^{2m}-\alpha^{2m}}{\beta^2-\alpha^2}t^{2m+n-2}=\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+n)!}\frac{\beta^{2k+2}-\alpha^{2k+2}}{\beta^2-\alpha^2}t^{2k+n}=\\ &= \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\alpha^2\right)^k\frac{t^{2k+n}}{(2k+n)!}-\beta^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\beta^2\right)^k\frac{t^{2k+n}}{(2k+n)!}\right)=\\ &= \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha^2G_n(t,\alpha)-\beta^2G_n(t,\beta)\right)\quad\clubsuit\end{aligned}$$

Teorema 2.4

$$G_n(t,\alpha) = \varphi_n(t,\alpha,\beta) + \beta^2\varphi_{n+2}(t,\alpha,\beta) \quad \forall n \geqslant 2$$

D/.

Las $G_n(t,\alpha)$ verifican:

$$G_n(t,\alpha) + \alpha^2 G_{n+2}(t,\alpha) = \frac{t^n}{n!} \quad \forall n \geqslant 0$$

y por el teorema n^o 2.3, aplicado a: $\varphi_n(t,\alpha,\beta)$ y $\varphi_{n+2}(t,\alpha,\beta)$ se tiene:

BIBLIOTECA VIRTUAL

$$\begin{aligned}
G_n(t,\alpha) &= \frac{t^n}{n!} - \alpha^2 G_{n+2}(t,\alpha) = \\
&= \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left((\alpha^2-\beta^2)\frac{t^n}{n!} - \alpha^2(\alpha^2-\beta^2)G_{n+2}(t,\alpha)\right) = \\
&= \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha^2\left(\frac{t^n}{n!} - \alpha^2 G_{n+2}(t,\alpha) + \beta^2 G_{n+2}(t,\alpha)\right) - \beta^2\frac{t^n}{n!}\right) = \\
&= \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha^2\left(G_n(t,\alpha) + \beta^2 G_{n+2}(t,\alpha)\right) - \beta^2\left(G_n(t,\beta) + \beta^2 G_{n+2}(t,\beta)\right)\right) = \\
&= \varphi_n(t,\alpha,\beta) + \beta^2\varphi_{n+2}(t,\alpha,\beta) \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

Relación con las funciones de Stumpff

Los teoremas n^o 2.3 y n^o 2.4, nos permiten establecer una relación entre las φ-funciones y las funciones de Stumpff, a través de las G-funciones.

Obteniéndose:

$$\varphi_n(t,\alpha,\beta) = \frac{t^n}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha^2 c_n(t^2\alpha^2) - \beta^2 c_n(t^2\beta^2)\right)$$

y

$$c_n(t^2\alpha^2) = \frac{1}{t^n}\left(\varphi_n(t,\alpha,\beta) + \beta^2\varphi_{n+2}(t,\alpha,\beta)\right)$$

Relación con las funciones elementales

Los teoremas n^o 2.3 y n^o 2.4, nos permiten establecer una relación entre las φ-funciones y las funciones elementales, a través de las G-funciones.

Oteniéndose:

$$\begin{aligned}
\varphi_{2n}(t) &= \frac{(-1)^n}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{\beta^{2n-2}\cos\alpha t-\alpha^{2n-2}\cos\beta t}{\alpha^{2n-2}-\beta^{2n-2}}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\left(\beta^{2k-2n+2}-\alpha^{2k-2n+2}\right)}{(2k)!}t^{2k}\right)\\
\varphi_{2n+1}(t) &= \frac{(-1)^n}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{\beta^{2n-1}\sin\alpha t-\alpha^{2n-1}\sin\beta t}{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\left(\beta^{2k-2n+2}-\alpha^{2k-2n+2}\right)}{(2k+1)!}t^{2k+1}\right)
\end{aligned}$$

para $n>0$.

BIBLIOTECA VIRTUAL

Cálculo del residuo y error de truncación

Dada la ecuación:

$$L_4(x(t))=\varepsilon(D^2+\beta^2)g(t)$$

donde

$$f(x(t),x^{'}(t),t)=g(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\frac{t^k}{k!}$$

consideremos la solución:

$$x(t)=\boldsymbol{\nu}(t)\cdot\mathbf{x}+\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_{n+2}+\beta^2c_n\right)\varphi_{n+4}(t)$$

y tomemos una truncación con $m+1$ φ-funciones y $m\geqslant 4$

$$x_m(t)=\boldsymbol{\nu}(t)\cdot\mathbf{x}+\varepsilon\sum_{n=0}^{m-4}\left(c_{n+2}+\beta^2c_n\right)\varphi_{n+4}(t)$$

como

$$L_4(x_m(t)) = \varepsilon\sum_{n=0}^{m-4}\left(c_{n+2}+\beta^2c_n\right)\frac{t^n}{n!}=$$

$$+\varepsilon\left(\sum_{n=4}^{m-4}\left(c_{n+2}+\beta^2 c_n\right)\left(\varphi_n(t)+\left(\alpha^2+\beta^2\right)\varphi_{n+2}(t)+\alpha^2\beta^2\varphi_{n+4}(t)\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{n=0}^{3}\left(c_{n+2}+\beta^2 c_n\right)\frac{t^n}{n!}\right)$$

entonces, el residuo $R_m(t)$ correspondiente a $x_m(t)$, vendrá dado por:

$$\begin{aligned}
R_m(t) &= \varepsilon(D^2+\beta^2)g(t)-L_4(x_m(t))= \\
&= \varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_{n+2}+\beta^2 c_n\right)\frac{t^n}{n!}-L_4(x_m(t))= \\
&= \varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_{n+2}+\beta^2 c_n\right)\frac{t^n}{n!}-\varepsilon\sum_{n=0}^{m-4}\left(c_{n+2}+\beta^2 c_n\right)\frac{t^n}{n!}= \\
&= \varepsilon\sum_{n=m-3}^{\infty}\left(c_{n+2}+\beta^2 c_n\right)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

En consecuencia el parámetro de perturbación ε es factor del residuo, por tanto, el residuo será pequeño con ε. Si $\varepsilon = 0$, el método de las φ-funciones integra exactamente la ecuación con sólo el término $\boldsymbol{\nu}(t)\cdot\mathbf{x}$.

El error de truncación:

$$E_m = x(t)-x_m(t) = \varepsilon\sum_{n=m-3}^{\infty}\left(c_{n+2}+\beta^2 c_n\right)\varphi_{n+4}(t)$$

tiene a ε como factor. Si $\varepsilon = 0$ el método de las φ-funciones no produce error de truncación.

2.2.2 Caso II $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$

Las fórmulas, expresiones e igualdades correspondientes a este caso, se pueden obtener mediante un proceso análogo al Caso I; o bien mediante el cálculo de límites, sobre las expresiones obtenidas en el caso anterior, cuando $\beta \to 0$.

Proposición 2.8 *Las funciones $\Psi_n(t)$, se pueden expresar mediante las series:*

$$\Psi_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+4+n)!} \alpha^{2m} t^{2m+4+n} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{[n]} t^{2m+4+n}$$

donde

$$b_m^{[n]} = \frac{(-1)^m}{(2m+4+n)!} \alpha^{2m}$$

con $n \geqslant 0$.

D/.

Basta tomar límites cuando $\beta \to 0$, en la expresión obtenida del corolario n^o 2.2 ♣

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Proposición 2.9 *Las funciones $\varphi_n(t)$ con $n = 0, 1, 2, 3$. se pueden expresar mediante las series siguientes:*

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= 1 \\
\varphi_1(t) &= t \\
\varphi_2(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!} \alpha^{2m-2} t^{2m} \\
\varphi_3(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} \alpha^{2m-2} t^{2m+1}
\end{aligned}$$

D/.

Basta tomar límites cuando $\beta \to 0$, en la expresión obtenida en la proposición n^{o}2.4. ♣

Proposición 2.10 *Las $\varphi_n(t)$, con $n = 0, 1, 2, 3$. se pueden expresar mediante funciones trigonométricas elementales, de la manera siguiente*

$$\varphi_0(t) = 1$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= t \\ \varphi_2(t) &= \frac{1-\cos(\alpha t)}{\alpha^2} \\ \varphi_3(t) &= \frac{1}{\alpha^2}\left(t - \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha t)\right)\end{aligned}$$

D/.

Basta tomar límites cuando $\beta \to 0$, en la expresión obtenida en la proposición n^{o}2.5. ♣

Construiremos, de modo análogo al Caso I y por extensión, las φ-funciones: $\varphi_{n+4}(t) = \Psi_n(t)$ para $n \geq 0$, utilizando las funciones $\Psi_n(t)$ y $\varphi_i(t)$ con $i = 0, 1, 2, 3$ definidas para este caso, es decir con $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$.

La solución del PVI(3) se expresará:

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}\varphi_{n+4}(t)$$

Teorema 2.5

$$\varphi_n^{'}(t) = \varphi_{n-1}(t) \quad \forall n \geqslant 1 \quad \textit{excepto para } n = 2$$

D/.

$$\varphi_n^{'}(t, \alpha, 0) = \lim_{\beta \to 0} \varphi_n^{'}(t, \alpha, \beta) = \lim_{\beta \to 0} \varphi_{n-1}(t, \alpha, \beta) = \varphi_{n-1}(t, \alpha, 0) \quad ♣$$

Teorema 2.6

$$\varphi_n(t, \alpha, 0) = G_n(t, \alpha) \quad \forall n \geqslant 2$$

D/.

Basta tomar límites cuando $\beta \to 0$, en la expresión obtenida en el teorema n^o 2.3. ♣

Cálculo del residuo y error de truncación

Dada la ecuación:

$$L_4(x(t)) = \varepsilon D^2 g(t)$$

con las consideraciones efectuadas en el Caso I, para la función $f(x(t), x'(t), t) = g(t)$ y solución:

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} \varphi_{n+4}(t)$$

tomemos una truncación con $m+1$ φ-funciones y $m \geqslant 4$

$$x_m(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{m-4} c_{n+2} \varphi_{n+4}(t)$$

como

$$L_4(x_m(t)) = \varepsilon \sum_{n=0}^{m-4} c_{n+2} \frac{t^n}{n!}$$

entonces, el residuo $R_m(t)$ correspondiente a $x_m(t)$, vendrá dado por:

$$R_m(t) = \varepsilon \sum_{n=m-3}^{\infty} c_{n+2} \frac{t^n}{n!}$$

En consecuencia el parámetro de perturbación ε es factor del residuo, por tanto, el residuo será pequeño con ε. Si $\varepsilon = 0$, el método de las φ-funciones integra exactamente la ecuación con sólo el término $\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x}$.

El error de truncación:

$$E_m = x(t) - x_m(t) = \varepsilon \sum_{n=m-3}^{\infty} c_{n+2} \varphi_{n+4}(t)$$

tiene a ε como factor. Si $\varepsilon = 0$ el método de las φ-funciones no produce error de truncación.

2.2.3 Caso III $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$

Las fórmulas, expresiones e igualdades correspondientes a este caso, se pueden obtener mediante un proceso análogo al Caso I; o bien mediante el cálculo de límites, sobre las expresiones obtenidas en el Caso I, cuando $\alpha \to 0$.

Proposición 2.11 *Las funciones $\Psi_n(t)$, se pueden expresar mediante las series:*

$$\Psi_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+4+n)!} \beta^{2m} t^{2m+4+n} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{[n]} t^{2m+4+n}$$

donde

$$b_m^{[n]} = \frac{(-1)^m}{(2m+4+n)!} \beta^{2m}$$

con $n \geqslant 0$.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

D/.

Basta tomar límites cuando $\alpha \to 0$, en la expresión obtenida del corolario n^o 2.2. ♣

Proposición 2.12 *Las funciones $\varphi_n(t)$ con $n = 0, 1, 2, 3.$ se pueden expresar mediante las series siguientes:*

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= 1 \\
\varphi_1(t) &= t \\
\varphi_2(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!} \beta^{2m-2} t^{2m} \\
\varphi_3(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} \beta^{2m-2} t^{2m+1}
\end{aligned}$$

D/.

Basta tomar límites cuando $\alpha \to 0$, en la expresión obtenida en la proposición nº2.4. ♣

Proposición 2.13 *Las $\varphi_n(t)$, con $n = 0, 1, 2, 3$. se pueden expresar mediante funciones trigonométricas elementales, de la manera siguiente*

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1 \\ \varphi_1(t) &= t \\ \varphi_2(t) &= \frac{1-\cos(\beta t)}{\beta^2} \\ \varphi_3(t) &= \frac{1}{\beta^2}\left(t - \frac{1}{\beta}\sin(\beta t)\right) \end{aligned}$$

D/.

Basta tomar límites cuando $\alpha \to 0$, en la expresión obtenida en la proposición nº2.5. ♣

Construiremos, de modo análogo al Caso I y por extensión, las φ-funciones: $\varphi_{n+4}(t) = \Psi_n(t)$ para $n \geq 0$, utilizando las funciones $\Psi_n(t)$ y $\varphi_i(t)$ con $i = 0, 1, 2, 3$ definidas para este caso, es decir con $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$.

La solución del PVI(3) se expresará:

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \varphi_{n+4}(t)$$

Teorema 2.7

$$\varphi_n'(t) = \varphi_{n-1}(t) \quad \forall n \geqslant 1 \quad \textit{excepto para } n = 2$$

D/.

$$\varphi_n^{'}(t,0,\beta) = \lim_{\alpha\to 0} \varphi_n^{'}(t,\alpha,\beta) = \lim_{\alpha\to 0} \varphi_{n-1}(t,\alpha,\beta) = \varphi_{n-1}(t,0,\beta) \quad \clubsuit$$

Teorema 2.8

$$\varphi_n(t,0,\beta) = G_n(t,\beta) \quad \forall n \geqslant 2$$

D/.

Basta tomar límites cuando $\alpha \to 0$, en la expresión obtenida en el teorema n^o 2.3. $\clubsuit$

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Cálculo del residuo y error de truncación

Dada la ecuación:

$$L_4(x(t)) = \varepsilon(D^2 + \beta^2)g(t)$$

con las consideraciones efectuadas en el Caso I, para la función $f(x(t), x^{'}(t), t) = g(t)$ y solución:

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t)\cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n)\varphi_{n+4}(t)$$

tomemos una truncación con $m+1$ φ-funciones y $m \geqslant 4$

$$x_m(t) = \boldsymbol{\nu}(t)\cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{m-4} (c_{n+2} + \beta^2 c_n)\varphi_{n+4}(t)$$

como

$$\begin{aligned} L_4(x_m(t)) &= \varepsilon \sum_{n=0}^{m-4} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \frac{t^n}{n!} = \\ &= \varepsilon \left(\sum_{n=4}^{m-4} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \left(\varphi_n(t) + \beta^2 \varphi_{n+2}(t)\right) + \sum_{n=0}^{3} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \frac{t^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

entonces, el residuo $R_m(t)$ correspondiente a $x_m(t)$, vendrá dado por:

$$\begin{aligned} R_m(t) &= \varepsilon(D^2+\beta^2)g(t) - L_4(x_m(t)) = \\ &= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \frac{t^n}{n!} - \varepsilon \sum_{n=0}^{m-4} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \frac{t^n}{n!} = \\ &= \varepsilon \sum_{n=m-3}^{\infty} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

En consecuencia el parámetro de perturbación ε es factor del residuo, por tanto, éste será pequeño con ε. Si $\varepsilon = 0$, el método de las φ-funciones integra exactamente la ecuación con sólo el término $\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x}$.

El error de truncación:

$$E_m = x(t) - x_m(t) = \varepsilon \sum_{n=m-3}^{\infty} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \varphi_{n+4}(t)$$

tiene a ε como factor. Si $\varepsilon = 0$ el método de las φ-funciones no produce error de truncación.

2.2.4 Caso IV $\alpha = \beta \neq 0$

Las fórmulas, expresiones e igualdades correspondientes a este caso, se pueden obtener mediante un proceso análogo al Caso I; o bien mediante el cálculo de límites, sobre las expresiones obtenidas en el Caso I, cuando $\beta \to \alpha$.

Proposición 2.14 *Las funciones $\Psi_n(t)$, se pueden expresar mediante las series:*

$$\Psi_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+1)}{(2m+4+n)!} \alpha^{2m} t^{2m+4+n} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{[n]} t^{2m+4+n}$$

donde

$$b_m^{[n]} = \frac{(-1)^m (m+1)}{(2m+4+n)!} \alpha^{2m}$$

con $n \geqslant 0$.

D/.

Basta tomar límites cuando $\beta \to \alpha$, en la expresión obtenida del corolario n^o 2.2. ♣

Proposición 2.15 *Las funciones* $\varphi_n(t)$ *con* $n = 0, 1, 2, 3.$ *se pueden expresar mediante las series siguientes:*

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(m-1)}{(2m)!}\alpha^{2m}t^{2m} \\
\varphi_1(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(m-1)}{(2m+1)!}\alpha^{2m}t^{2m+1} \\
\varphi_2(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}m}{(2m)!}\alpha^{2m-2}t^{2m} \\
\varphi_3(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}m}{(2m+1)!}\alpha^{2m-2}t^{2m+1}
\end{aligned}$$

D/.

Basta tomar límites cuando $\beta \to \alpha$, en la expresión obtenida en la proposición n^{o}2.4. ♣

Proposición 2.16 *Las* $\varphi_n(t)$*, con* $n = 0, 1, 2, 3.$ *se pueden expresar mediante funciones trigonométricas elementales, de la manera siguiente*

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= \frac{\alpha}{2}t\sin(\alpha t) + \cos(\alpha t) \\
\varphi_1(t) &= \frac{-t\cos(\alpha t)}{2} + \frac{3}{2\alpha}\sin(\alpha t) \\
\varphi_2(t) &= \frac{t}{2\alpha}\sin(\alpha t) \\
\varphi_3(t) &= -\frac{t}{2\alpha^2}\cos(\alpha t) + \frac{\sin(\alpha t)}{2\alpha^3}
\end{aligned}$$

D/.

Basta tomar límites cuando $\beta \to \alpha$, en la expresión obtenida en proposición nº2.5. ♣

Construiremos, de modo análogo al Caso I y por extensión, las φ-funciones: $\varphi_{n+4}(t) = \Psi_n(t)$ para $n \geq 0$, utilizando las funciones $\Psi_n(t)$ y $\varphi_i(t)$ con $i = 0, 1, 2, 3$ definidas para este caso, es decir con $\alpha = \beta \neq 0$.

La solución del PVI(3) se expresará:

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+2} + \alpha^2 c_n\right) \varphi_{n+4}(t)$$

Teorema 2.9

$$\varphi_n^{'}(t) = \varphi_{n-1}(t) \quad \forall n \geqslant 1 \quad \textit{excepto para } n = 2$$

D/.

$$\varphi_n^{'}(t, \alpha, \alpha) = \lim_{\beta \to \alpha} \varphi_n^{'}(t, \alpha, \beta) = \lim_{\beta \to \alpha} \varphi_{n-1}(t, \alpha, \beta) = \varphi_{n-1}(t, \alpha, \alpha). \quad ♣$$

Teorema 2.10

$$\varphi_n(t, \alpha, \alpha) = \left(1 - \frac{n}{2}\right) G_n(t, \alpha) + \frac{t}{2} G_{n-1}(t, \alpha) \quad \forall n \geqslant 2$$

D/.

Dado que

$$\varphi_n(t, \alpha, \alpha) = G_n(t, \alpha) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^2)^k k}{(2k+n)!} t^{2k+n}$$

y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^2)^k k}{(2k+n)!} t^{2k+n} = \frac{t}{2} G_{n-1}(t, \alpha) - \frac{n}{2} G_n(t, \alpha)$$

se obtiene fácilmente la tesis del teorema. ♣

Cálculo del residuo y error de truncación

Dada la ecuación:

$$L_4(x(t)) = \varepsilon(D^2 + \alpha^2)g(t)$$

con las consideraciones efectuadas en el Caso I, para la función $f(x(t), x'(t), t) = g(t)$ y solución:

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \alpha^2 c_n)\varphi_{n+4}(t)$$

tomemos una truncación con $m+1$ φ-funciones y $m \geqslant 4$

$$x_m(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{m-4} (c_{n+2} + \alpha^2 c_n)\varphi_{n+4}(t)$$

como

$$\begin{aligned} L_4(x_m(t)) &= \varepsilon \sum_{n=0}^{m-4} \left(c_{n+2} + \alpha^2 c_n\right) \frac{t^n}{n!} = \varepsilon \sum_{n=0}^{3} \left(c_{n+2} + \alpha^2 c_n\right) \frac{t^n}{n!} + \\ &\quad + \varepsilon \sum_{n=4}^{m-4} \left(c_{n+2} + \alpha^2 c_n\right) \left(\varphi_n(t) + 2\alpha^2 \varphi_{n+2}(t) + \alpha^4 \varphi_{n+4}(t)\right) \end{aligned}$$

entonces, el residuo $R_m(t)$ correspondiente a $x_m(t)$, vendrá dado por:

$$\begin{aligned} R_m(t) &= \varepsilon(D^2 + \alpha^2)g(t) - L_4(x_m(t)) = \\ &= \varepsilon \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+2} + \alpha^2 c_n\right) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{m-4} \left(c_{n+2} + \alpha^2 c_n\right) \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= \varepsilon \sum_{n=m-3}^{\infty} \left(c_{n+2} + \alpha^2 c_n\right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

En consecuencia el parámetro de perturbación ε es factor del residuo, por tanto, éste será pequeño con ε. Si $\varepsilon = 0$, el método de las φ-funciones integra exactamente la ecuación con sólo el término $\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x}$.

El error de truncación:

$$E_m = x(t) - x_m(t) = \varepsilon \sum_{n=m-3}^{\infty} \left(c_{n+2} + \alpha^2 c_n\right) \varphi_{n+4}(t)$$

tiene a ε como factor. Si $\varepsilon = 0$ el método de las φ-funciones no produce error de truncación.

2.2.5 Caso V $\alpha = \beta = 0$

Proposición 2.17 *Las funciones $\Psi_n(t)$, se pueden expresar del modo siguiente*

$$\Psi_n(t) = \frac{t^{4+n}}{(4+n)!}$$

D/.

Evidentemente verifican la ecuación diferencial correspondiente. ♣

Proposición 2.18 *Las funciones $\varphi_n(t)$ con $n = 0, 1, 2, 3$. se pueden expresar del modo siguiente:*

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1 \\ \varphi_1(t) &= t \\ \varphi_2(t) &= \frac{t^2}{2} \\ \varphi_3(t) &= \frac{t^3}{3!} \end{aligned}$$

D/.

Evidentemente verifican la ecuación diferencial correspondiente. ♣

Construiremos, de modo análogo al Caso I y por extensión, las φ-funciones: $\varphi_{n+4}(t) = \Psi_n(t)$ para $n \geq 0$, utilizando las funciones $\Psi_n(t)$ y $\varphi_i(t)$ con $i = 0, 1, 2, 3$ definidas para este caso, es decir con $\alpha = \beta = 0$.

La solución del PVI(3) se expresará:

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}\varphi_{n+4}(t)$$

Teorema 2.11

$$\varphi_n^{'}(t) = \varphi_{n-1}(t) \quad \forall n \geqslant 1$$

D/.

$$\varphi_n^{'}(t,0,0) = \lim_{\beta \to 0} \varphi_n^{'}(t,\alpha,\beta) = \lim_{\beta \to 0} \varphi_{n-1}(t,\alpha,\beta) = \varphi_{n-1}(t,0,0). \quad \clubsuit$$

BIBLIOTECA VIRTUAL

Teorema 2.12

$$\varphi_n(t,0,0) = G_n(t,0) \quad \forall n \geqslant 2$$

MIGUEL DE CERVANTES

D/.

Trivial.

Cálculo del residuo y error de truncación

Dada la ecuación:

$$L_4(x(t)) = \varepsilon D^2 g(t)$$

con las consideraciones efectuadas en el Caso I, para la función $f(x(t), x^{'}(t), t) = g(t)$

y solución:

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}\varphi_{n+4}(t)$$

tomemos una truncación con $m+1$ φ-funciones y $m \geqslant 4$

$$x_m(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{m-4} c_{n+2}\varphi_{n+4}(t)$$

como

$$L_4(x_m(t)) = \varepsilon \sum_{n=0}^{m-4} c_{n+2} \frac{t^n}{n!}$$

entonces, el residuo $R_m(t)$ correspondiente a $x_m(t)$, vendrá dado por:

$$\begin{aligned} R_m(t) &= \varepsilon D^2 g(t) - L_4(x_m(t)) = \\ &= \varepsilon \sum_{n=m-3}^{\infty} c_{n+2} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

En consecuencia el parámetro de perturbación ε es factor del residuo, por tanto, éste será pequeño con ε. Si $\varepsilon = 0$, el método de las φ-funciones integra exactamente la ecuación con sólo el término $\boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x}$.

El error de truncación:

$$E_m = x(t) - x_m(t) = \varepsilon \sum_{n=m-3}^{\infty} c_{n+2} \varphi_{n+4}(t)$$

tiene a ε como factor. Si $\varepsilon = 0$ el método de las φ-funciones no produce error de truncación.

2.3 Las φ-funciones como un método de integración numérica.

Supongamos que queremos aproximar la solución de un oscilador perturbado, definido mediante el siguiente PVI:

$$x'' + \alpha^2 x = \varepsilon\, f(x, x', t)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0' \quad t \in [a, b] = I$$

que verifica las condiciones expuestas en la sección 2.2 de este capítulo.

Su solución se puede expresar mediante el desarrollo:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

Sustituyendo este desarrollo en el PVI anterior, podemos establecer fórmulas de recurrencia para obtener relaciones entre los coeficientes a_n y los c_n del desarrollo de la función de perturbación: $f(x(t), x'(t), t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ a partir de las condiciones iniciales.

Efectuando la sustitución resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} \frac{t^n}{n!} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$$

e identificando coeficientes, obtenemos:

$$a_{n+2} + \alpha^2 a_n = \varepsilon \; c_n \quad \text{con } n \geq 0 \text{ y } c_n = f^{n)}(0)$$

siendo $a_0 = x_0$ y $a_1 = x_0'$.

Extendiendo la anterior recurrencia:

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0 \\ a_1 &= x_0' \\ a_2 &= -\alpha^2 a_0 + \varepsilon \; c_0 \\ a_3 &= -\alpha^2 a_1 + \varepsilon \; c_1 \\ a_{n+2} &= -\alpha^2 a_n + \varepsilon \; c_n \quad \text{con } n \geq 2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $x'' = -\alpha^2 x + \varepsilon f(x(t), x'(t), t)$ y $x''' = -\alpha^2 x' + \varepsilon f'(x(t), x'(t), t)$ se obtiene:

$$x_0'' = -\alpha^2 x_0 + \varepsilon f(x(0), x'(0), 0) = -\alpha^2 a_0 + \varepsilon \; c_0$$

$$x_0^{'''} = -\alpha^2 x_0^{'} + \varepsilon f^{'}(x(0), x^{'}(0), 0) = -\alpha^2 a_1 + \varepsilon\ c_1$$

pudiéndose presentar la recurrencia anterior como:

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0 \\ a_1 &= x_0^{'} \\ a_2 &= -\alpha^2 a_0 + \varepsilon\ c_0 = x_0^{''} \\ a_3 &= -\alpha^2 a_1 + \varepsilon\ c_1 = x_0^{'''} \\ a_{n+2} &= -\alpha^2 a_n + \varepsilon\ c_n \quad \text{con } n \geq 2 \end{aligned}$$

BIBLIOTECA VIRTUAL

Por otra parte, sabemos que es posible expresar la solución $x(t)$, como desarrollo en φ funciones, en cada uno de los cinco casos. Si $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$, obteníamos:

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \varphi_{n+4}(t)$$

o bien:

$$x(t) = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+2} + \beta^2 c_n\right) \varphi_{n+4}(t)$$

Definiendo:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1 \\ b_2 &= a_2 \\ b_3 &= a_3 \\ b_n &= \varepsilon \left(c_{n-2} + \beta^2 c_{n-4}\right) \quad \text{con } n \geq 4 \end{aligned}$$

como

$$\varepsilon c_n = a_{n+2} + \alpha^2 a_n \quad \text{con } n \geq 2$$

entonces

$$b_n = a_n + \alpha^2 a_{n-2} + \beta^2 \left(a_{n-2} + \alpha^2 a_{n-4} \right) \quad \text{con } n \geq 4$$

y por tanto

$$b_n = a_n + \left(\alpha^2 + \beta^2 \right) a_{n-2} + \alpha^2 \beta^2 a_{n-4} \quad \text{con } n \geq 4$$

obteniéndose:

$$x(t) = b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3 + \sum_{n=4}^{\infty} b_n \varphi_n(t)$$

o bien:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(t)$$

que prescidiendo de truncaciones, es análoga a la expresión obtenida para desarrollos en G - funciones.

El hecho de que sólo se exponga con detalle el caso I, es debido a que los ejemplos que ilustran este método se refieren a él. En los demás casos se utilizará la expresión correspondiente para obtener el desarrollo de la solución $x(t)$ en términos de las φ - funciones, definiendo primero una recurrencia entre los coeficientes a_n y posteriormente otra entre los coeficientes b_n a partir de la anterior.

2.4 Ejemplos

En esta sección aplicaremos la técnica de las φ - funciones a la integración numérica de dos problemas concretos, para ilustrar el comportamiento del método y su modo de empleo.

2.4.1 Ejemplo 1

Sea el PVI:

$$x'' + \alpha^2 x = \varepsilon\, x^2$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

con integral primera, para $\alpha = 1$:

$$F\left(x, x'\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + x'^{\,2}\right) - \frac{\varepsilon}{3}x^3$$

Escogiendo un paso h y evaluando las φ - funciones en h, como $f(x, x', t) = x^2(t)$, por un proceso análogo al seguido en el ejemplo uno del capítulo uno se obtiene:

$$\begin{aligned}
a_0 &= x_0 \\
a_1 &= x_0' \\
a_2 &= -\alpha^2 a_0 + \varepsilon\ c_0 = -\alpha^2 a_0 + \varepsilon\ x_0^2 \\
a_3 &= -\alpha^2 a_1 + \varepsilon\ c_1 = -\alpha^2 a_1 + 2\varepsilon\ x_0\ x_0' \\
a_{n+2} &= -\alpha^2 a_n + \varepsilon \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j a_{n-j} \quad \text{con } n \geq 2
\end{aligned}$$

y definiendo la sucesión auxiliar de coeficientes:

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0 \\
b_1 &= a_1 \\
b_2 &= a_2 \\
b_3 &= a_3 \\
b_n &= a_n + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) a_{n-2} + \alpha^2 \beta^2 a_{n-4} \quad \text{con } n \geq 4
\end{aligned}$$

como:

$$\begin{aligned}
x(t) &= b_0\varphi_0(t) + b_1\varphi_1(t) + b_2\varphi_2(t) + b_3\varphi_3(t) + \sum_{n=4}^{\infty} b_n\varphi_n(t) \\
x^{'}(t) &= b_0\varphi_0^{'}(t) + b_1\varphi_0(t) + b_2\varphi_2^{'}(t) + b_3\varphi_2(t) + \sum_{n=4}^{\infty} b_n\varphi_{n-1}(t) \\
x^{''}(t) &= b_0\varphi_0^{''}(t) + b_1\varphi_0^{'}(t) + b_2\varphi_2^{''}(t) + b_3\varphi_2^{'}(t) + \sum_{n=4}^{\infty} b_n\varphi_{n-2}(t) \\
x^{'''}(t) &= b_0\varphi_0^{'''}(t) + b_1\varphi_0^{''}(t) + b_2\varphi_2^{'''}(t) + b_3\varphi_2^{''}(t) + b_4\varphi_2^{'}(t) + \sum_{n=5}^{\infty} b_n\varphi_{n-3}(t)
\end{aligned}$$

siendo:

$$\varphi_0^{'}(t) = -\alpha^2\beta^2\varphi_3(t) \quad \varphi_2^{'}(t) = \varphi_1(t) - \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\varphi_3(t)$$

$$\varphi_0^{''}(t) = -\alpha^2\beta^2\varphi_2(t) \quad \varphi_2^{''}(t) = \varphi_0(t) - \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\varphi_2(t)$$

$$\varphi_0^{'''}(t) = -\alpha^2\beta^2\varphi_2^{'}(t) \quad \varphi_2^{'''}(t) = \varphi_0^{'}(t) - \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\varphi_2^{'}(t)$$

si denotamos por x_1, $x_1^{'}$, $x_1^{''}$ y $x_1^{'''}$ las aproximaciones a $x(h)$, $x^{'}(h)$, $x^{''}(h)$ y $x^{'''}(h)$ respectivamente, la aproximación a la solución, utilizando $(p+1)$ φ - funciones, vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sum_{n=0}^{p} b_n\varphi_n(h) \\
x_1^{'} &= b_0\varphi_0^{'}(h) + b_1\varphi_0(h) + b_2\varphi_2^{'}(h) + b_3\varphi_2(h) + \sum_{n=4}^{p} b_n\varphi_{n-1}(h) \\
x_1^{''} &= b_0\varphi_0^{''}(h) + b_1\varphi_0^{'}(h) + b_2\varphi_2^{''}(h) + b_3\varphi_2^{'}(h) + \sum_{n=4}^{p} b_n\varphi_{n-2}(h) \\
x_1^{'''} &= b_0\varphi_0^{'''}(h) + b_1\varphi_0^{''}(h) + b_2\varphi_2^{'''}(h) + b_3\varphi_2^{''}(h) + b_4\varphi_2^{'}(h) + \sum_{n=5}^{p} b_n\varphi_{n-3}(h)
\end{aligned}$$

Para efectuar un segundo paso de integración se toman como valores iniciales: x_1, $x_1^{'}$, $x_1^{''}$, $x_1^{'''}$, y se realiza el mismo proceso,no siendo necesario calcular el valor de las φ - funciones por tenerlo del primer paso.

Resumiendo, una vez obtenido el valor de las φ - funciones, cada paso se completa mediante el algoritmo siguiente:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= x_i \\
a_1 &= x_i^{'} \\
a_2 &= -\alpha^2 a_0 + \varepsilon\ x_i^{2} \\
a_3 &= -\alpha^2 a_1 + 2\varepsilon\ x_i\ x_i^{'} \\
a_{n+2} &= -\alpha^2 a_n + \varepsilon \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j a_{n-j} \quad \text{con } 2 \leq n \leq p-2 \\
b_0 &= a_0 \\
b_1 &= a_1 \\
b_2 &= a_2; \quad b_3 = a_3 \\
b_n &= a_n + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) a_{n-2} + \alpha^2\beta^2 a_{n-4} \quad \text{con } 4 \leq n \leq p \\
x_{i+1} &= \sum_{n=0}^{p} b_n \varphi_n(h) \\
x_{i+1}^{'} &= b_0\varphi_0^{'}(h) + b_1\varphi_0(h) + b_2\varphi_2^{'}(h) + b_3\varphi_2(h) + \sum_{n=4}^{p} b_n\varphi_{n-1}(h) \\
x_{i+1}^{''} &= b_0\varphi_0^{''}(h) + b_1\varphi_0^{'}(h) + b_2\varphi_2^{''}(h) + b_3\varphi_2^{'}(h) + \sum_{n=4}^{p} b_n\varphi_{n-2}(h) \\
x_{i+1}^{'''} &= b_0\varphi_0^{'''}(h) + b_1\varphi_0^{''}(h) + b_2\varphi_2^{'''}(h) + b_3\varphi_2^{''}(h) + b_4\varphi_2^{'}(h) + \sum_{n=5}^{p} b_n\varphi_{n-3}(h)
\end{aligned}
$$

En la figura n^o 2.6 se muestra el resultado obtenido al comparar el método de las φ - funciones para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ con un método LSODE de $tol = 10^{-16}$. La integración se realizó con 1000 iteraciones, paso $h = 0'1$ y $\varepsilon = 10^{-3}$.

En la figura n^o 2.7 se muestra el resultado obtenido al comparar el método de las φ - funciones para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ con un método LSODE de $tol = 10^{-16}$. La

integración se realizó con 250 iteraciones, paso $h = 0'4$ y $\varepsilon = 10^{-3}$.

Como puede observarse, en las figuras n ^{o} 2.8 y n ^{o} 2.9, para $\varepsilon = 10^{-2}$, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}, el método de las φ - funciones presenta un mejor comportamiento que el método de las G - funciones pues permite ganar un orden de ε^2 con respecto a éstas, aunque sigue presentando la dificultad de la adaptación del método a cada problema particular.

2.4.2 Ejemplo 2

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

La ventaja del método de las φ - funciones, se hace patente cuando podemos elegir un β tal que $D^2 + \beta^2$ anule la perturbación, pues basta con cuatro φ - funciones para integrar exactamente el problema homogéneo, como se puede observar a continuación, al intentar resolver el PVI siguiente:

$$x'' + \alpha^2 x = \varepsilon \cos(100t)$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

cuya solución exacta es, para $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{\varepsilon}{9999}\cos(100t) + \left(\frac{\varepsilon}{9999} + 1\right)\cos(t) \\ x'(t) &= \frac{100\varepsilon}{9999}\sin(100t) - \left(\frac{\varepsilon}{9999} + 1\right)\sin(t) \end{aligned}$$

Tomando $\beta = 100$ y razonando análogamente al ejemplo anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0 \\ a_1 &= x_0' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \varepsilon - \alpha^2 a_0 = x_0^{''} \\
a_3 &= -\alpha^2 a_1 = x_0^{'''} \\
a_{n+2} &= -\alpha^2 a_n + \varepsilon\ 100^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{con } n \geq 2
\end{aligned}
$$

definiendo la sucesión auxiliar de coeficientes:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0 \\
b_1 &= a_1 \\
b_2 &= a_2 \\
b_3 &= a_3 \\
b_n &= a_n + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) a_{n-2} + \alpha^2 \beta^2 a_{n-4} \quad \text{con } n \geq 4
\end{aligned}
$$

si denotamos por x_1, $x_1^{'}$, $x_1^{''}$ y $x_1^{'''}$ las aproximaciones a $x(h)$, $x^{'}(h)$, $x^{''}(h)$ y $x^{'''}(h)$ respectivamente, la aproximación a la solución, utilizando $(p+1)$ φ - funciones, vendrá dada por:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sum_{n=0}^{p} b_n \varphi_n(h) \\
x_1^{'} &= b_0 \varphi_0^{'}(h) + b_1 \varphi_0(h) + b_2 \varphi_2^{'}(h) + b_3 \varphi_2(h) + \sum_{n=4}^{p} b_n \varphi_{n-1}(h) \\
x_1^{''} &= b_0 \varphi_0^{''}(h) + b_1 \varphi_0^{'}(h) + b_2 \varphi_2^{''}(h) + b_3 \varphi_2^{'}(h) + \sum_{n=4}^{p} b_n \varphi_{n-2}(h) \\
x_1^{'''} &= b_0 \varphi_0^{'''}(h) + b_1 \varphi_0^{''}(h) + b_2 \varphi_2^{'''}(h) + b_3 \varphi_2^{''}(h) + b_4 \varphi_2^{'}(h) + \sum_{n=5}^{p} b_n \varphi_{n-3}(h)
\end{aligned}
$$

El paso siguiente es resolver el PVI:

$$
\begin{aligned}
x^{''} + \alpha^2 x &= \varepsilon \cos(100t) \\
x(h) = x_1, \quad x^{'}(h) &= x_1^{'}
\end{aligned}
$$

o el PVI:

$$\begin{aligned} L_4(x) &= (D^2+\beta^2)(D^2+\alpha^2)x(t) = \varepsilon(D^2+\beta^2)\cos(100t) \\ x(h) &= x_1, \quad x^{'}(h) = x_1^{'}, \quad x^{''}(h) = x_1^{''}, \quad x^{'''}(h) = x_1^{'''} \end{aligned}$$

que presenta la dificultad de que al fijar un paso h y calcular el valor de la aproximación a $x(h)$, $x^{'}(h)$, $x^{''}(h)$ y $x^{'''}(h)$, no se puede avanzar un segundo paso ya que la función de perturbación depende explícitamente del tiempo. Con el fin de evitar este problema, se procederá del modo siguiente:

Una vez ya calculadas las aproximaciones a los valores de $x(h)$, $x^{'}(h)$, $x^{''}(h)$ y $x^{'''}(h)$ que se han notado como x_1, $x_1^{'}$, $x_1^{''}$ y $x_1^{'''}$, respectivamente, se efectúa un cambio de variable independiente $\tau = t - h$ y se considera $x(t) = (x^* \circ \tau)(t)$. Al sustituir $x(t)$ por $x^*(\tau)$ en el PVI resulta:

$$\begin{aligned} L_4(x^*) &= (D^2+\beta^2)(D^2+\alpha^2)x^*(\tau) = \varepsilon(D^2+\beta^2)\cos(100(\tau+h)) \\ x^*(0) &= x_1, \quad x^{*'}(0) = x_1^{'}, \quad x^{*''}(0) = x_1^{''}, \quad x^{*'''}(0) = x_1^{'''} \end{aligned}$$

lo que permite reinicializar el método y obtener las recurrencias:

$$\begin{aligned} a_0 &= x^*(0) = x_1 \\ a_1 &= x^{*'}(0) = x_1^{'} \\ a_2 &= x^{*''}(0) = -\alpha^2 x^*(0) + \varepsilon\ f\left(x^*(0), x^{*'}(0), h\right) = -\alpha^2 x_1 + \varepsilon\cos(100h) \\ a_3 &= x^{*'''}(0) = -x_1^{'} - 100\varepsilon\sin(100h) \\ a_{n+2} &= -\alpha^2 a_n + 100^n \varepsilon\cos\left(100h + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{con } 2 \le n \le p-2 \\ b_0 &= a_0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_1 \\
b_2 &= a_2; \quad b_3 = a_3 \\
b_n &= a_n + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) a_{n-2} + \alpha^2\beta^2 a_{n-4} \quad \text{con } 4 \leq n \leq p \\
x_2 &= \sum_{n=0}^{p} b_n \varphi_n(h) \\
x_2^{'} &= b_0\varphi_0^{'}(h) + b_1\varphi_0(h) + b_2\varphi_2^{'}(h) + b_3\varphi_2(h) + \sum_{n=4}^{p} b_n\varphi_{n-1}(h) \\
x_2^{''} &= b_0\varphi_0^{''}(h) + b_1\varphi_0^{'}(h) + b_2\varphi_2^{''}(h) + b_3\varphi_2^{'}(h) + \sum_{n=4}^{p} b_n\varphi_{n-2}(h) \\
x_2^{'''} &= b_0\varphi_0^{'''}(h) + b_1\varphi_0^{''}(h) + b_2\varphi_2^{'''}(h) + b_3\varphi_2^{''}(h) + b_4\varphi_2^{'}(h) + \sum_{n=5}^{p} b_n\varphi_{n-3}(h)
\end{aligned}
$$

Una vez ya calculadas las aproximaciones a los valores de $x(2h)$, $x^{'}(2h)$, $x^{''}(2h)$ y $x^{'''}(2h)$ que se han notado como x_2, $x_2^{'}$, $x_2^{''}$ y $x_2^{'''}$, respectivamente, se efectúa un cambio de variable independiente $\tau = t - h$ y se considera $x(t) = (x^* \circ \tau)(t)$. Al sustituir $x(t)$ por $x^*(\tau)$ en el PVI resulta:

$$
\begin{aligned}
L_4(x^*) &= (D^2 + \beta^2)(D^2 + \alpha^2)x^*(\tau) = \varepsilon(D^2 + \beta^2)\cos(100(\tau + h)) \\
x^*(0) &= x_2, \quad x^{*'}(0) = x_2^{'}, \quad x^{*''}(0) = x_2^{''}, \quad x^{*'''}(0) = x_2^{'''}
\end{aligned}
$$

lo que permite reinicializar el método.

En la figura n^o 2.10 se muestra el resultado obtenido al comparar el método de las φ - funciones para $\alpha = 1$ y $\beta = 100$ con un método LSODE de $tol = 10^{-16}$. La integración se realizó con 1000 iteraciones, paso $h = 0'8$ y $\varepsilon = 10^{-3}$.

En este ejemplo, al tomar $\beta = 100$, se consigue anular la función de perturbación y el método integra exactamente el problema homogéneo resultante, con paso $h = 0'8$ o superior y con tan solo cuatro φ - funciones. Para poder observar la precisión se

han tomado 40 y 100 dígitos y aunque se pueden calcular todas las aproximaciones, en la gráfica de errores se presenta el problema, de que en el cálculo del log (error), aparecen singularidades, debidas a la precisión del método, que impiden completar la gráfica. Figura n^o 2.11.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

2.5 Figuras Capítulo 2

2.5.1 Ejemplo 1

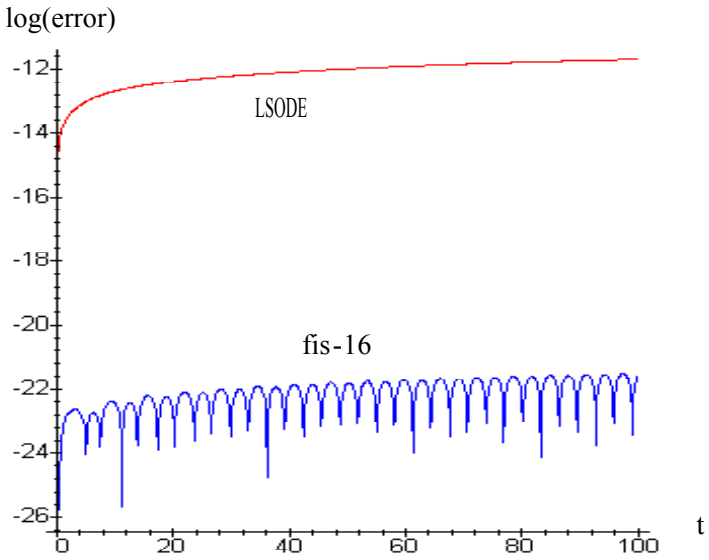


Figura nº 2.6. $x'' + \alpha^2 x = \varepsilon\, x^2$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $h = 0.1$

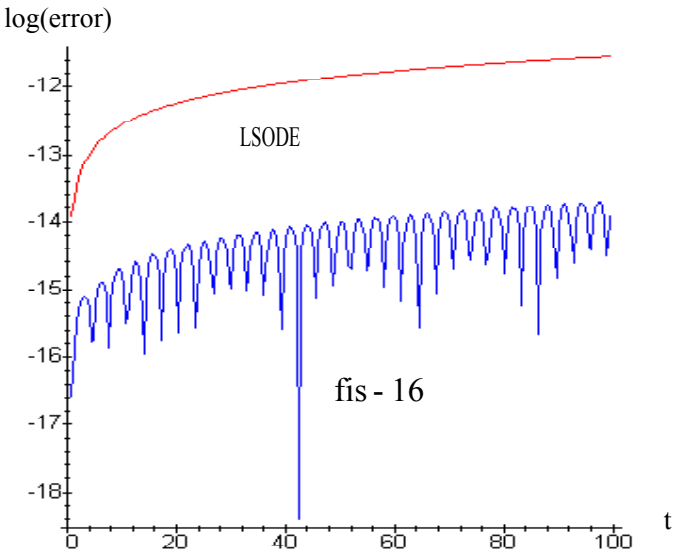


Figura nº 2.7. $x'' + \alpha^2 x = \varepsilon\, x^2$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $h = 0.4$

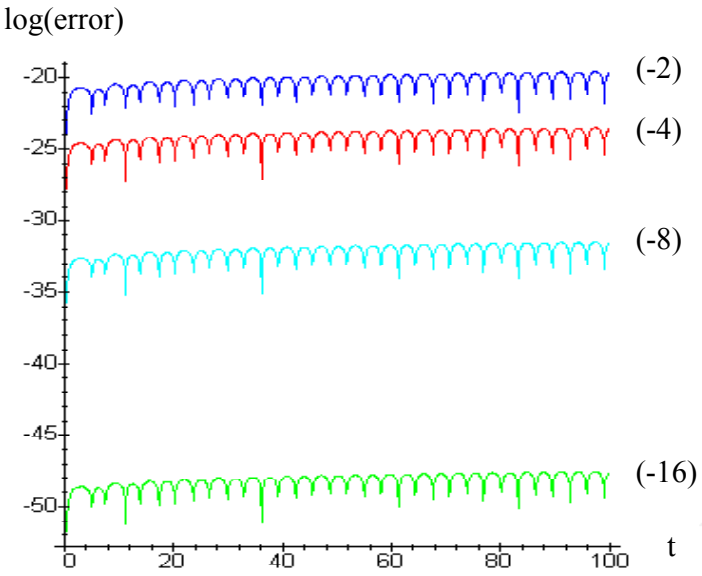


Figura n^o 2.8. Método de φ – funciones. (Entre paréntesis $\log_{10}\varepsilon$)

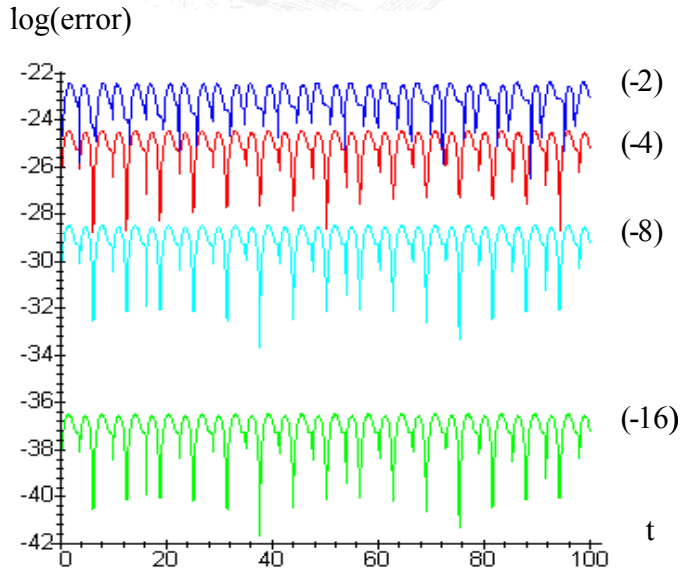


Figura n^o 2.9. Método de G – funciones. (Entre paréntesis $\log_{10}\varepsilon$)

2.5.2 Ejemplo 2

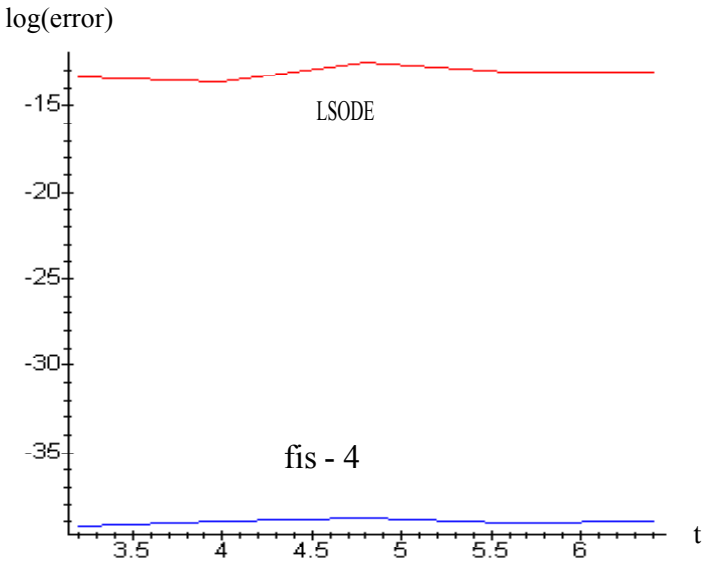


Figura nº 2.10. $x'' + \alpha^2 x = \varepsilon \cos(100t)$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $40_{\text{díg}}$

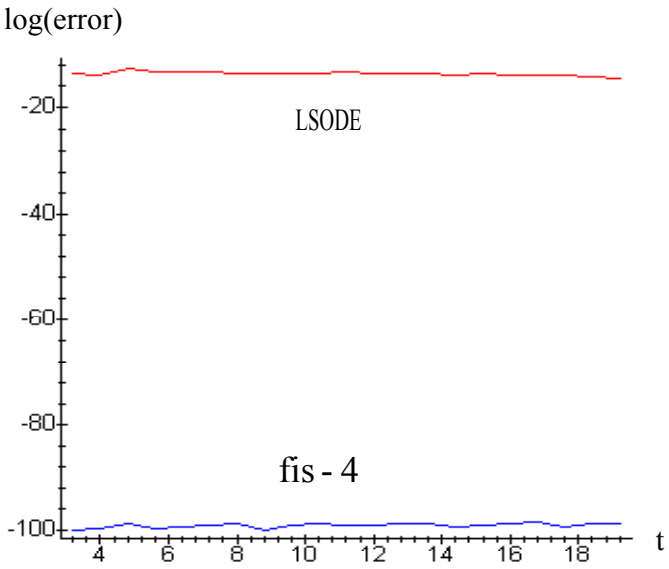


Figura nº 2.11. $x'' + \alpha^2 x = \varepsilon \cos(100t)$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $10^2_{\text{díg}}$

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Capítulo 3

Integración numérica de osciladores perturbados: métodos numéricos multipaso

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

3.1 Introducción

En el capítulo anterior, se han definido cinco grupos distintos de φ - funciones, según los valores posibles de las frecuencias α y β. A continuación, se presentarán los elementos básicos para elaborar un verdadero esquema multipaso, utilizando las φ - funciones. Habrá pues, cinco esquemas distintos dependiendo de los valores de las frecuencias que aparezcan.

En los métodos numéricos propuestos todavía está implicada una serie cuyos coeficientes son las derivadas de la función de pertubación, lo que dificulta, aun truncándola, su implementación en un computador para expresiones complicadas de dicha

función.

Por supuesto en las aplicaciones de estos métodos especiales a problemas de dinámica orbital la expresión de la perturbación se hace sumamente complicada. Este problema se resolverá en el capítulo siguiente de esta memoria.

3.2 Métodos numéricos multipaso

Debido a la símetría de las φ-funciones y sus derivadas, se pueden generar dos familias de métodos, según los distintos valores de α y β.

3.2.1 Caso I $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$

Consideremos la solución del PVI(3)

$$x(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon S(t)$$

que evaluamos en h y en $-h$, obteniéndose:

$$x(h) + x(-h) = (\boldsymbol{\nu}(h) + \boldsymbol{\nu}(-h))\, \mathbf{x} + \varepsilon\, (S(h) + S(-h))$$

como $\varphi_{2n}(t)$ es par, para $n = 0, 1, ...$ y $\varphi_{2n-1}(t)$ es impar para $n = 1, 2, ...$, resulta:

$$\begin{aligned} S(h)+S(-h) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k} + \beta^2 c_{2k-2}) \left(\varphi_{2k+2}(h) + \varphi_{2k+2}(-h)\right) = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k} + \beta^2 c_{2k-2}) \varphi_{2k+2}(h) \end{aligned}$$

y

$$(\boldsymbol{\nu}(h) + \boldsymbol{\nu}(-h))\, \mathbf{x} = 2\varphi_0(h) x_0 + 2\varphi_2(h) x_0''$$

dado que

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$$

de la ecuación

$$\left(D^2 + \alpha^2\right) x(t) = \varepsilon g(t)$$

se obtiene

$$x_0'' = -\alpha^2 x_0 + \varepsilon c_0$$

por tanto:

$$\boldsymbol{\nu}(h) + \boldsymbol{\nu}(-h) = 2\left(\varphi_0(h) - \alpha^2 \varphi_2(h)\right) x_0 + 2\varepsilon c_0 \varphi_2(h)$$

sustituyendo $\varphi_0(h)$ y $\varphi_2(h)$ por sus expresiones trigonométricas

$$\boldsymbol{\nu}(h) + \boldsymbol{\nu}(-h) = 2x_0 \cos(\alpha h) + 2\varepsilon c_0 \varphi_2(h)$$

Luego

$$x(h) + x(-h) = 2x_0 \cos(\alpha h) + 2\varepsilon c_0 \varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k} + \beta^2 c_{2k-2}) \varphi_{2k+2}(h)$$

Razonando análogamente para las derivadas

$$x'(h) - x'(-h) = \left(\boldsymbol{\nu}'(h) - \boldsymbol{\nu}'(-h)\right) \mathbf{x} + \varepsilon \left(S'(h) - S'(-h)\right)$$

como $\varphi_{2n}'(t)$ es impar, para $n = 0, 1, ...$ y $\varphi_{2n-1}'(t)$ es par para $n = 1, 2, ...$, resulta:

$$S'(h) - S'(-h) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k} + \beta^2 c_{2k-2}) \varphi_{2k+2}'(h)$$

y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}'(h) - \boldsymbol{\nu}'(-h) &= 2\varphi_0'(h) x_0 + 2\varphi_2'(h) x_0'' = \\ &= 2\left(\varphi_0'(h) - \alpha^2 \varphi_2'(h)\right) x_0 + 2\varepsilon c_0 \varphi_2'(h) = \\ &= -2\alpha x_0 \sin(\alpha h) + 2\varepsilon c_0 \varphi_2'(h) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} x^{'}(h) - x^{'}(-h) &= -2\alpha x_0 \sin(\alpha h) + 2\varepsilon c_0 \varphi_2^{'}(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k} + \beta^2 c_{2k-2}) \varphi_{2k+2}^{'}(h) = \\ &= -2\alpha x_0 \sin(\alpha h) + 2\varepsilon c_0 \varphi_2^{'}(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k} + \beta^2 c_{2k-2}) \varphi_{2k+1}(h) \end{aligned}$$

Obteniendo, de esta manera, las expresiones que se utilizarán para el primer tipo de métodos.

De igual forma, calculando $x(h)+x(-h)$ y calculando $x^{'}(h)+x^{'}(-h)$ obtendríamos las expresiones:

$$\begin{aligned} x(h) - x(-h) &= 2\frac{x_0^{'}}{\alpha} \sin(\alpha h) + 2\varepsilon c_1 \varphi_3(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k+1} + \beta^2 c_{2k-1}) \varphi_{2k+3}(h) \\ x^{'}(h) + x^{'}(-h) &= 2x_0^{'} \cos(\alpha h) + 2\varepsilon c_1 \varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k+1} + \beta^2 c_{2k-1}) \varphi_{2k+2}(h) \end{aligned}$$

que emplearemos para el segundo tipo de métodos.

Introduciendo los métodos

Supongamos que tenemos calculada una aproximación de la solución y de sus derivadas en el punto $t = nh$, llamemos a estas aproximaciones x_n, $x_n^{'}$, $x_n^{''}$ y $x_n^{'''}$. Lo que interesa ahora es obtener una aproximación a la solución de

$$\begin{aligned} L_4 x &= \varepsilon f(x, x^{'}, t) \\ x(nh) &= x_n \\ x^{'}(nh) &= x_n^{'} \\ x^{''}(nh) &= x_n^{''} \\ x^{'''}(nh) &= x_n^{'''} \end{aligned}$$

en el punto $(n+1)h$. Para ello efectuamos el cambio de variable independiente $t = \tau + nh$ en la anterior ecuación, transformándose en

$$\begin{aligned} L_4 x &= \varepsilon f(x, x', \tau + nh) \\ x(0) &= x_n \\ x'(0) &= x'_n \\ x''(0) &= x''_n \\ x'''(0) &= x'''_n \end{aligned}$$

con lo que ya estamos en el mismo caso que al principio, teniendo en cuenta que

$$f(x, x', \tau + nh) = g(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{\tau^k}{k!}$$

donde

$$b_k = g^{k)}(nh)$$

Método I La aproximación a la solución y a su derivada en el punto $(n+1)h$ vendría dada por

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n \cos(\alpha h) + 2\varepsilon b_0 \varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k} + \beta^2 b_{2k-2}) \varphi_{2k+2}(h) \\ x'_{n+1} &= x'_{n-1} - 2\alpha x_n \sin(\alpha h) + 2\varepsilon b_0 \varphi'_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k} + \beta^2 b_{2k-2}) \varphi_{2k+1}(h) \end{aligned}$$

Método II La aproximación a la solución y a su derivada en el punto $(n+1)h$ vendría dada por

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x'_n}{\alpha} \sin(\alpha h) + 2\varepsilon b_1 \varphi_3(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k+1} + \beta^2 b_{2k-1}) \varphi_{2k+3}(h) \\ x'_{n+1} &= -x'_{n-1} + 2x'_n \cos(\alpha h) + 2\varepsilon b_1 \varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k+1} + \beta^2 b_{2k-1}) \varphi_{2k+2}(h) \end{aligned}$$

3.2.2 Caso II $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$

Razonando de modo análogo al Caso I, con las $\varphi's$ correspondientes obtenemos:

$$x(h) + x(-h) = 2x_0 \cos(\alpha h) + 2\varepsilon c_0 \varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}\varphi_{2k+2}(h)$$

y para las derivadas:

$$x^{'}(h) - x^{'}(-h) = -2\alpha x_0 \sin(\alpha h) + 2\varepsilon c_0 \varphi_2^{'}(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}\varphi_{2k+1}(h)$$

De igual forma, calculando $x(h)+x(-h)$ y calculando $x^{'}(h)+x^{'}(-h)$ obtendríamos las expresiones:

$$\begin{aligned} x(h) - x(-h) &= 2\frac{x_0^{'}}{\alpha}\sin(\alpha h) + 2\varepsilon c_1 \varphi_3(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1}\varphi_{2k+3}(h) \\ x^{'}(h) + x^{'}(-h) &= 2x_0^{'}\cos(\alpha h) + 2\varepsilon c_1 \varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1}\varphi_{2k+2}(h) \end{aligned}$$

Introduciendo los métodos

Procediendo de igual manera que en el Caso I, la aproximación a la solución y a su derivada en el punto $(n+1)h$ vendría dada por

Método I

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n \cos(\alpha h) + 2\varepsilon b_0 \varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}\varphi_{2k+2}(h) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} - 2\alpha x_n \sin(\alpha h) + 2\varepsilon b_0 \varphi_2^{'}(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}\varphi_{2k+1}(h) \end{aligned}$$

Método II

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x_n^{'}}{\alpha}\sin(\alpha h) + 2\varepsilon b_1 \varphi_3(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k+1}\varphi_{2k+3}(h) \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'}\cos(\alpha h) + 2\varepsilon b_1 \varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k+1}\varphi_{2k+2}(h) \end{aligned}$$

3.2.3 Caso III $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$

Razonando de modo análogo al Caso I, con las $\varphi's$ correspondientes obtenemos:

$$x(h) + x(-h) = 2x_0 + 2\varepsilon c_0\varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k} + \beta^2 c_{2k-2})\varphi_{2k+2}(h)$$

y para las derivadas:

$$x^{'}(h) - x^{'}(-h) = 2\varepsilon c_0\varphi_2^{'}(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k} + \beta^2 c_{2k-2})\varphi_{2k+1}(h)$$

De igual forma, calculando $x(h)+x(-h)$ y calculando $x^{'}(h)+x^{'}(-h)$ obtendríamos las expresiones:

$$\begin{aligned} x(h) - x(-h) &= 2hx_0^{'} + 2\varepsilon c_1\varphi_3(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k+1} + \beta^2 c_{2k-1})\varphi_{2k+3}(h) \\ x^{'}(h) + x^{'}(-h) &= 2x_0^{'} + 2\varepsilon c_1\varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k+1} + \beta^2 c_{2k-1})\varphi_{2k+2}(h) \end{aligned}$$

Introduciendo los métodos

Procediendo de igual manera que en el Caso I, la aproximación a la solución y a su derivada en el punto $(n+1)h$ vendría dada por

Método I

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n + 2\varepsilon b_0\varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k} + \beta^2 b_{2k-2})\varphi_{2k+2}(h) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} + 2\varepsilon b_0\varphi_2^{'}(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k} + \beta^2 b_{2k-2})\varphi_{2k+1}(h) \end{aligned}$$

Método II

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2hx_n^{'} + 2\varepsilon b_1\varphi_3(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k+1} + \beta^2 b_{2k-1})\varphi_{2k+3}(h) \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'} + 2\varepsilon b_1\varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k+1} + \beta^2 b_{2k-1})\varphi_{2k+2}(h) \end{aligned}$$

3.2.4 Caso IV $\alpha = \beta \neq 0$

Razonando de modo análogo al Caso I, con las $\varphi' s$ correspondientes obtenemos:

$$x(h) + x(-h) = 2x_0 \cos(\alpha h) + 2\varepsilon c_0 \varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k} + \alpha^2 c_{2k-2}) \varphi_{2k+2}(h)$$

y para las derivadas:

$$x^{'}(h) - x^{'}(-h) = -2\alpha x_0 \sin(\alpha h) + 2\varepsilon c_0 \varphi_2^{'}(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k} + \alpha^2 c_{2k-2}) \varphi_{2k+1}(h)$$

De igual forma, calculando $x(h)+x(-h)$ y calculando $x^{'}(h)+x^{'}(-h)$ obtendríamos las expresiones:

$$\begin{aligned} x(h) - x(-h) &= 2\frac{x_0^{'}}{\alpha} \sin(\alpha h) + 2\varepsilon c_1 \varphi_3(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k+1} + \alpha^2 c_{2k-1}) \varphi_{2k+3}(h) \\ x^{'}(h) + x^{'}(-h) &= 2x_0^{'} \cos(\alpha h) + 2\varepsilon c_1 \varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k+1} + \alpha^2 c_{2k-1}) \varphi_{2k+2}(h) \end{aligned}$$

Introduciendo los métodos

Procediendo de igual manera que en el Caso I, la aproximación a la solución y a su derivada en el punto $(n+1)h$ vendría dada por

Método I

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n \cos(\alpha h) + 2\varepsilon b_0 \varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k} + \alpha^2 b_{2k-2}) \varphi_{2k+2}(h) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} - 2\alpha x_n \sin(\alpha h) + 2\varepsilon b_0 \varphi_2^{'}(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k} + \alpha^2 b_{2k-2}) \varphi_{2k+1}(h) \end{aligned}$$

Método II

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x_n^{'}}{\alpha} \sin(\alpha h) + 2\varepsilon b_1 \varphi_3(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k+1} + \alpha^2 b_{2k-1}) \varphi_{2k+3}(h) \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'} \cos(\alpha h) + 2\varepsilon b_1 \varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_{2k+1} + \alpha^2 b_{2k-1}) \varphi_{2k+2}(h) \end{aligned}$$

3.2.5 Caso V $\alpha = \beta = 0$

Razonando de modo análogo al Caso I, con las $\varphi's$ correspondientes obtenemos:

$$x(h) + x(-h) = 2x_0 + 2\varepsilon c_0\varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}\varphi_{2k+2}(h)$$

y para las derivadas:

$$x^{'}(h) - x^{'}(-h) = 2\varepsilon c_0\varphi_2^{'}(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}\varphi_{2k+1}(h)$$

De igual forma, calculando $x(h)+x(-h)$ y calculando $x^{'}(h)+x^{'}(-h)$ obtendríamos las expresiones:

$$\begin{aligned} x(h) - x(-h) &= 2hx_0^{'} + 2\varepsilon c_1\varphi_3(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1}\varphi_{2k+3}(h) \\ x^{'}(h) + x^{'}(-h) &= 2x_0^{'} + 2\varepsilon c_1\varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1}\varphi_{2k+2}(h) \end{aligned}$$

Introduciendo los métodos

Procediendo de igual manera que en el Caso I, la aproximación a la solución y a su derivada en el punto $(n+1)h$ vendría dada por

Método I

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n + 2\varepsilon b_0\varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}\varphi_{2k+2}(h) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} + 2\varepsilon b_0\varphi_2^{'}(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}\varphi_{2k+1}(h) \end{aligned}$$

Método II

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2hx_n^{'} + 2\varepsilon b_1\varphi_3(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k+1}\varphi_{2k+3}(h) \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'} + 2\varepsilon b_1\varphi_2(h) + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k+1}\varphi_{2k+2}(h) \end{aligned}$$

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Capítulo 4

Implementación de los métodos multipaso para la integración de osciladores perturbados

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

4.1 Introducción

Los esquemas multipaso expuestos en el capítulo anterior, para la integración numérica de osciladores perturbados, presentaban la dificultad de venir expresados en términos de la función de perturbación y sus derivadas en $t = nh$. Trataremos de salvar esta complicación en, el caso explícito, sustituyendo dichas derivadas por expresiones en las que aparecen diferencias divididas junto con unos coeficientes $d_{i,j}$, [78], elementos de una matriz A_p^{-t}, de los que no conocemos una relación de recurrencia entre ellos. Análogamente para el caso implícito, la matriz de la que extraeremos los coeficientes $d_{i,j}$ la denotaremos B_p^{-t}.

Una vez conocidas las matrices A_p^{-t} y B_p^{-t}, estableceremos una forma de cálculo recurrente, a través de la matriz $S_{p,n}$, para el caso explícito, y $S_{p,n+1}$, para el caso implícito. El estudio de los polinomios simétricos y su relación con las diferencias divididas, nos permitirá el cálculo de las matrices $S_{p,n}$, y $S_{p,n+1}$. [75].

Llegado a este punto, definiremos para cada caso, los métodos de doble frecuencia (MDF): MDFpE, MDFpI, MDFpPC, que en su forma recurrente, se pueden implementar en un computador.

Por último resolveremos varios ejemplos numéricos, mediante los códigos anteriores y los compararemos con otros métodos conocidos

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

4.2 Estableciendo el método multipaso explícito MDFpE para osciladores perturbados

Sea $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, una función real de variable real, representaremos por $g[t_n, ..., t_{n-k}]$ con $k = 0, 1, ..., n$ a la diferencia dividida de g de orden k en los argumentos $t_n, ..., t_{n-k}$ de la variable $t \in [a, b]$ [50]. Consideramos que $g(t)$ es analítica para simplificar la exposición.

Para construir un método multipaso explícito de p pasos utilizamos hasta las diferencias divididas de orden p-1 de la función $g(t)$ en los argumentos $t_n, ..., t_{n-p+1}$

Definición 4.1 *Sea*

$$P_k(t) = \frac{t^k}{k!}$$

y

$$H_i = t_n - t_{n-i}$$

Lema 4.1 *Las diferencias divididas de $g(t)$ satisfacen la igualdad*

$$g[t_n, ..., t_{n-i}] = \sum_{j=0}^{\infty} P_j[0, -H_1, ..., -H_i] \cdot g^{j)}(t_n)$$

D/.

Los desarrollos en t_n de $g(t_{n-1}), ..., g(t_{n-i})$ nos permite escribir

$$g[t_n, ..., t_{n-i}] = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot g^{j)}(t_n)$$

donde las constantes c_j dependen sólo de $H_i = t_n - t_{n-i}$. Para calcular c_j consideramos el punto $t_n = 0$ y $g = P_k$, teniendo en cuenta que $P_k^{j)}(0) = \delta_{k,j}$, siendo $\delta_{k,j}$ la delta de Kronecker. [78]. ♣

Veamos algunos casos:

$$\begin{aligned}
g[t_n] &= g(t_n) \\
g[t_n, t_{n-1}] &= \frac{g[t_n] - g[t_{n-1}]}{t_n - t_{n-1}} = \\
&= \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \left(g(t_n) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{j)}(t_n)}{j!} \cdot (t_{n-1} - t_n)^j \right) = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-(t_{n-1} - t_n)^j}{(t_n - t_{n-1})j!} \cdot g^{j)}(t_n) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot g^{j)}(t_n)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0 \\
c_j &= \frac{-(t_{n-1} - t_n)^j}{(t_n - t_{n-1})j!} \text{ con } j = 1, 2, ...
\end{aligned}$$

comprobemos que los c_j anteriores son iguales a $P_j[0,-H_1]$:

$$\begin{aligned} P_0[0,-H_1] &= \frac{1-1}{H_1} = 0 = c_0 \\ P_j[0,-H_1] &= \frac{P_j[0]-P_j[-H_1]}{H_1} = \frac{-(t_{n-1}-t_n)^j}{(t_n-t_{n-1})j!} = c_j \text{ con } j = 1,2,... \end{aligned}$$

Análogamente

$$g[t_n,t_{n-1},t_{n-2}] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(t_{n-2}-t_n)(t_{n-1}-t_n)^j - (t_{n-1}-t_n)(t_{n-2}-t_n)^j}{(t_n-t_{n-1})(t_{n-1}-t_{n-2})(t_n-t_{n-2})j!} \cdot g^{j)}(t_n) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot g^{j)}(t_n)$$

donde

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_j &= \frac{(t_{n-2}-t_n)(t_{n-1}-t_n)^j - (t_{n-1}-t_n)(t_{n-2}-t_n)^j}{(t_n-t_{n-1})(t_{n-1}-t_{n-2})(t_n-t_{n-2})j!} \text{ con } j = 1,2,... \end{aligned}$$

comprobándose que

$$\begin{aligned} P_0[0,-H_1,-H_2] &= \frac{1}{H_2}\left(\frac{0}{H_1} - \frac{0}{-H_1+H_2}\right) = 0 = c_0 \\ P_j[0,-H_1,-H_2] &= \frac{-H_2(-H_1)^j + H_1(-H_2)^j}{j!H_1H_2(H_2-H_1)} = \\ &= \frac{(t_{n-2}-t_n)(t_{n-1}-t_n)^j - (t_{n-1}-t_n)(t_{n-2}-t_n)^j}{(t_n-t_{n-1})(t_{n-1}-t_{n-2})(t_n-t_{n-2})j!} = c_j \text{ con } j = 1,2,... \end{aligned}$$

Teorema 4.1 *Denotando por $\mathcal{D}_{p,n}$ la matriz siguiente,de orden $1 \times p$*

$$\mathcal{D}_{p,n} = \begin{pmatrix} g[t_n] & 1!g[t_n,t_{n-1}] & \cdots & (p-1)!g[t_n,...,t_{n-(p-1)}] \end{pmatrix}$$

y

$$H = \max\{H_1,...,H_{p-1}\}$$

se verifica la igualdad:

$$\mathcal{D}_{p,n}^{t} = A_p \begin{pmatrix} g(t_n) \\ g^{'}(t_n) \\ \vdots \\ g^{p-1)}(t_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(H^p) \\ O(H^{p-1}) \\ \vdots \\ O(H) \end{pmatrix}$$

donde A_p es la matriz cuadrada de orden p

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & P_1[0] & P_2[0] & \cdots & P_{p-1}[0] \\ 0 & 1 & 1!P_2[0,-H_1] & \cdots & 1!P_{p-1}[0,-H_1] \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2!P_{p-1}[0,-H_1,-H_2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{p\times p}$$

D/.

Aplicando a la función de perturbación $g(t)$ el (lema n^o 4.1) y el hecho de que $P_j[H_1,...,H_{i+1}]$ es de orden $j-i$ en H, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} g[t_n] &= P_0[0]g(t_n) + P_1[0]g^{'}(t_n) + \cdots + P_{p-1}[0]g^{p-1)}(t_n) + O(H^p) \\ g[t_n,t_{n-1}] &= P_0[0,-H_1]g(t_n) + P_1[0,-H_1]g^{'}(t_n) + \cdots \\ &\quad \cdots + P_{p-1}[0,-H_1]g^{p-1)}(t_n) + O(H^{p-1}) \\ &\quad \vdots \\ g[t_n,...,t_{n-(p-1)}] &= P_0[0,-H_1,...,-H_{p-1}]g(t_n) + P_1[0,-H_1,...,-H_{p-1}]g^{'}(t_n) + \cdots \\ &\quad \cdots + P_{p-1}[0,-H_1,...,-H_{p-1}]g^{p-1)}(t_n) + O(H) \end{aligned}$$

matricialmente

$$\begin{pmatrix} g[t_n] \\ g[t_n, t_{n-1}] \\ \vdots \\ g[t_n, ..., t_{n-(p-1)}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0[0] & \cdots & P_{p-1}[0] \\ P_0[0, -H_1] & \cdots & P_{p-1}[0, -H_1] \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ P_0[0, -H_1, ..., -H_{p-1}] & \cdots & P_{p-1}[0, -H_1, ..., -H_{p-1}] \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} g(t_n) \\ g^{'}(t_n) \\ \vdots \\ g^{p-1)}(t_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(H^p) \\ O(H^{p-1}) \\ \vdots \\ O(H) \end{pmatrix}$$

representando, simbólicamente el producto anterior, se obtiene la ecuación:

$$X_{p\times 1} = Y_{p\times p} \times Z_{p\times 1} + O_{p\times 1}$$

pudiéndose escribir la matriz $Y_{p\times p}$en la forma:

$$Y_{p\times p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & P_2[0, -H_1] & \cdots & P_{p-1}[0, -H_1] \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \cdots & P_{p-1}[0, -H_1, -H_2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(p-1)!} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación $X_{p\times 1} = Y_{p\times p} \times Z_{p\times 1} + O_{p\times 1}$ y efectuando las transformaciones elementales pertinentes para eliminar los cocientes de factoriales, resulta:

$$\mathcal{D}^t_{p,n} = A_p \times Z_{p\times 1} + O_{p\times 1}\clubsuit$$

Corolario 4.1 *La matriz A_p es inversible.*

D/.

La demostración es inmediata, pues $\det(A_p) = 1$ ♣

Truncando el desarrollo obtenido en el teorema nº 4.1 y despejando $Z_{p\times 1}$ resulta:

$$Z_{p\times 1} = A_p^{-1} \times (\mathcal{D}_{p,n}^t)_{p\times 1}$$

Al ser $Z^t = \mathcal{D}_{p,n} \times A_p^{-t}$. Designando por $(d_{ij})_{p\times p} = A_p^{-t}$ resulta:

$$Z^t = \left(\sum_{i=1}^{p} g[t_n, ..., t_{n-(i-1)}] d_{i1} (i-1)! \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{p} g[t_n, ..., t_{n-(i-1)}] d_{ip} (i-1)! \right)_{1\times p}$$

BIBLIOTECA VIRTUAL

El problema del cálculo recurrente de la matriz A_p^{-t} no se abordará directamente, sino que obtendremos una matriz, que denotaremos por $S_{p,n}$ sobre la que definiremos la recurrencia y posteriormente la relacionaremos con la matriz A_p^{-t}. El cálculo de la matriz $S_{p,n}$ se fundamentará en el estudio y aplicación de los polinomios simétricos y sus relaciones con las diferencias divididas.

Una vez conseguida la relación de recurrencia, para la matriz $S_{p,n}$ y su conexión con la matriz A_p^{-t}, procederemos a definir el método MDFpE, de manera que sea posible una implementación efectiva para su cálculo automático.

4.3 Estableciendo el método multipaso implícito MDFpI para osciladores perturbados

Para construir un método implícito, utilizaremos la misma idea que en el apartado anterior.

Teorema 4.2 *Consideramos* $h = t_{n+1} - t_n$ *y sea* $H_i = t_n - t_{n-i}$. *Denotando por* $\mathcal{D}_{p,n+1}$ *la matriz siguiente,de orden* $1 \times (p+1)$

$$\mathcal{D}_{p,n+1} = \left(\begin{array}{cccc} g[t_{n+1}] & 1!g[t_{n+1}, t_n] & \cdots & p!g[t_{n+1}, ..., t_{n+1-p)}] \end{array} \right)$$

y

$$H = \max\{h, H_1, ..., H_{p-1}\}$$

se verifica la igualdad:

$$\mathcal{D}^t_{p,n+1} = B_p \left(\begin{array}{c} g(t_n) \\ g^{'}(t_n) \\ \vdots \\ g^{p)}(t_n) \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} O(H^{p+1}) \\ O(H^p) \\ \vdots \\ O(H) \end{array} \right)$$

donde B_p *es la matriz cuadrada de orden* $(p+1)$

$$B_p = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & P_1[h] & P_2[h] & \cdots & P_p[h] \\ 0 & 1 & 1!P_2[h,0] & \cdots & 1!P_p[h,0] \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2!P_p[h,0,-H_1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)_{(p+1)\times(p+1)}$$

D/.

Aplicando a la función de perturbación $g(t)$ el lema n^o 4.1 y el hecho de que $P_j[H_1, ..., H_{i+1}]$ es de orden $j - i$ en H, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} g[t_{n+1}] &= P_0[h]g(t_n) + P_1[h]g^{'}(t_n) + \cdots + P_p[h]g^{p)}(t_n) + O(H^{p+1}) \\ g[t_{n+1}, t_n] &= P_0[h,0]g(t_n) + P_1[h,0]g^{'}(t_n) + \cdots \end{aligned}$$

$$\cdots + P_p[h,0]g^{p)}(t_n) + O(H^p)$$

$$\vdots$$

$$g[t_{n+1},...,t_{n+1-p}] = P_0[h,0,-H_1,...,-H_{p-1}]g(t_n) + P_1[h,0,-H_1,...,-H_{p-1}]g^{'}(t_n) + \cdots$$

$$\cdots + P_p[h,0,-H_1,...,-H_{p-1}]g^{p)}(t_n) + O(H)$$

matricialmente

$$\begin{pmatrix} g[t_{n+1}] \\ g[t_{n+1},t_n] \\ \vdots \\ g[t_{n+1},...,t_{n+1-p}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0[h] & \cdots & P_p[h] \\ P_0[h,0] & \cdots & P_p[h,0] \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ P_0[h,0,-H_1,...,-H_{p-1}] & \cdots & P_p[h,0,-H_1,...,-H_{p-1}] \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} g(t_n) \\ g^{'}(t_n) \\ \vdots \\ g^{p)}(t_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(H^{p+1}) \\ O(H^p) \\ \vdots \\ O(H) \end{pmatrix}$$

representando, simbólicamente el producto anterior, se obtiene la ecuación:

$$X_{(p+1)\times 1} = Y_{(p+1)\times(p+1)} \times Z_{(p+1)\times 1} + O_{(p+1)\times 1}$$

pudiéndose escribir la matriz $Y_{(p+1)\times(p+1)}$en la forma:

$$Y_{(p+1)\times(p+1)} = \begin{pmatrix} 1 & P_1[h] & P_2[h] & \cdots & P_p[h] \\ 0 & \frac{1}{1!} & P_2[h,0] & \cdots & P_p[h,0] \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \cdots & P_p[h,0,-H_1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p!} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación $X_{(p+1)\times 1} = Y_{(p+1)\times(p+1)} \times Z_{(p+1)\times 1} + O_{(p+1)\times 1}$ y efectuando las transformaciones elementales pertinentes para eliminar los cocientes de factoriales, resulta:

$$\mathcal{D}^t_{p,n+1} = B_p \times Z_{(p+1)\times 1} + O_{(p+1)\times 1}\clubsuit$$

Truncando el desarrollo obtenido en el teorema n^o 4.2 y despejando $Z_{(p+1)\times 1}$ resulta:

$$Z_{(p+1)\times 1} = B_p^{-1} \times (\mathcal{D}^t_{p,n+1})_{(p+1)\times 1}$$

Al ser $Z^t = \mathcal{D}_{p,n+1} \times B_p^{-t}$. Designando por $(d_{ij})_{(p+1)\times(p+1)} = B_p^{-t}$ resulta que la matriz $\mathcal{D}_{p,n+1} \times B_p^{-t}$es igual a:

$$\left(\sum_{i=1}^{p+1} g[t_{n+1},...,t_{n+1-(i-1)}]d_{i1}(i-1)! \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{p+1} g[t_{n+1},...,t_{n+1-(i-1)}]d_{i(p+1)}(i-1)! \right)_{1\times(p+1)}$$

El problema del cálculo recurrente de la matriz B_p^{-t} no se abordará directamente, sino que obtendremos una matriz, que denotaremos por $S_{p,n+1}$ sobre la que definiremos la recurrencia y posteriormente la relacionaremos con la matriz B_p^{-t}. El cálculo de la matriz $S_{p,n+1}$ se fundamentará en el estudio y aplicación de los polinomios simétricos y sus relaciones con las diferencias divididas.

Una vez conseguida la relación de recurrencia, para la matriz $S_{p,n+1}$ y su conexión con la matriz B_p^{-t}, procederemos a definir el método MDFpI, de manera que sea posible una implementación efectiva para su cálculo automático.

4.4 Polinomios Simétricos

El propósito de esta sección es proporcionar una notación y terminología que será empleada a continuación, y exponer algunos resultados importantes de las funciones simétricas [5],[8],[40],[45],[47].

Consideremos un anillo $K[X,Y]$. A todo polinomio $P(X,Y)$ hacemos corresponder el polinomio $P^{'}$ obtenido escribiendo Y en lugar de X y X en lugar de Y, dicho de otra manera $P^{'}(X,Y) = P(Y,X)$. Evidentemente, $(P^{'})^{'} = P$. La correspondencia $P \leftrightarrow P^{'}$ es un automorfismo del anillo $K[X,Y]$, ya que $P \leftrightarrow P^{'}$ y $Q \leftrightarrow Q^{'}$ implican de manera manifiesta

$$\begin{aligned} (P+Q)^{'} &\leftrightarrow P^{'} + Q^{'} \\ (PQ)^{'} &\leftrightarrow P^{'}Q^{'} \end{aligned}$$

En general, en $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ consideremos una permutacion σ hecha sobre las letras $X_1, X_2, ..., X_n$ y sea $\sigma(X_i) = X_i^{'}$. La correspondencia

$$P(X_1, X_2, ..., X_n) \leftrightarrow P^{'} = P(X_1^{'}, X_2^{'}, ..., X_n^{'})$$

es un automorfismo, porque es compatible con la igualdad, la suma y el producto en el anillo $K[X_1, X_2, ..., X_n]$.

Definición 4.2 *Los polinomios invariantes respecto al conjunto de los automorfismos anteriormente definidos se llaman simétricos.[45]*

Como una permutación cualquiera es un producto de trasposiciones, bastaría comprobar su invarianza en todas las trasposiciones posibles, para asegurarse que es un polinomio simétrico.

Sea el monomio $x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\cdots x_n^{\lambda}$ en el que los enteros $\alpha, \beta, ..., \lambda$ pueden ser nulos. Efectuando en él todas las permutaciones sobre las variables $x_1x_2\cdots x_n$ se obtiene varios monomios distintos cuya suma es evidentemente un polinomio simétrico denotado por

$$\sum x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\cdots x_n^{\lambda}$$

Consideremos el anillo de los polinomios simétricos en n variables independientes $t_1, ..., t_n$.

Definición 4.3 *Para cada $0 \leqq r \leqq n$, la r-ésima función simétrica elemental $e_{n,r}$ es la suma de todos los productos de r variables distintas t_i, siendo*

$$\begin{aligned} e_{n,0} &= 1 \\ e_{n,r} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}^{n} t_{i_1}\cdots t_{i_r} \end{aligned}$$

En el caso de que $r < 0$ se define

$$e_{n,r} = 0$$

La función generatriz de $e_{n,r}$ es:

$$E_n(t) = \sum_{r=0}^{n} e_{n,r}\cdot t^r = \prod_{i=1}^{n}(1+t_it)$$

es decir, efectuando un desarrollo de Mac Laurin de la función $E_n(t) = \prod_{i=1}^{n}(1+t_it)$ hasta orden n, sus coeficientes serían las funciones simétricas elementales $e_{n,r}$.

Definición 4.4 *Sea $\lambda = (\lambda_1\cdots\lambda_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Para cada $r \geqq 0$ la r-ésima función simétrica completa $h_{n,r}$ se define como la suma de todos los monomios*

de grado total r en las variables $t_1, ..., t_n$, es decir

$$h_{n,r} = \sum_{|\lambda|=r} \sum_{S_\lambda} t^\alpha$$

donde $S_\lambda = \{$ todas las distintas permutaciones $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ de $\lambda\}$ y $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} ... t_n^{\alpha_n}$. En particular $h_{n,0} = 1$ y $h_{n,1} = e_{n,1}$. [75].

En el caso de que $r < 0$ se define

$$h_{n,r} = 0$$

La función generatriz de $h_{n,r}$ es:

$$H_n(t) = \sum_{r=0}^{n} h_{n,r} \cdot t^r = \prod_{i=1}^{n} (1 - t_i t)^{-1}$$

es decir, efectuando un desarrollo de Mac Laurin de la funcion $H_n(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t_i t)^{-1}$ hasta orden n, sus coeficientes serían las funciones simétricas completas $h_{n,r}$ [47].

Proposición 4.1 *Entre los polinomios simétricos elementales y los completos se establece al siguiente relación*

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \cdot h_{n,\alpha-r} \cdot e_{m,r} = 0 \qquad \forall m \geqq n \geqq 1 \text{ y } \alpha > m - n$$

D/.

De las dos definiciones anteriores de las funciones generatrices, $E_n(t)$ y $H_n(t)$, se tiene

$$H_n(t) E_m(-t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - t_i t)^{-1} \prod_{i=1}^{m} (1 + t_i(-t)) = \prod_{i=n+1}^{m} (1 - t_i t)$$

llamando $j = i - n$ tenemos

$$\prod_{i=n+1}^{m} (1 - t_i t) = \prod_{j=1}^{m-n} (1 - t_i t) = E_{m-n}(-t)$$

y de aquí se sigue que los coeficientes de t^α para $\alpha > m-n$ son cero o equivalentemente la tesis. ♣

Denotaremos por $g[t_0, t_1, ..., t_k]$ la diferencia dividida de orden k de una función g en los valores $t_0, t_1, ..., t_k$. [75].

Proposición 4.2 *Las diferencias divididas son funciones simétricas de sus argumentos.*

D/.

Por definición

$$g[t, t_1] = \frac{g(t) - g(t_1)}{t - t_1} = \frac{g(t)}{t - t_1} + \frac{g(t_1)}{t_1 - t}$$

y obtenemos sin dificultad

$$g[t, t_1, t_2] = \frac{g(t)}{(t - t_1)(t - t_2)} + \frac{g(t_1)}{(t_1 - t)(t_1 - t_2)} + \frac{g(t_2)}{(t_2 - t)(t_2 - t_1)}$$

probándose por inducción que

$$\begin{aligned} g[t, t_{1,...,} t_n] \quad = \quad & \frac{g(t)}{(t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_n)} + \frac{g(t_1)}{(t_1 - t)(t_1 - t_2) \cdots (t_1 - t_n)} + \cdots \\ & \cdots + \frac{g(t_n)}{(t_n - t)(t_n - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})} \end{aligned}$$

evidentemente si intercambiamos dos argumentos cualesquiera no se altera el valor de la diferencia dividida, por tanto éstas son funciones simétricas de sus argumentos. ♣

Proposición 4.3 *La diferencia dividida de la función $g(t) = t^m$ se puede obtener mediante la siguiente expresión*

$$g[t_1, t_2, ..., t_n] = \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{t_i^m}{(t_i - t_1)(t_i - t_2) \cdots (t_i - t_n)}$$

donde la notación $\sum'$ indica que el factor $t_i - t_i$ esta excluído para $i = 1, 2, ..., n$.

D/.

Esto último es el coeficiente de t^{m-n+1} en el desarrollo de la función

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^{n-1}}{(t_i - t_1)\cdots(t_i - t_{i-1})(1 - t_i t)(t_i - t_{i+1})\cdots(t_i - t_{p+1})}$$

esta expresión es el resultado de introducir en las fracciones parciales la función

$$(1 - t_1 t)^{-1}(1 - t_2 t)^{-1}\cdots(1 - t_n t)^{-1}$$

y por consiguiente [50] el coeficiente de t^{m-n+1} es la suma de los productos homogéneos de grado $m - n + 1$ de $t_1, ..., t_n$.

Entonces

$$g[t_1, t_2, ..., t_n] = \sum t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \cdots t_n^{\alpha_n}$$

donde el sumatorio se extiende a todos los enteros positivos, incluído el cero, que satisfacen la relación $\alpha_{1+}\alpha_{2+\cdots+}\alpha_n = m - n + 1$. ♣

Entre las diferencias divididas de $g(t) = t^m$ que denotaremos por $t^m[t_1, ..., t_n]$ y los polinomios simétricos completos podemos establecer la siguiente relación.

Corolario 4.2 $t^m[t_1, ..., t_n] = h_{n,m-n+1}$

D/.

Trivial, por la definición de $h_{n,r}$ y por la proposición anterior. ♣

Finalmente veremos la relación existente entre las diferencias divididas y los polinomios simétricos elementales.

Definición 4.5 *Sea:*

$$q_{i,j} = t^{j-1}[t_1, ..., t_i] = h_{i,j-i}$$

y

$$\sigma_{i,j} = (-1)^{j-i} e_{j-1,j-i}$$

Definición 4.6 *Sean las matrices cuadradas de orden n:* $P = (q_{i,j})$ *y* $S = (\sigma_{i,j})$

Proposición 4.4 *Las matrices* P *y* S *son triangulares superiores, con unos en la diagonal principal. Además las matrices* P *y* S *son inversas.*

D/.

Dado que $h_{n,r} = e_{n,r} = 0$, para $r < 0$ y $h_{n,0} = e_{n,0} = 1$ evidentemente son triangulares superiores, con unos en su diagonal principal. Como $|P| = |S| = 1 \neq 0$ son inversibles, bastaría con demostrar que $PS = I$. Las relaciones expresadas en las definiciones n^{o}4.3 y n^{o}4.4 junto con la proposición n^{o}4.1, muestran que $PS = I$.

4.5 Cálculo recurrente de las matrices A_p^{-t} y B_p^{-t}.

Sea $t^* \in [a, b]$, consideramos la funcion simétrica completa $q_{i,j}$ en los valores

$$\mathrm{H}_{n-k} = t_{n-k} - t^* \text{ con } k = 0, ..., i-1$$

Es importante precisar que trabajamos en el punto t_n y denotaremos

$$q_{i,j}(n) = t^{j-1}[\mathrm{H}_n, ..., \mathrm{H}_{n-(i-1)}]$$

La función $\sigma_{i,j}$ en los mismos puntos se denotará por $\sigma_{i,j}(n)$.

Por la proposición n^{o}4.4 las matrices cuadradas de orden k $P_{k,n} = (q_{i,j}(n))$ y $S_{k,n} = (\sigma_{i,j}(n))$ son inversas una de otra.

Como

$$\mathrm{H}_{n-j} = t_{n-j} - t^*$$

y

$$H_j = t_n - t_{n-j}$$

se verifica que

$$(t_n - t^*) - H_j = \mathrm{H}_{n-j} \text{ con } j = 0, ..., i-1$$

Particularizando al caso: $t^* = t_n$ tendríamos $\mathrm{H}_{n-j} = -H_j$ con $j = 0, ..., i-1$

BIBLIOTECA VIRTUAL

4.5.1 Cálculo recurrente de A_p^{-t}.

El siguiente lema nos permite aproximar la diferencia dividida de orden k de la función $g(t)$ por sus derivadas; para simplificar la exposición, consideramos que $g(t)$ es analítica.

Lema 4.2 *Las diferencias divididas de una función g satisfacen la siguiente propiedad*

$$g[t_n, t_{n-1}, ..., t_{n-(i-1)}] = \sum_{j=0}^{\infty} q_{i,j+1}(n) \frac{1}{j!} g^{j)}(t^*)$$

D/.

La demostración es realmente sencilla, si reemplazamos los desarrollos en t^* de $g(t_n), ..., g(t_{n-i+1})$ en una adecuada expresión de diferencias finitas.

$$\begin{aligned} g[t_n, t_{n-1}, ..., t_{n-(i-1)}] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j[t_n - t^*, ..., t_{n-(i-1)} - t^*]}{j!} g^{j)}(t^*) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q_{i,j+1}(n) \frac{1}{j!} g^{j)}(t^*) \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Si $\mathrm{H} = \max\left\{\left|\mathrm{H}_n\right|, ..., \left|\mathrm{H}_{n-(i-1)}\right|\right\}$, como las $q_{i,j}(n)$ tienen orden $j-i$ en H el lema nº4.1, nos permite escribir:

$$g[t_n, t_{n-1}, ..., t_{n-(i-1)}] = \sum_{j=0}^{p-1} q_{i,j+1}(n)\frac{1}{j!}g^{j)}(t^*) + O(\mathrm{H}^{p-(i-1)})$$

con $i = 1, ..., p$.

Considerando $t^* = t_n$ y expresando matricialmente estas igualdades, tenemos

$$\begin{pmatrix} g[t_n] \\ g[t_n, t_{n-1}] \\ \vdots \\ g[t_n, ..., t_{n-(p-1)}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1,1}(n) & \cdots & q_{1,p}(n) \\ q_{2,1}(n) & \cdots & q_{2,p}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{p,1}(n) & \cdots & q_{p,p}(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(t_n) \\ \frac{g'(t_n)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{g^{(p-1)}(t_n)}{(p-1)!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\mathrm{H}^p) \\ O(\mathrm{H}^{p-1}) \\ \vdots \\ O(\mathrm{H}) \end{pmatrix}$$

y como $q_{i,j+1}(n) = h_{i,j}$ en los argumentos $\mathrm{H}_n, ..., \mathrm{H}_{n-(i-1)}$, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} g[t_n] \\ g[t_n, t_{n-1}] \\ \vdots \\ g[t_n, ..., t_{n-(p-1)}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h_{1,1} & \cdots & h_{1,p-1} \\ 0 & 1 & \cdots & h_{2,p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(t_n) \\ \frac{g'(t_n)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{g^{(p-1)}(t_n)}{(p-1)!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\mathrm{H}^p) \\ O(\mathrm{H}^{p-1}) \\ \vdots \\ O(\mathrm{H}) \end{pmatrix}$$

La siguiente proposición nos permite el cálculo recurrente de la matriz $S_{p,n}$.

Proposición 4.5

$$\sigma_{i,j}(n) = \sigma_{i-1,j-1}(n) - \mathrm{H}_{n-j+2}\sigma_{i,j-1}(n)$$

con $i, j \geqq 2$.

D/.

Es inmediata. [75].♣

Si consideramos $t^* = t_n$, entonces:

$$S_{p,n} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
0 & 1 & \rightarrow & \sigma_{2,3}(n) & \rightarrow & \sigma_{2,4}(n) & \rightarrow & \sigma_{2,5}(n) & \cdots \rightarrow & \sigma_{2,p}(n) \\
 & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
0 & 0 & & 1 & & \sigma_{3,4}(n) & \rightarrow & \sigma_{3,5}(n) & \cdots \rightarrow & \sigma_{3,p}(n) \\
 & & & & & & \searrow & & \searrow & \\
0 & 0 & & 0 & & 1 & \rightarrow & \sigma_{4,5}(n) & \cdots \rightarrow & \sigma_{4,p}(n) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & & 0 & & & & 0 & & 1
\end{pmatrix}$$

El siguiente teorema nos permite obtener de forma recurrente la matriz A_p^{-t} definida en el capítulo dos.

Teorema 4.3

$$A_p^{-t} = M_{p,n} \times S_{p,n}^t \times N_{p,n}$$

donde

$$M_{p,n} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{0!} & & & \\
 & \frac{1}{1!} & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & \frac{1}{(p-1)!}
\end{pmatrix}$$

y

$$N_{p,n} = \begin{pmatrix}
0! & & & \\
 & 1! & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & (p-1)!
\end{pmatrix}$$

D/.

Como $t^* = t_n$ y $q_{i,j+1}(n) = t^j[0, -H_1, ..., -H_{i-1}] = j!P_j[0, -H_1, ..., -H_{i-1}]$, resulta

$$P_{p,n} = \begin{pmatrix} 0!P_0[0] & \cdots & (p-1)!P_{p-1}[0] \\ 0!P_0[0, -H_1] & \cdots & (p-1)!P_{p-1}[0, -H_1] \\ \vdots & & \vdots \\ 0!P_0[0, -H_1, ..., -H_{p-1}] & \cdots & (p-1)!P_{p-1}[0, -H_1, ..., -H_{p-1}] \end{pmatrix}$$

efectuando el producto $N_{p,n} \times P_{p,n} \times M_{p,n}$ resulta la matriz A_p. Trasponiendo e invirtiendo el producto anterior obtenemos

$$A_p^{-t} = M_{p,n} \times P_{p,n}^{-t} \times N_{p,n} = M_{p,n} \times S_{p,n}^t \times N_{p,n} = \left(\frac{(j-1)!\sigma_{j,i}(n)}{(i-1)!} \right) \quad \clubsuit$$

La expresión precedente, permite obtener la matriz A_p^{-t} por recurrencia, a partir de la matriz $S_{p,n}^t$, tal y como se indicaba en la introducción al capítulo. Basándonos en esta recurrencia, se podrían obtener, directamente, relaciones recurrentes análogas, para los elementos $d_{i,j}$ de la matriz A_p^{-t}.

Como

$$\sigma_{i,j} = \frac{(j-1)!}{(i-1)!} d_{j,i}$$

despejando $d_{i,j}$ según los casos y sustituyendo en la relación propuesta en la proposición n^{o}4.5, tenemos

$$\begin{aligned} d_{1,1} &= 1 \\ d_{1,j} &= 0 \quad \text{con } j = 2, ..., p \\ d_{i,1} &= 0 \quad \text{con } i = 2, ..., p \\ d_{i,j} &= \frac{j-1}{i-1} d_{i-1,j-1} - \frac{1}{i-1} d_{i-1,j} \mathrm{H}_{n-i+2} \quad \text{con } 2 \leq i,\ j \leq p \end{aligned}$$

4.5.2 Cálculo recurrente de B_p^{-t}.

Lema 4.3 *Sea $h = t_{n+1} - t^*$.Las diferencias divididas de una función g satisfacen la siguiente propiedad*

$$g[t_{n+1}, t_n, ..., t_{n-(i-1)}] = \sum_{j=0}^{\infty} q_{i+1,j+1}(n) \frac{1}{j!} g^{j)}(t^*)$$

D/.

La demostración es realmente sencilla, si reemplazamos los desarrollos en t^* de $g(t_{n+1}), ..., g(t_{n-i+1})$ en una adecuada expresión de diferencias finitas.

$$\begin{aligned} g[t_{n+1}, t_n, ..., t_{n-(i-1)}] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j[t_{n+1} - t^*, ..., t_{n-(i-1)} - t^*]}{j!} g^{j)}(t^*) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q_{i+1,j+1}(n) \frac{1}{j!} g^{j)}(t^*) \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Si $\mathrm{H} = \max\left\{|h|, |\mathrm{H}_n|, ..., \left|\mathrm{H}_{n-(i-1)}\right|\right\}$, como las $q_{i,j}(n)$ tienen orden $j - i$ en H el lema n^{o}4.3, nos permite escribir:

$$g[t_{n+1}, t_n, ..., t_{n-(i-1)}] = \sum_{j=0}^{p-1} q_{i+1,j+1}(n) \frac{1}{j!} g^{j)}(t^*) + O(\mathrm{H}^{p-(i-1)})$$

con $i = 1, ..., p$.

Considerando $t^* = t_n$ y expresando matricialmente estas igualdades, tenemos

$$\begin{pmatrix} g[t_{n+1}] \\ g[t_{n+1}, t_n] \\ \vdots \\ g[t_{n+1}, ..., t_{n-(p-1)}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1,1}(n) & \cdots & q_{1,p+1}(n) \\ q_{2,1}(n) & \cdots & q_{2,p+1}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{p+1,1}(n) & \cdots & q_{p+1,p+1}(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(t_n) \\ \frac{g'(t_n)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{g^{p)}(t_n)}{p!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\mathrm{H}^{p+1}) \\ O(\mathrm{H}^p) \\ \vdots \\ O(\mathrm{H}) \end{pmatrix}$$

y como $q_{i+1,j+1}(n) = h_{i+1,j-i}$ en los argumentos $h, \mathrm{H}_n, ..., \mathrm{H}_{n-(i-1)}$, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} g[t_{n+1}] \\ g[t_{n+1}, t_n] \\ \vdots \\ g[t_{n+1},..., t_{n-(p-1)}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h_{1,1} & \cdots & h_{1,p+1} \\ 0 & 1 & \cdots & h_{2,p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(t_n) \\ \frac{g'(t_n)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{g^{p)}(t_n)}{p!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\mathrm{H}^{p+1}) \\ O(\mathrm{H}^p) \\ \vdots \\ O(\mathrm{H}) \end{pmatrix}$$

La siguiente proposición nos permite el cálculo recurrente de la matriz $S_{p,n+1}$.

Proposición 4.6

$$\sigma_{i,j}(n) = \sigma_{i-1,j-1}(n) - \mathrm{H}_{n-j+3}\sigma_{i,j-1}(n)$$

con $i, j \geqq 2$.

D/.

Análoga a la proposición nº 4.5. [75]. ♣

Si consideramos $t^* = t_n$, entonces:

$$S_{p,n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -h & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \to & \sigma_{2,3}(n) & \to & \sigma_{2,4}(n) & \to & \sigma_{2,5}(n) & \cdots \to & \sigma_{2,p+1}(n) \\ & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 0 & 0 & & 1 & & \sigma_{3,4}(n) & \to & \sigma_{3,5}(n) & \cdots \to & \sigma_{3,p+1}(n) \\ & & & & & & \searrow & & \searrow & \\ 0 & 0 & & 0 & & 1 & \to & \sigma_{4,5}(n) & \cdots \to & \sigma_{4,p+1}(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & & & & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

El siguiente teorema nos permite obtener de forma recurrente la matriz B_p^{-t} definida en el capítulo dos.

Teorema 4.4

$$B_p^{-t} = M_{p,n+1} \times S_{p,n+1}^t \times N_{p,n+1}$$

donde

$$M_{p,n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0!} & & & \\ & \frac{1}{1!} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{p!} \end{pmatrix}$$

y

$$N_{p,n+1} = \begin{pmatrix} 0! & & & \\ & 1! & & \\ & & \ddots & \\ & & & p! \end{pmatrix}$$

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

D/.

Como $t_n = t^*$ y $q_{i+1,j+1}(n) = t^j[h, 0, -H_1, ..., -H_{i-1}] = j!P_j[h, 0, -H_1, ..., -H_{i-1}]$, resulta

$$P_{p,n+1} = \begin{pmatrix} 0!P_0[h] & \cdots & p!P_{p-1}[h] \\ 0!P_0[h,0] & \cdots & p!P_{p-1}[h,0] \\ \vdots & & \vdots \\ 0!P_0[h,0,...,-H_{p-1}] & \cdots & p!P_{p-1}[h,0,...,-H_{p-1}] \end{pmatrix}$$

efectuando el producto $N_{p,n+1} \times P_{p,n+1} \times M_{p,n+1}$ resulta la matriz B_p. Trasponiendo e invirtiendo el producto anterior obtenemos

$$B_p^{-t} = M_{p,n+1} \times P_{p,n+1}^{-t} \times N_{p,n+1} = M_{p,n+1} \times S_{p,n+1}^t \times N_{p,n+1} = \left(\frac{(j-1)!\sigma_{j,i}(n)}{(i-1)!} \right) \quad \clubsuit$$

La expresión precedente, permite obtener la matriz B_p^{-t} por recurrencia, a partir de la matriz $S_{p,n+1}^t$, tal y como se indicaba en la introducción al capítulo. Basándonos en esta recurrencia, se podrían obtener, directamente, relaciones recurrentes análogas, para los elementos $d_{i,j}$ de la matriz B_p^{-t}.

Como

$$\sigma_{i,j} = \frac{(j-1)!}{(i-1)!} d_{j,i}$$

despejando $d_{i,j}$ según los casos y sustituyendo en la relación propuesta en la proposición n^{o}4.6, tenemos

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

$$\begin{aligned}
d_{1,1} &= 1 \\
d_{1,j} &= 0 \quad \text{con } j = 2, ..., p+1 \\
d_{2,1} &= -h \\
d_{i,1} &= 0 \quad \text{con } i = 3, ..., p+1 \\
d_{i,j} &= \frac{j-1}{i-1} d_{i-1,j-1} - \frac{1}{i-1} d_{i-1,j} \mathrm{H}_{n-i+3} \quad \text{con } 2 \leq i,\ j \leq p+1
\end{aligned}$$

4.6 Método multipaso explícito MDFpE para osciladores perturbados

Si queremos definir un esquema, explícito, de p pasos, utilizando el Método I, truncaremos las series correspondientes, de forma que el mayor orden de derivación de la función de perturbación que aparezca, sea $p-1$, luego:

$$2k \leqslant p-1 \Longrightarrow k \leqslant \frac{p-1}{2}$$

de manera que k será un número entero si y solamente si p es impar.

En el caso de querer definir un esquema, explícito, de p pasos, utilizando el Método II, truncaremos las series correspondientes, de forma que el mayor orden de derivación de la función de perturbación que aparezca, sea $p-1$, luego:

$$2k+1 \leqslant p-1 \Longrightarrow k \leqslant \frac{p-2}{2}$$

de modo que k será un número entero si, y solamente si, p es par.

Dado que el elemento, $(1, j+1)$ de la matriz Z^t es

$$g^{j)}(nh) = \sum_{i=1}^{p} g[t_n, ..., t_{n-(i-1)}] d_{i,j+1}(i-1)! \text{ con } j = 0, ..., p-1$$

y como

$$d_{i,j} = \frac{(j-1)!\sigma_{j,i}}{(i-1)!} \in A_p^{-t}$$

donde $\sigma_{i,j}$ es el elemento (i,j) de la matriz $S_{p,n}$, obtenemos:

$$b_j = g^{j)}(nh) = j! \sum_{i=1}^{p} \sigma_{j+1,i}(n) g[t_n, ..., t_{n-(i-1)}]$$

Para la definición de los métodos explícitos, en cada uno de los casos, se utiliza la siguiente notación:

- x_{n-1}, y x_n, son las aproximaciones del valor de la solución en los puntos t_{n-1}, y t_n respectivamente.
- $x_{n-1}^{'}$, y $x_n^{'}$, son las aproximaciones del valor de la derivada de la solución en los puntos t_{n-1}, y t_n respectivamente.
- $b_j = g^{j)}(nh) = j! \sum_{i=1}^{p} \sigma_{j+1,i}(n) g[t_n, ..., t_{n-(i-1)}]$ donde $\sigma_{i,j}$ es el elemento (i,j) de la matriz $S_{p,n}$.

- Inicialización para x: $x_0, \ldots, x_{p-1}$.

- Inicialización para $x^{'}$: $x_0^{'}, \ldots, x_{p-1}^{'}$.

4.6.1 Caso I $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$

Método I Explícito de un número impar de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

BIBLIOTECA VIRTUAL

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n \cos \alpha h + 2\varepsilon \left(b_0 \varphi_2(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (b_{2k} + \beta^2 b_{2k-2}) \varphi_{2k+2}(h) + \beta^2 b_{p-1} \varphi_{p+3}(h) \right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} - 2\alpha x_n \sin \alpha h + 2\varepsilon \left(b_0 \varphi_2^{'}(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (b_{2k} + \beta^2 b_{2k-2}) \varphi_{2k+1}(h) + \beta^2 b_{p-1} \varphi_{p+2}(h) \right) \end{aligned}$$

Reagrupando, convenientemente los términos, obtenemos una formulación más compacta, que expresaremos del modo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n \cos \alpha h + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} (\varphi_{2k}(h) + \beta^2 \varphi_{2k+2}(h)) b_{2k-2} \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} - 2\alpha x_n \sin \alpha h + 2\varepsilon \left((\varphi_2^{'}(h) + \beta^2 \varphi_3(h)) b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (\varphi_{2k+1}(h) + \beta^2 \varphi_{2k+3}(h)) b_{2k} \right) \end{aligned}$$

Proposición 4.7 *Si la función de perturbación $f(x, x^{'}t)$ es lipschitziana en las variables $x, x^{'}$, entonces el método I MDFpE para osciladores perturbados es estable.*

D/.

Considerando la definición de estabilidad dada por Stetter, [66] y aplicando los teoremas relativos a la estabilidad de Grigorieff, [36], bastará comprobar la condición

L en la parte no lineal y la estabilidad en la parte lineal. En el caso que nos ocupa, consiste en:

1^o.- Probar que las funciones:

$$2\varepsilon\left(b_0\varphi_2(h)+\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(b_{2k}+\beta^2 b_{2k-2})\varphi_{2k+2}(h)+\beta^2 b_{p-1}\varphi_{p+3}(h)\right)=$$

$$2\varepsilon\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}}(\varphi_{2k}(h)+\beta^2\varphi_{2k+2}(h))b_{2k-2}$$

$$2\varepsilon\left(b_0\varphi_2^{'}(h)+\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(b_{2k}+\beta^2 b_{2k-2})\varphi_{2k+1}(h)+\beta^2 b_{p-1}\varphi_{p+2}(h)\right)=$$

$$2\varepsilon\left((\varphi_2^{'}(h)+\beta^2\varphi_3(h))b_0+\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(\varphi_{2k+1}(h)+\beta^2\varphi_{2k+3}(h))b_{2k}\right)$$

verifican una condición L uniforme en el dominio de t con respecto a las variables $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-p+1}$. Evidente, por ser la función $f(x, x^{'}t)$ lipschitziana respecto a las variables $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-p+1}$.

2^o.- Comprobar la estabilidad del método I MDFpE, en el problema homogéneo. Considerando las matrices $\begin{pmatrix} 2\cos\alpha h & 0 \\ -2\alpha\sin\alpha h & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y la matriz identidad de orden (2×2), por el segundo teorema de Grigorieff, [36] es suficiente comprobar que el conjunto:

$$\left\{\left|\begin{pmatrix} 2\cos\alpha h & 0 \\ -2\alpha\sin\alpha h & 0 \end{pmatrix}^k\right|,\ 0\leqslant k\leqslant N,\ h=\frac{T}{N}\right\}$$

está acotado. En efecto:

$$\begin{pmatrix} 2\cos\alpha h & 0 \\ -2\alpha\sin\alpha h & 0 \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} 2^k\cos^k(\alpha h) & 0 \\ -2^k\alpha\cos^{k-1}(\alpha h)\sin\alpha h & 0 \end{pmatrix}$$

siendo sus componentes, funciones acotadas en el intervalo $[0, T]$. ♣

Método II Explícito de un número par de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x_n^{'}}{\alpha}\sin\alpha h + 2\varepsilon\left(b_1\varphi_3(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}}(b_{2k+1}+\beta^2 b_{2k-1})\varphi_{2k+3}(h) + \beta^2 b_{p-1}\varphi_{p+3}(h)\right) \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'}\cos\alpha h + 2\varepsilon\left(b_1\varphi_2(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}}(b_{2k+1}+\beta^2 b_{2k-1})\varphi_{2k+2}(h) + \beta^2 b_{p-1}\varphi_{p+2}(h)\right) \end{aligned}$$

Reagrupando, convenientemente los términos, obtenemos una formulación más compacta, que expresaremos del modo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x_n^{'}}{\alpha}\sin\alpha h + 2\varepsilon\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}}(\varphi_{2k+1}(h) + \beta^2\varphi_{2k+3}(h))b_{2k-1} \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'}\cos\alpha h + 2\varepsilon\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}}(\varphi_{2k}(h) + \beta^2\varphi_{2k+2}(h))b_{2k-1} \end{aligned}$$

Proposición 4.8 *Si la función de perturbación $f(x, x^{'}t)$ es lipschitziana en las variables $x, x^{'}$, entonces el método II MDFpE para osciladores perturbados es estable.*

D/.

Considerando la definición de estabilidad dada por Stetter, [66] y aplicando los teoremas relativos a la estabilidad de Grigorieff, [36], bastará comprobar la condición L en la parte no lineal y la estabilidad en la parte lineal. En el caso que nos ocupa, consiste en:

1^o.- Probar que las funciones:

$$2\varepsilon\left(b_1\varphi_3(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}}(b_{2k+1}+\beta^2 b_{2k-1})\varphi_{2k+3}(h) + \beta^2 b_{p-1}\varphi_{p+3}(h)\right) =$$

$$2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} (\varphi_{2k+1}(h) + \beta^2 \varphi_{2k+3}(h)) b_{2k-1}$$

$$2\varepsilon \left(b_1 \varphi_2(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}} (b_{2k+1} + \beta^2 b_{2k-1}) \varphi_{2k+2}(h) + \beta^2 b_{p-1} \varphi_{p+2}(h) \right) =$$

$$2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} (\varphi_{2k}(h) + \beta^2 \varphi_{2k+2}(h)) b_{2k-1}$$

verifican una condición L uniforme en el dominio de t con respecto a las variables $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-p+1}$. Evidente, por ser la función $f(x, x^{'}t)$ lipschitziana respecto a las variables $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-p+1}$.

2^o.- Comprobar la estabilidad del método II MDFpE, en el problema homogéneo. Considerando las matrices $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\alpha}\sin\alpha h \\ 0 & 2\cos\alpha h \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, y la matriz identidad de orden (2×2), por el segundo teorema de Grigorieff, [36], es suficiente comprobar que el conjunto:

$$\left\{ \left| \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\alpha}\sin\alpha h \\ 0 & 2\cos\alpha h \end{pmatrix}^k \right|, \ 0 \leqslant k \leqslant N, \ h = \frac{T}{N} \right\}$$

está acotado. En efecto:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\alpha}\sin\alpha h \\ 0 & 2\cos\alpha h \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2^k}{\alpha}\sin\alpha h \cos^{k-1}(\alpha h) \\ 0 & 2^k \cos^k(\alpha h) \end{pmatrix}$$

siendo sus componentes, funciones acotadas en el intervalo $[0, T]$. ♣

Métodos de orden bajo

1. Método de orden uno, formulado a partir del método II de $p = 2$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x_n^{'}}{\alpha}\sin\alpha h + 2\varepsilon(\varphi_3(h) + \beta^2\varphi_5(h)) g\,[t_n, t_{n-1}] \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'}\cos\alpha h + 2\varepsilon(\varphi_2(h) + \beta^2\varphi_4(h)) g\,[t_n, t_{n-1}] \end{aligned}$$

2. Método de orden dos, formulado a partir del método I de $p = 3$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n \cos\alpha h + \\ &\quad +2\varepsilon \left((\varphi_2(h) + \beta^2\varphi_4(h)) g\left[t_n\right] + 2(\varphi_4(h) + \beta^2\varphi_6(h)) g\left[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}\right] \right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} - 2\alpha x_n \sin\alpha h + \\ &\quad +2\varepsilon \left((\varphi_2^{'}(h) + \beta^2\varphi_3(h)) g\left[t_n\right] + 2(\varphi_3(h) + \beta^2\varphi_5(h)) g\left[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}\right] \right) \end{aligned}$$

4.6.2 Caso II $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$

Método I Explícito de un número impar de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n \cos\alpha h + 2\varepsilon \left(b_0\varphi_2(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi_{2k+2}(h) b_{2k} \right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} - 2\alpha x_n \sin\alpha h + 2\varepsilon \left(b_0\varphi_2^{'}(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi_{2k+1}(h) b_{2k} \right) \end{aligned}$$

Reagrupando, convenientemente los términos, obtenemos una formulación más compacta, que expresaremos del modo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n \cos\alpha h + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} \varphi_{2k}(h) b_{2k-2} \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} - 2\alpha x_n \sin\alpha h + 2\varepsilon \left(\varphi_2^{'}(h) b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi_{2k+1}(h) b_{2k} \right) \end{aligned}$$

Proposición 4.9 *Si la función de perturbación $f(x, x^{'}t)$ es lipschitziana en las variables $x, x^{'}$, entonces el método I MDFpE para osciladores perturbados es estable.*

D/.

Análoga al caso anterior.♣

Método II Explícito de un número par de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x_n^{'}}{\alpha}\sin\alpha h + 2\varepsilon\left(\varphi_3(h)b_1 + \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}}\varphi_{2k+3}(h)b_{2k+1}\right) \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'}\cos\alpha h + 2\varepsilon\left(\varphi_2(h)b_1 + \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}}\varphi_{2k+2}(h)b_{2k+1}\right) \end{aligned}$$

Reagrupando, convenientemente los términos, obtenemos una formulación más compacta, que expresaremos del modo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x_n^{'}}{\alpha}\sin\alpha h + 2\varepsilon\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}}\varphi_{2k+1}(h)b_{2k-1} \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'}\cos\alpha h + 2\varepsilon\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}}\varphi_{2k}(h)b_{2k-1} \end{aligned}$$

Proposición 4.10 *Si la función de perturbación $f(x, x^{'}t)$ es lipschitziana en las variables $x, x^{'}$, entonces el método II MDFpE para osciladores perturbados es estable.*

D/.

Análoga al caso anterior.♣

Métodos de orden bajo

1. Método de orden uno, formulado a partir del método II de $p = 2$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x_n^{'}}{\alpha}\sin\alpha h + 2\varepsilon\varphi_3(h)g\left[t_n, t_{n-1}\right] \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'}\cos\alpha h + 2\varepsilon\varphi_2(h)g\left[t_n, t_{n-1}\right] \end{aligned}$$

2. Método de orden dos, formulado a partir del método I de $p = 3$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n\cos\alpha h + 2\varepsilon\left(\varphi_2(h)g\left[t_n\right] + 2\varphi_4(h)g\left[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}\right]\right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} - 2\alpha x_n\sin\alpha h + 2\varepsilon\left(\varphi_2^{'}(h)g\left[t_n\right] + 2\varphi_3(h)g\left[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}\right]\right) \end{aligned}$$

4.6.3 Caso III $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$

Método I Explícito de un número impar de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n + 2\varepsilon\left(b_0\varphi_2(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(b_{2k} + \beta^2 b_{2k-2})\varphi_{2k+2}(h) + \beta^2 b_{p-1}\varphi_{p+3}(h)\right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} + 2\varepsilon\left(b_0\varphi_2^{'}(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(b_{2k} + \beta^2 b_{2k-2})\varphi_{2k+1}(h) + \beta^2 b_{p-1}\varphi_{p+2}(h)\right) \end{aligned}$$

Reagrupando, convenientemente los términos, obtenemos una formulación más compacta, que expresaremos del modo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n + 2\varepsilon\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}}(\varphi_{2k}(h) + \beta^2\varphi_{2k+2}(h))b_{2k-2} \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} + 2\varepsilon\left((\varphi_2^{'}(h) + \beta^2\varphi_3(h))b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(\varphi_{2k+1}(h) + \beta^2\varphi_{2k+3}(h))b_{2k}\right) \end{aligned}$$

Proposición 4.11 *Si la función de perturbación $f(x, x't)$ es lipschitziana en las variables x, x', entonces el método I MDFpE para osciladores perturbados es estable.*

D/.

Análoga al caso anterior, considerando las matrices: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y la matriz identidad de orden (2×2).

Método II Explícito de un número par de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2hx'_n + 2\varepsilon \left(b_1\varphi_3(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}} (b_{2k+1} + \beta^2 b_{2k-1})\varphi_{2k+3}(h) + \beta^2 b_{p-1}\varphi_{p+3}(h) \right) \\ x'_{n+1} &= -x'_{n-1} + 2x'_n + 2\varepsilon \left(b_1\varphi_2(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}} (b_{2k+1} + \beta^2 b_{2k-1})\varphi_{2k+2}(h) + \beta^2 b_{p-1}\varphi_{p+2}(h) \right) \end{aligned}$$

Reagrupando, convenientemente los términos, obtenemos una formulación más compacta, que expresaremos del modo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2hx'_n + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} (\varphi_{2k+1}(h) + \beta^2\varphi_{2k+3}(h))b_{2k-1} \\ x'_{n+1} &= -x'_{n-1} + 2x'_n + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} (\varphi_{2k}(h) + \beta^2\varphi_{2k+2}(h))b_{2k-1} \end{aligned}$$

Proposición 4.12 *Si la función de perturbación $f(x, x't)$ es lipschitziana en las variables x, x', entonces el método II MDFpE para osciladores perturbados es estable.*

D/.

Análoga al caso anterior, considerando las matrices: $\begin{pmatrix} 0 & 2h \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, y la matriz identidad de orden (2×2).

Métodos de orden bajo

1. Método de orden uno, formulado a partir del método II de $p = 2$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2hx_n^{'} + 2\varepsilon(\varphi_3(h) + \beta^2\varphi_5(h))g\,[t_n, t_{n-1}] \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'} + 2\varepsilon(\varphi_2(h) + \beta^2\varphi_4(h))g\,[t_n, t_{n-1}] \end{aligned}$$

1. Método de orden dos, formulado a partir del método I de $p = 3$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n + 2\varepsilon\left((\varphi_2(h) + \beta^2\varphi_4(h))g\,[t_n] + (\varphi_4(h) + \beta^2\varphi_6(h))g\,[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}]\right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} + 2\varepsilon\left((\varphi_2^{'}(h) + \beta^2\varphi_3(h))g\,[t_n] + (\varphi_3(h) + \beta^2\varphi_5(h))g\,[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}]\right) \end{aligned}$$

4.6.4 Caso IV $\alpha = \beta \neq 0$

Método I Explícito de un número impar de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n\cos\alpha h + 2\varepsilon\left(b_0\varphi_2(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(b_{2k} + \alpha^2 b_{2k-2})\varphi_{2k+2}(h) + \alpha^2 b_{p-1}\varphi_{p+3}(h)\right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} - 2\alpha x_n\sin\alpha h + 2\varepsilon\left(b_0\varphi_2^{'}(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(b_{2k} + \alpha^2 b_{2k-2})\varphi_{2k+1}(h) + \alpha^2 b_{p-1}\varphi_{p+2}(h)\right) \end{aligned}$$

Reagrupando, convenientemente los términos, obtenemos una formulación más compacta, que expresaremos del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n \cos\alpha h + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} (\varphi_{2k}(h) + \alpha^2 \varphi_{2k+2}(h)) b_{2k-2} \\
x'_{n+1} &= x'_{n-1} - 2\alpha x_n \sin\alpha h + 2\varepsilon \left((\varphi'_2(h) + \alpha^2 \varphi_3(h)) b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (\varphi_{2k+1}(h) + \alpha^2 \varphi_{2k+3}(h)) b_{2k} \right)
\end{aligned}
$$

Proposición 4.13 *Si la función de perturbación $f(x, x't)$ es lipschitziana en las variables x, x', entonces el método I MDFpE para osciladores perturbados es estable.*

D/.

Análoga al caso I .♣

Método II Explícito de un número par de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x'_n}{\alpha} \sin(\alpha h) + \\
&\quad + 2\varepsilon \left(b_1 \varphi_3(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}} (b_{2k+1} + \alpha^2 b_{2k-1}) \varphi_{2k+3}(h) + \alpha^2 b_{p-1} \varphi_{p+3}(h) \right) \\
x'_{n+1} &= -x'_{n-1} + 2x'_n \cos(\alpha h) + \\
&\quad + 2\varepsilon \left(b_1 \varphi_2(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}} (b_{2k+1} + \alpha^2 b_{2k-1}) \varphi_{2k+2}(h) + \alpha^2 b_{p-1} \varphi_{p+2}(h) \right)
\end{aligned}
$$

Reagrupando, convenientemente los términos, obtenemos una formulación más compacta, que expresaremos del modo siguiente:

$$
x_{n+1} = x_{n-1} + 2\frac{x'_n}{\alpha} \sin\alpha h + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} (\varphi_{2k+1}(h) + \alpha^2 \varphi_{2k+3}(h)) b_{2k-1}
$$

$$x_{n+1}^{'} = -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'}\cos\alpha h + 2\varepsilon\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}}(\varphi_{2k}(h) + \alpha^2\varphi_{2k+2}(h))b_{2k-1}$$

Proposición 4.14 *Si la función de perturbación $f(x, x^{'}t)$ es lipschitziana en las variables $x, x^{'}$, entonces el método II MDFpE para osciladores perturbados es estable.*

D/.

Análoga al caso I.♣

Métodos de orden bajo

1. Método de orden uno, formulado a partir del método II de $p = 2$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x_n^{'}}{\alpha}\sin\alpha h + 2\varepsilon(\varphi_3(h) + \alpha^2\varphi_5(h))g\,[t_n, t_{n-1}] \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'}\cos\alpha h + 2\varepsilon(\varphi_2(h) + \alpha^2\varphi_4(h))g\,[t_n, t_{n-1}] \end{aligned}$$

2. Método de orden dos, formulado a partir del método I de $p = 3$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n\cos(\alpha h) + \\ &\quad +2\varepsilon\left((\varphi_2(h) + \alpha^2\varphi_4(h))g\,[t_n] + (\varphi_4(h) + \alpha^2\varphi_6(h))g\,[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}]\right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} - 2\alpha x_n\sin(\alpha h) + \\ &\quad +2\varepsilon\left((\varphi_2^{'}(h) + \alpha^2\varphi_3(h))g\,[t_n] + (\varphi_3(h) + \alpha^2\varphi_5(h))g\,[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}]\right) \end{aligned}$$

4.6.5 Caso V $\alpha = \beta = 0$

Método I Explícito de un número impar de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n + 2\varepsilon \left(\varphi_2(h) b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi_{2k+2}(h) b_{2k} \right) \\
x'_{n+1} &= x'_{n-1} + 2\varepsilon \left(\varphi'_2(h) b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi_{2k+1}(h) b_{2k} \right)
\end{aligned}
$$

Reagrupando, convenientemente los términos, obtenemos una formulación más compacta, que expresaremos del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} \varphi_{2k}(h) b_{2k-2} \\
x'_{n+1} &= x'_{n-1} + 2\varepsilon \left(b_0 \varphi'_2(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi_{2k+1}(h) b_{2k} \right)
\end{aligned}
$$

Proposición 4.15 *Si la función de perturbación $f(x, x't)$ es lipschitziana en las variables x, x', entonces el método I MDFpE para osciladores perturbados es estable.*

D/.

Análoga al caso III .♣

Método II Explícito de un número par de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_{n-1} + 2hx'_n + 2\varepsilon \left(b_1 \varphi_3(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}} b_{2k+1} \varphi_{2k+3}(h) \right) \\
x'_{n+1} &= -x'_{n-1} + 2x'_n + 2\varepsilon \left(b_1 \varphi_2(h) + \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}} b_{2k+1} \varphi_{2k+2}(h) \right)
\end{aligned}
$$

Reagrupando, convenientemente los términos, obtenemos una formulación más compacta, que expresaremos del modo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2hx_n^{'} + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} b_{2k-1}\varphi_{2k+1}(h) \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'} + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} b_{2k-1}\varphi_{2k}(h) \end{aligned}$$

Proposición 4.16 *Si la función de perturbación $f(x, x^{'}t)$ es lipschitziana en las variables $x, x^{'}$, entonces el método II MDFpE para osciladores perturbados es estable.*

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

D/.

Análoga al caso III .♣

Métodos de orden bajo

1. Método de orden uno, formulado a partir del método II de $p = 2$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2hx_n^{'} + 2\varepsilon\varphi_3(h)g\left[t_n, t_{n-1}\right] \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'} + 2\varepsilon\varphi_2(h)g\left[t_n, t_{n-1}\right] \end{aligned}$$

2. Método de orden dos, formulado a partir del método I de $p = 3$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n + 2\varepsilon\left(\varphi_2(h)g\left[t_n\right] + \varphi_4(h)g\left[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}\right]\right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} + 2\varepsilon\left(b_0\varphi_2^{'}(h) + \varphi_3(h)g\left[t_n, t_{n-1}, t_{n-2}\right]\right) \end{aligned}$$

4.7 Método multipaso implícito MDFpI para osciladores perturbados

Si queremos definir un esquema, implícito, de p pasos, utilizando el Método I, truncaremos las series correspondientes, de forma que el mayor orden de derivación de la función de perturbación que aparezca, sea p, luego:

$$2k \leqslant p \Longrightarrow k \leqslant \frac{p}{2}$$

de manera que k será un número entero si y solamente si p es par.

En el caso de querer definir un esquema, implícito, de p pasos, utilizando el Método II, truncaremos las series correspondientes, de forma que el mayor orden de derivación de la función de perturbación que aparezca, sea p, luego:

$$2k+1 \leqslant p \Longrightarrow k \leqslant \frac{p-1}{2}$$

de modo que k será un número entero si y solamente si p es impar.

Dado que el elemento, $(1, j+1)$ de la matriz Z^t es

$$g^{j)}(nh) = \sum_{i=1}^{p+1} g[t_{n+1}, ..., t_{n+1-(i-1)}] d_{i,j+1}(i-1)! \text{ con } j = 0, ..., p$$

y como

$$d_{i,j} = \frac{(j-1)!\sigma_{j,i}}{(i-1)!} \in B_p^{-t}$$

donde $\sigma_{i,j}$ es el elemento (i,j) de la matriz $S_{p,n+1}$, obtenemos:

$$b_j = g^{j)}(nh) = j! \sum_{i=1}^{p+1} \sigma_{j+1,i}(n) g[t_{n+1}, ..., t_{n+1-(i-1)}]$$

Las expresiones de los Métodos I y II implícitos, en todos los casos, se formulan de manera análoga a los métodos I y II explícitos, utilizando las b_j obtenidas en la expresión anterior.

Para la definición de los métodos implícitos, en cada uno de los casos, se utiliza la siguiente notación:

- x_{n-1}, y x_n, son las aproximaciones del valor de la solución en los puntos t_{n-1}, y t_n respectivamente.

- x'_{n-1}, y x'_n, son las aproximaciones del valor de la derivada de la solución en los puntos t_{n-1}, y t_n respectivamente.

- $b_j = g^{j)}(nh) = j! \sum_{i=1}^{p+1} \sigma_{j+1,i}(n) g[t_{n+1}, ..., t_{n+1-(i-1)}]$ donde $\sigma_{i,j}$ es el elemento (i, j) de la matriz $S_{p,n+1}$.

- Inicialización para x: $x_0, \ldots, x_{p-1}$.

- Inicialización para x' : $x'_0, \ldots, x'_{p-1}$.

Seguidamente se exponen las expresiones formales de los métodos I y II implícitos, en los distintos casos, así como los métodos de orden bajo.

4.7.1 Caso I $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$

Método I Implícito de un número par de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las

ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n \cos\alpha h + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+2}{2}} (\varphi_{2k}(h) + \beta^2 \varphi_{2k+2}(h)) b_{2k-2} \\ x'_{n+1} &= x'_{n-1} - 2\alpha x_n \sin\alpha h + 2\varepsilon \left((\varphi'_2(h) + \beta^2 \varphi_3(h)) b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} (\varphi_{2k+1}(h) + \beta^2 \varphi_{2k+3}(h)) b_{2k} \right) \end{aligned}$$

Método II Implícito de un número impar de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x'_n}{\alpha} \sin\alpha h + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} (\varphi_{2k+1}(h) + \beta^2 \varphi_{2k+3}(h)) b_{2k-1} \\ x'_{n+1} &= -x'_{n-1} + 2x'_n \cos\alpha h + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} (\varphi_{2k}(h) + \beta^2 \varphi_{2k+2}(h)) b_{2k-1} \end{aligned}$$

Métodos de orden bajo

1. Método de orden uno, formulado a partir del método II de $p = 1$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x'_n}{\alpha} \sin\alpha h + 2\varepsilon(\varphi_3(h) + \beta^2 \varphi_5(h)) g\left[t_{n+1}, t_n\right] \\ x'_{n+1} &= -x'_{n-1} + 2x'_n \cos\alpha h + 2\varepsilon(\varphi_2(h) + \beta^2 \varphi_4(h)) g\left[t_{n+1}, t_n\right] \end{aligned}$$

2. Método de orden dos, formulado a partir del método I de $p = 2$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n \cos\alpha h + \\ &\quad + 2\varepsilon(\varphi_2(h) + \beta^2 \varphi_4(h)) \left(g\left[t_{n+1}\right] - hg\left[t_{n+1}, t_n\right]\right) \\ &\quad + 4\varepsilon \left(\varphi_4(h) + \beta^2 \varphi_6(h)) g\left[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}\right]\right) \\ x'_{n+1} &= x'_{n-1} - 2\alpha x_n \sin\alpha h + \end{aligned}$$

$$+2\varepsilon(\varphi_2^{'}(h)+\beta^2\varphi_3(h))\left(g\left[t_{n+1}\right]-hg\left[t_{n+1},t_n\right]\right)$$

$$+4\varepsilon\left(\varphi_3(h)+\beta^2\varphi_5(h))g\left[t_{n+1},t_n,t_{n-1}\right]\right)$$

4.7.2 Caso II $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$

Método I Implícito de un número par de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1}+2x_n\cos\alpha h+2\varepsilon\sum_{k=1}^{\frac{p+2}{2}}\varphi_{2k}(h)b_{2k-2} \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'}-2\alpha x_n\sin\alpha h+2\varepsilon\left(\varphi_2^{'}(h)b_0+\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}}\varphi_{2k+1}(h)b_{2k}\right) \end{aligned}$$

Método II Implícito de un número impar de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1}+2\frac{x_n^{'}}{\alpha}\sin\alpha h+2\varepsilon\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}}\varphi_{2k+1}(h)b_{2k-1} \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'}+2x_n^{'}\cos\alpha h+2\varepsilon\sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}}\varphi_{2k}(h)b_{2k-1} \end{aligned}$$

Métodos de orden bajo

1. Método de orden uno, formulado a partir del método II de $p=1$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1}+2\frac{x_n^{'}}{\alpha}\sin\alpha h+2\varepsilon\varphi_3(h)g\left[t_{n+1},t_n\right] \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'}+2x_n^{'}\cos\alpha h+2\varepsilon\varphi_2(h)g\left[t_{n+1},t_n\right] \end{aligned}$$

2. Método de orden dos, formulado a partir del método I de $p = 2$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n \cos(\alpha h) + \\ &\quad +2\varepsilon\left(\varphi_2(h)\left(g\left[t_{n+1}\right] - hg\left[t_{n+1}, t_n\right]\right) + 2\varphi_4(h) g\left[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}\right]\right) \\ x'_{n+1} &= x'_{n-1} - 2\alpha x_n \sin(\alpha h) + \\ &\quad +2\varepsilon\left(\varphi'_2(h)\left(g\left[t_{n+1}\right] - hg\left[t_{n+1}, t_n\right]\right) + 2\varphi_3(h) g\left[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}\right]\right) \end{aligned}$$

4.7.3 Caso III $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$

Método I Implícito de un número par de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+2}{2}} (\varphi_{2k}(h) + \beta^2 \varphi_{2k+2}(h)) b_{2k-2} \\ x'_{n+1} &= x'_{n-1} + 2\varepsilon \left((\varphi'_2(h) + \beta^2 \varphi_3(h)) b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} (\varphi_{2k+1}(h) + \beta^2 \varphi_{2k+3}(h)) b_{2k} \right) \end{aligned}$$

Método II Implícito de un número impar de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2hx'_n + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} (\varphi_{2k+1}(h) + \beta^2 \varphi_{2k+3}(h)) b_{2k-1} \\ x'_{n+1} &= -x'_{n-1} + 2x'_n + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} (\varphi_{2k}(h) + \beta^2 \varphi_{2k+2}(h)) b_{2k-1} \end{aligned}$$

Métodos de orden bajo

1. Método de orden uno, formulado a partir del método II de $p = 1$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2hx_n^{'} + 2\varepsilon(\varphi_3(h) + \beta^2\varphi_5(h))g\left[t_{n+1}, t_n\right] \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'} + 2\varepsilon(\varphi_2(h) + \beta^2\varphi_4(h))g\left[t_{n+1}, t_n\right] \end{aligned}$$

2. Método de orden dos, formulado a partir del método I de $p = 2$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n + \\ &\quad +2\varepsilon(\varphi_2(h) + \beta^2\varphi_4(h))\left(g\left[t_{n+1}\right] - hg\left[t_{n+1}, t_n\right]\right) + \\ &\quad +4\varepsilon\left(\varphi_4(h) + \beta^2\varphi_6(h))g\left[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}\right]\right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} + \\ &\quad +2\varepsilon(\varphi_2^{'}(h) + \beta^2\varphi_3(h))\left(g\left[t_{n+1}\right] - hg\left[t_{n+1}, t_n\right]\right) + \\ &\quad +4\varepsilon\left(\varphi_3(h) + \beta^2\varphi_5(h))g\left[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}\right]\right) \end{aligned}$$

4.7.4 Caso IV $\alpha = \beta \neq 0$

Método I Implícito de un número par de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n\cos\alpha h + 2\varepsilon\sum_{k=1}^{\frac{p+2}{2}}(\varphi_{2k}(h) + \alpha^2\varphi_{2k+2}(h))b_{2k-2} \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} - 2\alpha x_n\sin\alpha h + 2\varepsilon\left((\varphi_2^{'}(h) + \alpha^2\varphi_3(h))b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}}(\varphi_{2k+1}(h) + \alpha^2\varphi_{2k+3}(h))b_{2k}\right) \end{aligned}$$

Método II Implícito de un número impar de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las

ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x_n^{'}}{\alpha}\sin\alpha h + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} (\varphi_{2k+1}(h) + \alpha^2\varphi_{2k+3}(h))b_{2k-1} \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'}\cos\alpha h + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} (\varphi_{2k}(h) + \alpha^2\varphi_{2k+2}(h))b_{2k-1} \end{aligned}$$

Métodos de orden bajo

1. Método de orden uno, formulado a partir del método II de $p = 1$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2\frac{x_n^{'}}{\alpha}\sin\alpha h + 2\varepsilon(\varphi_3(h) + \alpha^2\varphi_5(h))g\left[t_{n+1}, t_n\right] \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'}\cos\alpha h + 2\varepsilon(\varphi_2(h) + \alpha^2\varphi_4(h))g\left[t_{n+1}, t_n\right] \end{aligned}$$

2. Método de orden dos, formulado a partir del método I de $p = 2$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n\cos\alpha h + 2\varepsilon\left((\varphi_2(h) + \alpha^2\varphi_4(h))\left(g\left[t_{n+1}\right] - hg\left[t_{n+1}, t_n\right]\right) + \right. \\ &\quad \left. +2(\varphi_4(h) + \alpha^2\varphi_6(h))g\left[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}\right]\right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} - 2\alpha x_n\sin\alpha h + 2\varepsilon\left((\varphi_2^{'}(h) + \alpha^2\varphi_3(h))\left(g\left[t_{n+1}\right] - hg\left[t_{n+1}, t_n\right]\right) + \right. \\ &\quad \left. +2(\varphi_3(h) + \alpha^2\varphi_5(h))g\left[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}\right]\right) \end{aligned}$$

4.7.5 Caso V $\alpha = \beta = 0$

Método I Implícito de un número par de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n + 2\varepsilon\left(\varphi_2(h)b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{p+2}{2}} \varphi_{2k}(h)b_{2k-2}\right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} + 2\varepsilon\left(\varphi_2^{'}(h)b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{p}{2}} \varphi_{2k+1}(h)b_{2k}\right) \end{aligned}$$

Método II Implícito de un número impar de pasos p, para osciladores armónicos perturbados, libres en una frecuencia y forzada en la otra. Se formula, mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2hx_n^{'} + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} \varphi_{2k+1}(h) b_{2k-1} \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'} + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} \varphi_{2k}(h) b_{2k-1} \end{aligned}$$

Métodos de orden bajo

1. Método de orden uno, formulado a partir del método II de $p = 1$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + 2hx_n^{'} + 2\varepsilon\varphi_3(h) g\left[t_{n+1}, t_n\right] \\ x_{n+1}^{'} &= -x_{n-1}^{'} + 2x_n^{'} + 2\varepsilon\varphi_2(h) g\left[t_{n+1}, t_n\right] \end{aligned}$$

2. Método de orden dos, formulado a partir del método I de $p = 2$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_{n-1} + 2x_n + 2\varepsilon \left(\varphi_2(h) \left(g\left[t_{n+1}\right] - hg\left[t_{n+1}, t_n\right]\right) + 2\varphi_4(h) g\left[t_{n+1}, t_n, t_{n-1}\right]\right) \\ x_{n+1}^{'} &= x_{n-1}^{'} + 2\varepsilon \left(\varphi_2^{'}(h) \left(g\left[t_{n+1}\right] - hg\left[t_{n+1}, t_n\right]\right) + 2\varphi_3(h) g\left[t_{n+1}, t_n, t_n\right]\right) \end{aligned}$$

4.8 Método multipaso predictor corrector MDFpPC para osciladores perturbados

Definición 4.7 *Definimos el método predictor-corrector de p pasos MDFpPC para osciladores perturbados como el que tiene como predictor a MDFpE y como corrector a MDFpI.*

El método predictor corrector empleado, es del tipo $P(EC)^{\mu}E^{1-t}$ con $t = 1$ y μ entero positivo, es decir un predictor, μ evaluador corrector, $P(EC)^{\mu}$ [43]. Al aplicar el $P(EC)^{\mu}$ para obtener corrección de convergencia, se observa que si $x_n^{[j]}$ es la j-ésima correción de x_n y $\mu = 2$, entonces $\left|x_n^{[2]} - x_n^{[1]}\right|$ es suficientemente pequeño y el cálculo de $x_n^{[2]}$ incrementa significativamente el coste computacional.

4.8.1 Códigos para los método MDFpPC.

Para los métodos definidos en los cinco casos anteriores:

Las variables de entrada son:

Número de pasos del método: p

Número de iteraciones: n

Tamaño de paso: h

Ecuación: ecu

Condiciones iniciales: init

Función de perturbación: f.

Para el cálculo de las φ-funciones, en cada uno de los casos, se utilizan los algoritmos descritos en el capítulo 2 de esta memoria.

Se implementan las matrices recurrentes A_p^{-t} y B_p^{-t}, mediante las fórmulas descritas en la sección: "Cálculo recurrente de las matrices A_p^{-t} y B_p^{-t}." , de este capítulo.

Como inicializador del código, se ha utilizado el LSODE[adamsfunc] de Maple V.

Se obtiene la tabla de diferencias divididas, en los i primeros puntos con $i = 0, ..., p-1$.

Aplicando las definiciones de los métodos anteriores en cada uno de los casos, calculamos la aproximación $\mathbf{x}_n$, que permite escribir la siguiente línea de la tabla de diferencias divididas y obtener la aproximación $\mathbf{x}_{n+1}$.

Tomando la fila p de la tabla de diferencias divididas y empleando el método implícito, en cada uno de los casos, calculamos una corrección.Si el método es de p pasos con p impar, utilizaremos como predictor el método I y como corrector el método II; si el método es de p pasos con p par, utilizaremos como predictor el método II y como corrector el método I;

Ver Anexos I, II, III, IV y V.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

4.9 Ejemplos numéricos

4.9.1 Ejemplo 1

Consideremos el problema siguiente:

$$x''(t) + 2x(t) = \sin(t)$$

con las condiciones iniciales:

$$x(0) = 1 \quad x'(0) = 1$$

cuya solución exacta viene dada por:

$$x(t) = \cos(\sqrt{2}t) + \sin(t)$$

y con derivada:

$$x'(t) = -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + \cos(t)$$

Aplicando a la ecuación diferencial, el operador $D^2 + \beta^2$, donde $\beta = 1$, anulamos la función de perturbación, obteniendo una ecuación diferencial de cuarto grado homogénea.

Resolviendo mediante el Método I explícito de 17 pasos y 11 φ-funciones, utilizando un tamaño de paso $h = 0.2$ y 500 iteraciones, en la figura n^o 4.12, se representa la gráfica del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución conseguida mediante el método y contrastada con el logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución calculada mediante el código LSODE de $tol = 10^{-15}$. En la figura n^o 4.13. se hace una representación análoga para la derivada.

BIBLIOTECA VIRTUAL

Obteniéndose los tiempos de acceso a la CPU, siguientes:

LSODE	696.73 seg.
Método adaptado ($MDF_{17}E$)	38.93 seg.

Resolviendo mediante el Método I predictor corrector de 17 pasos y 11 φ-funciones, utilizando un tamaño de paso $h = 0.2$ y 500 iteraciones, en la figura n^o 4.14, se representa la gráfica del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución conseguida mediante el método y contrastada con el logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución calculada mediante el código LSODE de $tol = 10^{-15}$. En la figura n^o 4.15. se hace una representación análoga para la derivada.

Los tiempos de CPU, obtenidos son:

LSODE	696.73 seg.
Método adaptado ($MDF_{17}PC$)	80.78 seg.

Se observa, el aumento significativo de coste computacional, en el predictor corrector, con una sola corrección.

En la figura nº 4.16, se representa la gráfica del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución conseguida mediante el Método I predictor corrector de 15 pasos y 10 φ-funciones, utilizando un tamaño de paso $h = 0.1$ y 1000 iteraciones, contrastada con el logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución conseguida mediante los métodos:

- MGEAR (Maple V), con errorper = Float(1,-13).
- LSODE[backfunc] (Maple V), con tolerancia 10^{-17}.
- GEAR (Maple V), con errorper = Float(1,-13).

En la figura nº 4.17. se hace una representación análoga para la derivada.

Obteniéndose los tiempos de acceso a la CPU, siguientes:

MGEAR	168.25 seg.
LSODE	1902.72 seg.
GEAR	223.41 seg.
Método adaptado ($MDF_{15}PC$)	180.74 seg.

4.9.2 Ejemplo 2

Sea el oscilador:

$$x^{''}(t) + x(t) = \cos(100t)$$

con las condiciones iniciales:

$$x(0) = \frac{9998}{9999} \quad x^{'}(0) = 1$$

de solución exacta:

$$x(t) = \cos(t) + \sin(t) - \frac{\cos(100t)}{9999}$$

y con derivada:

$$x^{'}(t) = -\sin(t) + \cos(t) + \frac{100\sin(100t)}{9999}$$

Aplicando a la ecuación diferencial, el operador $D^2 + \beta^2$, donde $\beta = 100$, anulamos la función de perturbación, obteniendo una ecuación diferencial de cuarto grado homogénea.

Resolviendo mediante el Método I explícito de 17 pasos y 11 φ-funciones, utilizando un tamaño de paso $h = 10^{-3}$ y 1000 iteraciones, en la figura n^o 4.18, se representa la gráfica del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución conseguida mediante el método y contrastada con el logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución calculada mediante el código LSODE de $tol = 10^{-18}$. En la figura n^o 4.19. se hace una representación análoga para la derivada.

Los tiempos de CPU, son:

LSODE	641.01 seg.
Método adaptado ($MDF_{17}E$)	116.54 seg.

En la figura n^o 4.20, se representa la gráfica del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución conseguida mediante el Método I predictor corrector de 15 pasos y 10 φ-funciones, utilizando un tamaño de paso $h = 0.001$ y 1000 iteraciones, contrastada con el logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución conseguida mediante los métodos:

- MGEAR (Maple V), con errorper = Float(1,-13).

- LSODE[backfunc] (Maple V), con tolerancia 10^{-17}.

- GEAR (Maple V), con errorper = Float(1,-13).

En la figura n^o 4.21. se hace una representación análoga para la derivada.

En la figura n^o 4.22 y 4.23 se exponen los gráficos de tiempo de acceso a la CPU, del método predictor-corrector, para las soluciones $x(t)$ y $x'(t)$, respectivamente.

4.9.3 Ejemplo 3

Sea el PVI:

$$\begin{aligned} x'' + x &= \varepsilon x^3 \\ x(0) &= 0 \\ x'(0) &= 1 \end{aligned}$$

con integral primera

$$F(x, x') = \frac{1}{2}\left(x^2 + x'^2\right) - \frac{\varepsilon}{4}x^4$$

Aplicando a la ecuación diferencial, el operador $D^2 + \beta^2$, donde $\beta = 0$, caso II, obtenemos una ecuación diferencial de cuarto grado.

Resolviendo mediante el Método I predictor-corrector de 15 pasos y 9 φ-funciones, utilizando un tamaño de paso $h = 0.1$, $\varepsilon = 10^{-3}$ y 1000 iteraciones, en la figura n^o 4.24, se representa la gráfica del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo, contrastada con el logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo calculado mediante el código LSODE de $tol = 10^{-18}$.

En la figura n^o 4.25, se representa la gráfica del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo conseguido mediante el Método I predictor corrector de 17

pasos y 11 φ-funciones, utilizando un tamaño de paso $h = 0.01$, $\varepsilon = 10^{-3}$ y 1000 iteraciones, contrastado con el logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo obtenido mediante los métodos:

- MGEAR (Maple V), con errorper = Float(1,-15).
- LSODE[backfunc] (Maple V), con tolerancia 10^{-18}.
- GEAR (Maple V), con errorper = Float(1,-13).

4.9.4 Ejemplo 4

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Los métodos anteriores permiten integrar ecuaciones más generales, del tipo:

$$x'' + P(x, x', t)x = g(x, x', t)$$

para ello consideraremos la ecuación:

$$x'' = \widehat{g}(x, x', t)$$

con nueva función de perturbación:

$$\widehat{g}(x, x', t) = g(x, x', t) - P(x, x', t)x.$$

a la que le aplicaríamos los métodos anteriores correspondientes al caso III.

Sea el PVI:

$$\begin{aligned} x'' - x(x+1) &= x\cos(t) \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 0 \end{aligned}$$

con solución exacta:

$$x(t) = \cos(t)$$

y con derivada:

$$x'(t) = -\sin(t)$$

que expresamos como:

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

$$\begin{aligned} x'' &= x\cos(t) + x(x+1) \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 0 \end{aligned}$$

para poder aplicar el caso III.

En la figura nº 4.26, se representa la gráfica del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución conseguida mediante el Método I predictor corrector de 17 pasos y 11 φ-funciones, utilizando un tamaño de paso $h = 0.01$ y 1000 iteraciones, contrastada con el logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución conseguida mediante los métodos:

- MGEAR (Maple V), con errorper = Float(1,-14).

- LSODE[backfunc] (Maple V), con tolerancia 10^{-18}.

- GEAR (Maple V), con errorper = Float(1,-13).

En la figura nº 4.27. se hace una representación análoga para la derivada.

4.9.5 Ejemplo 5

Consideremos el siguiente problema, altamente oscilatorio, propuesto por G. Denk [11]:

$$\begin{aligned} x'' + \varkappa^2 x &= \varkappa^2 t \\ x(0) &= 10^{-5} \\ x'(0) &= 1 - \varkappa 10^{-5} \frac{\cos(\varkappa)}{\sin(\varkappa)} \\ \varkappa &= 314.16 \end{aligned}$$

con solución exacta:

$$x(t) = t + 10^{-5}\left(\cos(\varkappa t) - \frac{\cos(\varkappa)}{\sin(\varkappa)}\sin(\varkappa t)\right)$$

y derivada:

$$x'(t) = 1 - 10^{-5}\varkappa\left(\sin(\varkappa t) + \frac{\cos(\varkappa)}{\sin(\varkappa)}\cos(\varkappa t)\right)$$

Aplicando a la ecuación diferencial, el operador $D^2 + \beta^2$, donde $\beta = 0$, caso II, obtenemos una ecuación diferencial de cuarto grado.

Resolviendo mediante el Método I predictor-corrector de 3 pasos y 3 φ-funciones, utilizando un tamaño de paso $h = 0.01$ y 1000 iteraciones, en la figura n^o 4.28, se representa la gráfica del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución , contrastado con el logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo obtenido mediante los métodos:

- MGEAR (Maple V), con errorper = Float(1,-13).

- LSODE[backfunc] (Maple V), con tolerancia 10^{-15}.

- GEAR (Maple V), con errorper = Float(1,-15).

En la figura nº 4.29. se hace una representación análoga para la derivada.

Obteniéndose los tiempos de acceso a la CPU, siguientes:

MGEAR	726.87 seg.
LSODE	3143.05 seg.
GEAR	417.77 seg.
Método adaptado (MDF_3PC)	4.57 seg.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

4.10 Figuras Capítulo 4

4.10.1 Ejemplo 1

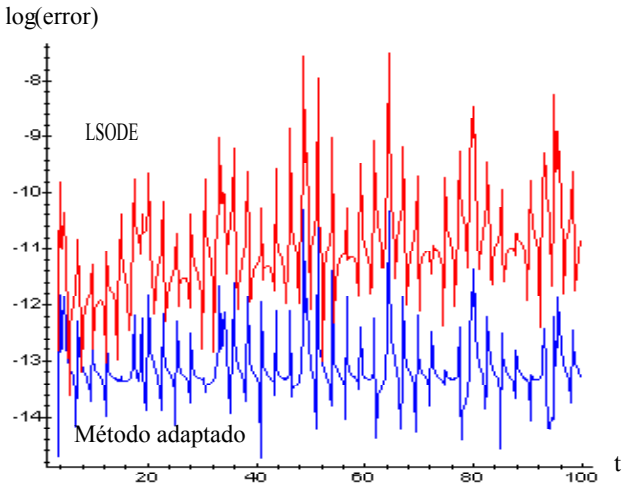


Figura nº 4.12. $x''(t) + 2x(t) = \sin(t)$ (posición)

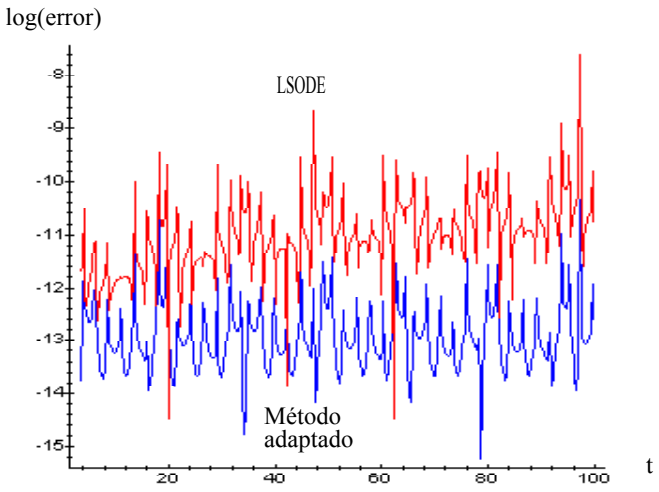


Figura nº 4.13. $x''(t) + 2x(t) = \sin(t)$ (velocidad)

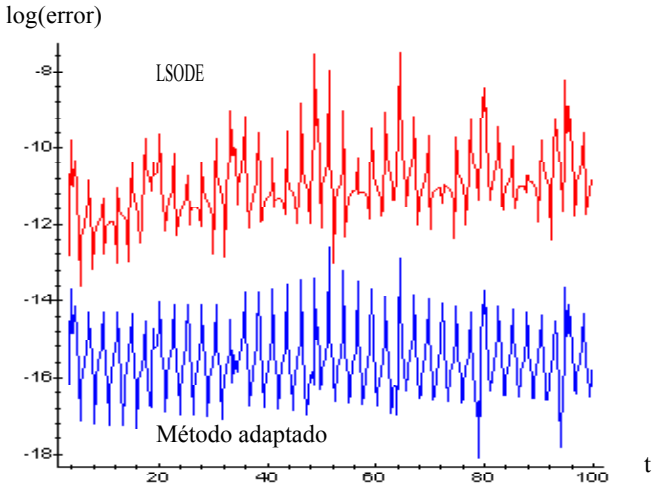


Figura n^o 4.14. $x''(t) + 2x(t) = \sin(t)$ (posición)

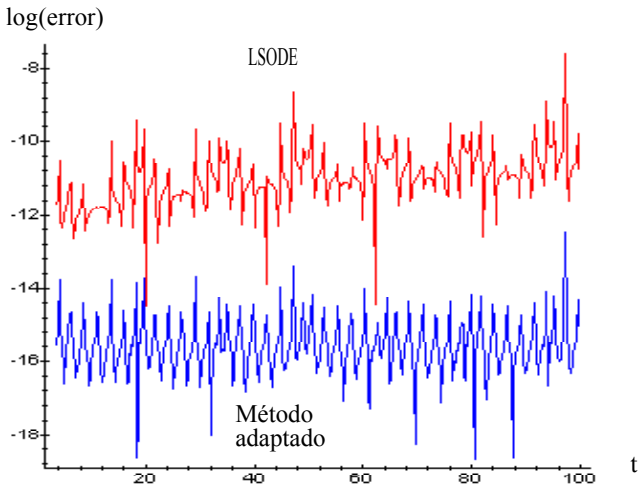


Figura n^o 4.15. $x''(t) + 2x(t) = \sin(t)$ (velocidad)

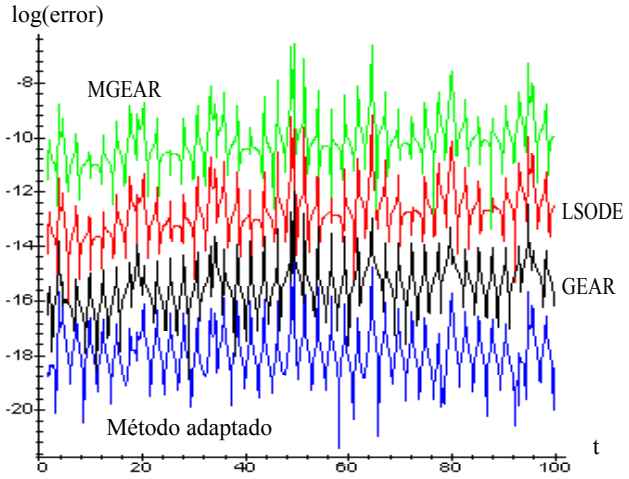


Figura n^o 4.16. $x^{''}(t) + 2x(t) = \sin(t)$ (posición)

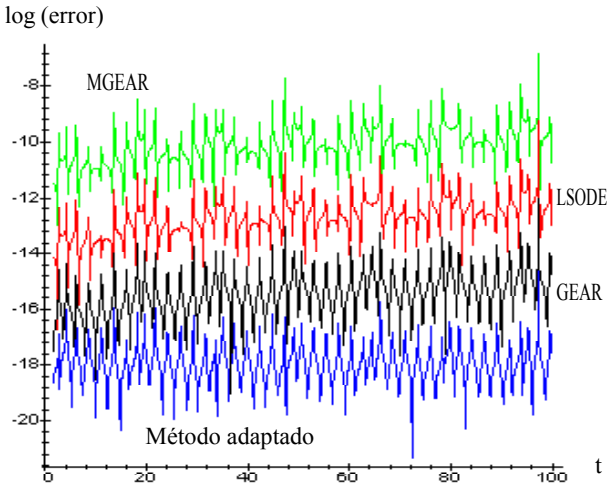


Figura n^o 4.17. $x^{''}(t) + 2x(t) = \sin(t)$ (velocidad)

4.10.2 Ejemplo 2

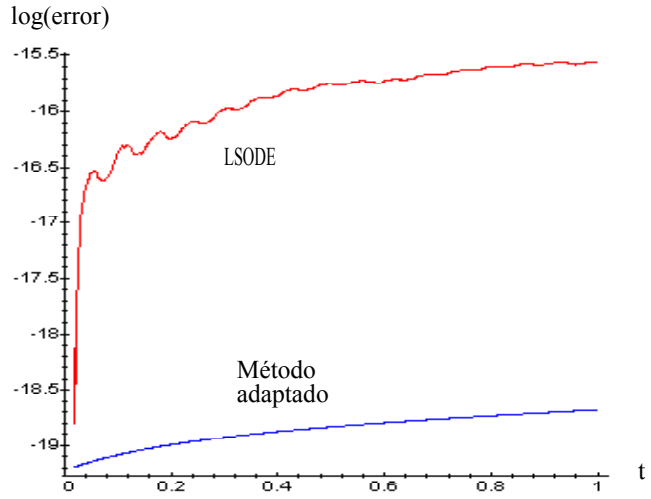


Figura nº 4.18. $x''(t) + x(t) = \cos(100t)$ (posición)

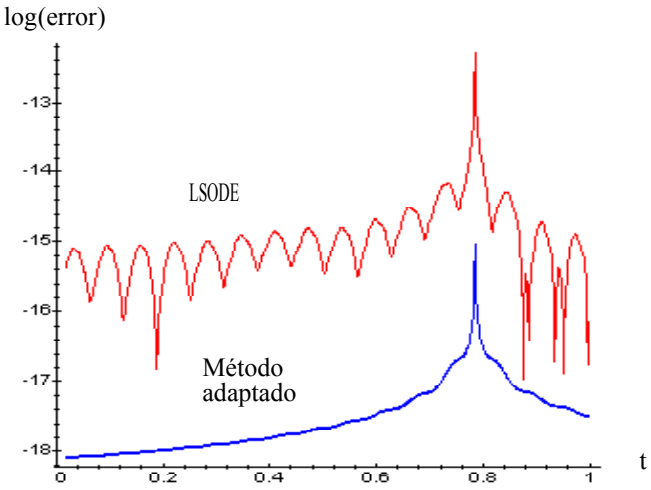


Figura nº 4.19. $x''(t) + x(t) = \cos(100t)$ (velocidad)

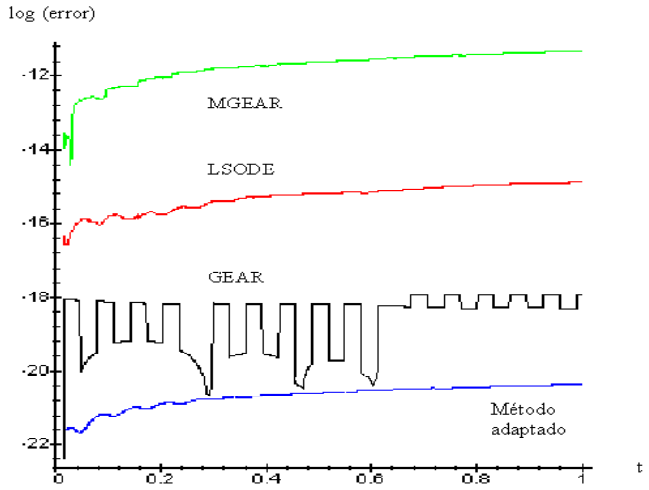


Figura n^o 4.20. $x''(t) + x(t) = \cos(100t)$ (posición)

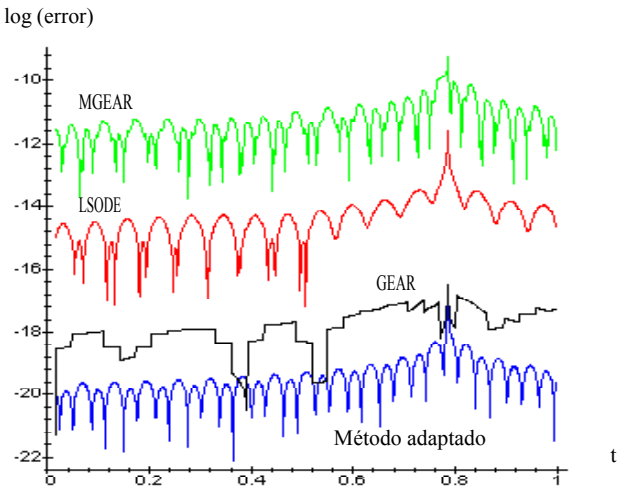


Figura n^o 4.21. $x''(t) + x(t) = \cos(100t)$ (velocidad)

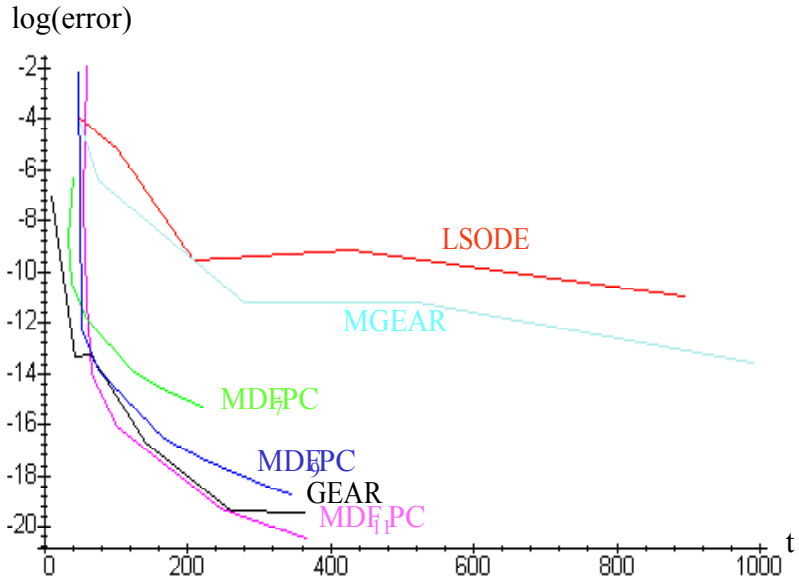


Figura nº 4.22. Gráficos de tiempo acceso CPU, (posición).

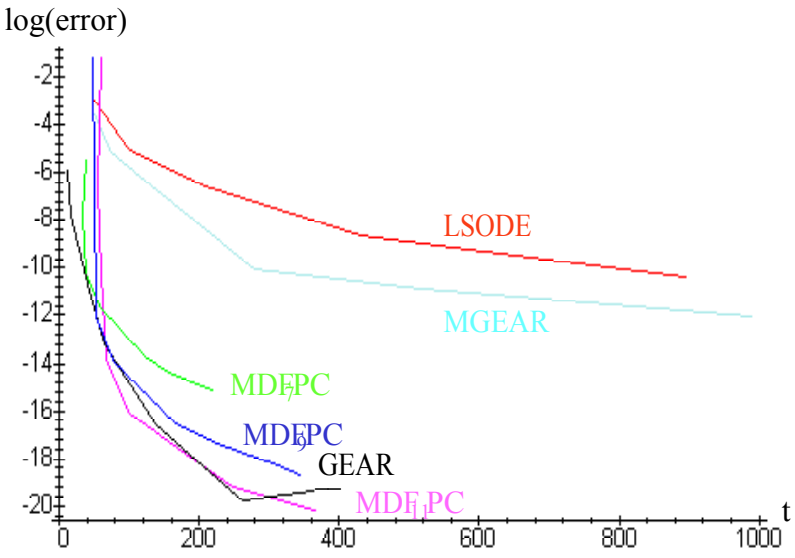


Figura nº 4.23. Gráficos de tiempo acceso CPU, (velocidad).

4.10.3 Ejemplo 3

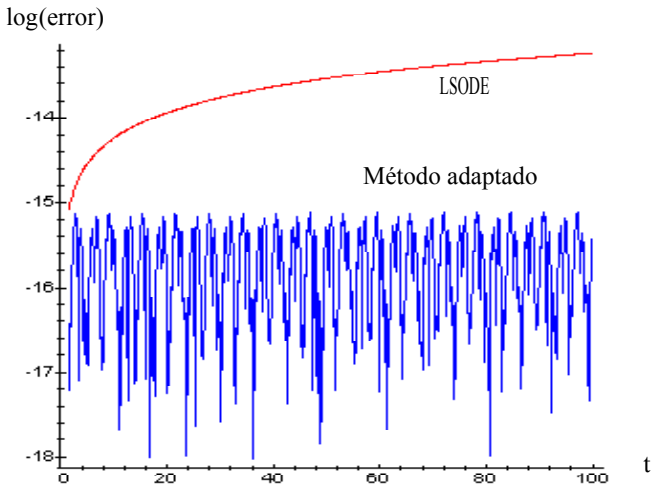


Figura nº 4.24. $x'' + x = \varepsilon x^3$, $\varepsilon = 10^{-3}$

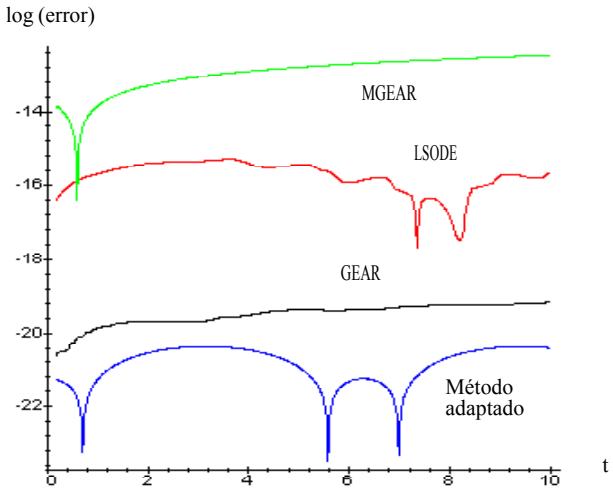


Figura nº 4.25. $x'' + x = \varepsilon x^3$, $\varepsilon = 10^{-3}$

4.10.4 Ejemplo 4

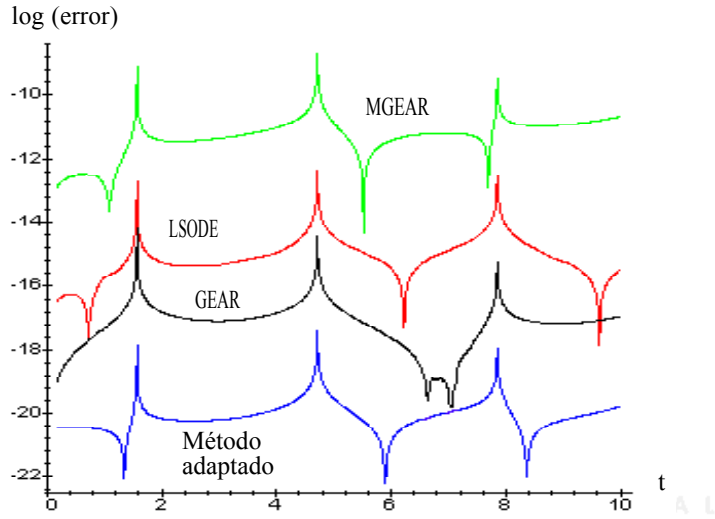


Figura nº 4.26. $x'' - x(x+1) = x\cos(t)$ (posición)

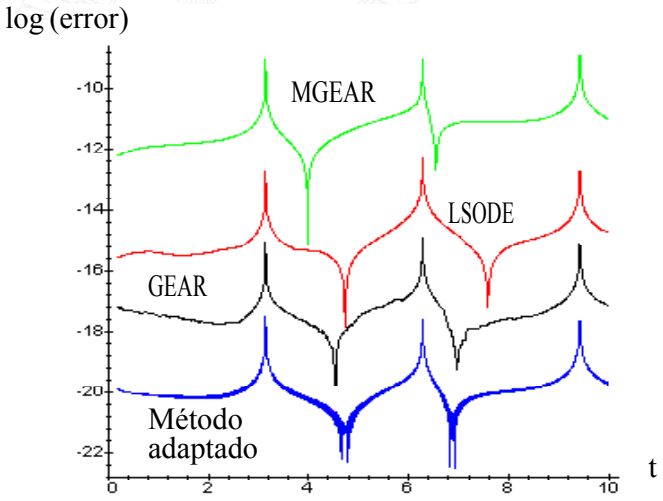


Figura nº 4.27. $x'' - x(x+1) = x\cos(t)$ (velocidad)

4.10.5 Ejemplo 5

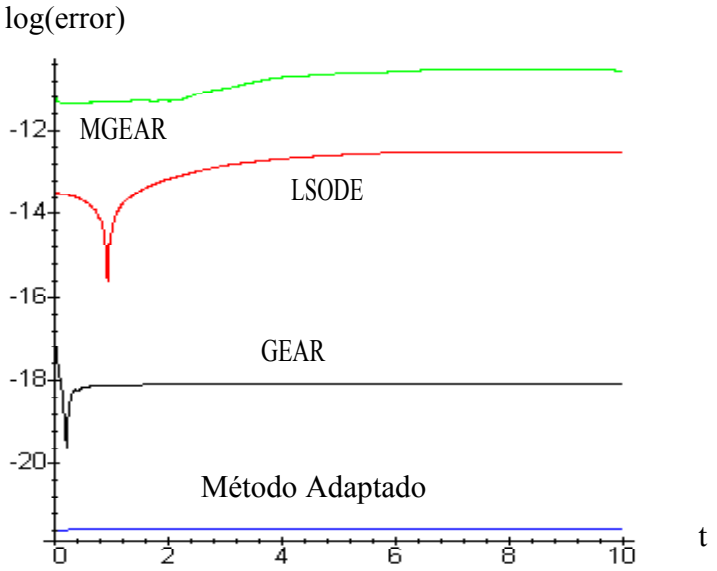


Figura nº 4.28 $x'' + \varkappa^2 x = \varkappa^2 t$ (posición)

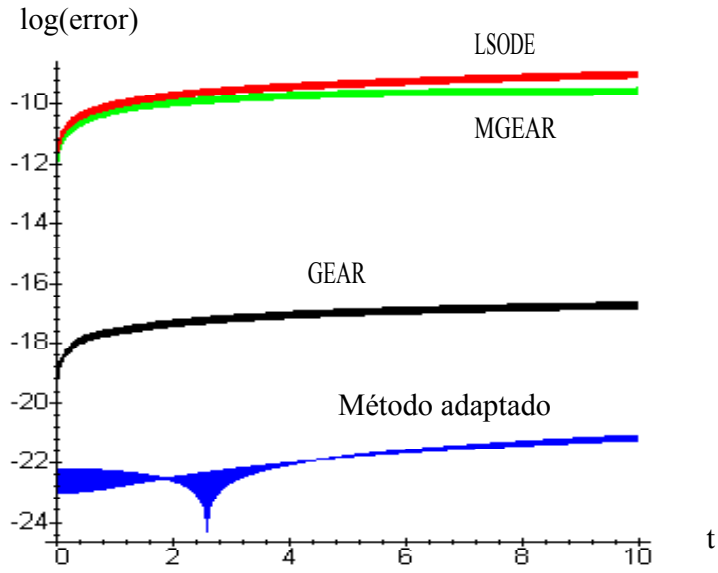


Figura nº 4.29 $x'' + \varkappa^2 x = \varkappa^2 t$ (velocidad)

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Anexo I

```
> restart:

  > Digits:=:

  > with(linalg):

  > p:=:

  > n:=:

  > h:=:
```

Ecuación.

```
  > f:=(r,xx)->:

  > alpha:=:

  > beta:=:

  > ecu:=:

  > init:=:

  > fcns :=:
```

Cálculo de las φ-funciones.

```
  > g:=array(0..p+3):

  > g[0]:=evalf(1/(alpha^2-beta^2)*(alpha^2*cos(beta*h)-beta^2*cos(alpha*h))):
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

```
> g[1]:=evalf(1/(alpha^2-beta^2)*(alpha^2/beta*sin(beta*h)-beta^2/alpha*sin(alpha*h))):

> g[2]:=evalf(1/(alpha^2-beta^2)*(cos(beta*h)-cos(alpha*h))):

> gd[2]:=evalf(1/(alpha^2-beta^2)*(alpha*sin(alpha*h)-beta*sin(beta*h))):

> g[3]:=evalf(1/(alpha^2-beta^2)*(1/beta*sin(beta*h)-1/alpha*sin(alpha*h))):

> delta:=:

> for i from 4 to p+3 do

> g[i]:=evalf(sum('(-1)^k/(2*k+i)!*(beta^(2*k+2)-

  -alpha^(2*k+2))/(beta^2-alpha^2)*h^(2*k+i)','k'=0..delta)):

> od:
```

Vectores de aproximaciones.

```
> x:=array(0..n):

> X:=array(0..n):

> xd:=array(0..n):

> Xd:=array(0..n):
```

Cálculo de la matriz recurrente método explícito.

```
> S:=array(1..p,1..p):

> S[1,1]:=1:

> for i from 2 to p do

> S[i,1]:=0:

> od:

> for j from 2 to p do

> S[1,j]:=0:

> od:
```

```
> for j from 2 to p do
> for i from 2 to p do
> S[i,j]:=S[i-1,j-1]-S[i,j-1]*(2-j)*h:
> od:
> od:
```

Cálculo de la matriz recurrente método implícito.

```
> Q:=array(1..p,1..p):
> Q[1,1]:=1:
> Q[1,2]:=-h:
> for i from 2 to p do
> Q[i,1]:=0:
> od:
> for j from 3 to p do
> Q[1,j]:=0:
> od:
> for j from 2 to p do
> for i from 2 to p do
> Q[i,j]:=Q[i-1,j-1]-Q[i,j-1]*(3-j)*h:
> od:
> od:
```

Cálculo de las diferencias divididas.

```
> t:=array(0..n):
> for i from 0 to n do t[i]:=h*i od:
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

```
> y:=array(0..n):
> for i from 0 to (p-1) do y[i]:=evalf(f(t[i],x[i])) od:
> DIF:=array(0..n,0..(p-1)):
> for i from 0 to (p-1) do DIF[i,0]:=y[i] od:
> for j from 1 to (p-1) do
> for i from j to (p-1) do
> DIF[i,j]:=(DIF[i,j-1]-DIF[i-1,j-1])/(t[i]-t[i-j]);
> od:
> od:
```

Aplicación del método predictor-corrector.

```
> a:=array(1..p):
> A=array(1..p):
> b:=array(0..p-1):
> B:=array(0..p-1):
> for i from (p-1) to (n-1) do
> for j from 1 to p do
> a[j]:=DIF[i,j-1];
> od:
> for j from 0 to p-1 do
> b[j]:=evalf(sum('a[k]*S[j+1,k]*j!','k'=1..p)):
> od:
> x[i+1]:=evalf(-x[i-1]+2*x[i]*cos(alpha*h)+2*b[0]*g[2]+2*beta^2*b[p-1]*g[p+3]+
  +2*sum('(b[2*l]+beta^2*b[2*l-2])*g[2*l+2]','l'=1..((p-1)/2))):
```

```
> xd[i+1]:=evalf(xd[i-1]-2*alpha*x[i]*sin(alpha*h)+2*b[0]*gd[2]+2*beta^2*b[p-1]*
  *g[p+2]+2*sum('(b[2*l]+beta^2*b[2*l-2])*g[2*l+1]','l'=1..((p-1)/2))):
> y[i+1]:=evalf(f(t[i+1],x[i+1])):DIF[i+1,0]:=y[i+1]:
> for k from 1 to (p-1) do
> DIF[i+1,k]:=(DIF[i+1,k-1]-DIF[i,k-1])/(t[i+1]-t[i+1-k]):
> od:
> for j from 1 to p do
> A[j]:=DIF[i+1,j-1]:
> od:
> for j from 0 to p-1 do
> B[j]:=evalf(sum('A[k]*Q[j+1,k]*j!','k'=1..p)):
> od:
> X[i+1]:=evalf(-x[i-1]+2*x[i]*cos(alpha*h)+2*B[0]*g[2]+2*beta^2*B[p-1]*g[p+3]+
  +2*sum('(B[2*l]+beta^2*B[2*l-2])*g[2*l+2]','l'=1..((p-1)/2))):
> Xd[i+1]:=evalf(xd[i-1]-2*alpha*x[i]*sin(alpha*h)+2*B[0]*gd[2]+
  +2*beta^2*B[p-1]*g[p+2]+
  +2*sum('(B[2*l]+beta^2*B[2*l-2])*g[2*l+1]','l'=1..((p-1)/2))):
> x[i+1]:=evalf(X[i+1]):
> xd[i+1]:=evalf(Xd[i+1]):
> od:
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Anexo II

```
> restart:

  > Digits:=:

  > with(linalg):

  > p:=:

  > n:=:

  > h:=:

  Ecuación

  > f:=(r,xx)->:

  > alpha:=:

  > ecu:=:

  > init:=:

  > fcns :=[]:

  Calculo de las φ-funciones.

  > g:=array(0..p+3):

  > g[0]:=1:

  > g[1]:=h:
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

```
> g[2]:=evalf((1-cos(alpha*h))/alpha^2):

> gd[2]:=evalf(sin(alpha*h)/alpha):

> g[3]:=evalf(1/alpha^2*(h-sin(alpha*h)/alpha)):

> delta:=:

> for i from 4 to p+3 do

> g[i]:=evalf(sum('(-1)^k/(2*k+i)!*alpha^(2*k)*h^(2*k+i)','k'=0..delta));

> od:
```

Vectores de aproximaciones

```
> x:=array(0..n):

> X:=array(0..n):

> xd:=array(0..n):

> Xd:=array(0..n):
```

Cálculo de la matriz recurrente del método explícito.

```
> S:=array(1..p,1..p):

> S[1,1]:=1:

> for i from 2 to p do

> S[i,1]:=0:

> od:

> for j from 2 to p do

> S[1,j]:=0:

> od:

> for j from 2 to p do

> for i from 2 to p do
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

```
> S[i,j]:=S[i-1,j-1]-S[i,j-1]*(2-j)*h:
> od:
> od:
```

Cálculo de la matriz recurrente del método implícito.

```
> Q:=array(1..p,1..p):
> Q[1,1]:=1:
> Q[1,2]:=-h:
> for i from 2 to p do
> Q[i,1]:=0:
> od:
> for j from 3 to p do
> Q[1,j]:=0:
> od:
> for j from 2 to p do
> for i from 2 to p do
> Q[i,j]:=Q[i-1,j-1]-Q[i,j-1]*(3-j)*h:
> od:
> od:
```

Cálculo de las diferencias divididas.

```
> t:=array(0..n):
> for i from 0 to n do t[i]:=h*i od:
> y:=array(0..n):
> for i from 0 to (p-1) do y[i]:=evalf(f(t[i],x[i])) od:
```

```
> DIF:=array(0..n,0..(p-1)):
> for i from 0 to (p-1) do DIF[i,0]:=y[i] od:
> for j from 1 to (p-1) do
> for i from j to (p-1) do
> DIF[i,j]:=(DIF[i,j-1]-DIF[i-1,j-1])/(t[i]-t[i-j]);
> od:
> od:
```

Aplicación del método predictor-corrector.

```
> a:=array(1..p):
> A=array(1..p):
> b:=array(0..p-1):
> B:=array(0..p-1):
> for i from (p-1) to (n-1) do
> for j from 1 to p do
> a[j]:=DIF[i,j-1];
> od:
> for j from 0 to p-1 do
> b[j]:=evalf(sum('a[k]*S[j+1,k]*j!','k'=1..p)):
> od:
> x[i+1]:=evalf(-x[i-1]+2*x[i]*cos(alpha*h)+2*b[0]*g[2]+
  +2*sum('b[2*l]*g[2*l+2]','l'=1..((p-1)/2))):
> xd[i+1]:=evalf(xd[i-1]-2*alpha*x[i]*sin(alpha*h)+2*b[0]*gd[2]+
  +2*sum('b[2*l]*g[2*l+1]','l'=1..((p-1)/2))):
```

```
> y[i+1]:=evalf(f(t[i+1],x[i+1])):DIF[i+1,0]:=y[i+1]:
> for k from 1 to (p-1) do
> DIF[i+1,k]:=(DIF[i+1,k-1]-DIF[i,k-1])/(t[i+1]-t[i+1-k]):
> od:
> for j from 1 to p do
> A[j]:=DIF[i+1,j-1]:
> od:
> for j from 0 to p-1 do
> B[j]:=evalf(sum('A[k]*Q[j+1,k]*j!','k'=1..p)):
> od:
> X[i+1]:=evalf(-x[i-1]+2*x[i]*cos(alpha*h)+2*B[0]*g[2]+
  +2*sum('B[2*l]*g[2*l+2]','l'=1..((p-1)/2))):
> Xd[i+1]:=evalf(xd[i-1]-2*alpha*x[i]*sin(alpha*h)+2*B[0]*gd[2]+
  +2*sum('B[2*l]*g[2*l+1]','l'=1..((p-1)/2))):
> x[i+1]:=evalf(X[i+1]):
> xd[i+1]:=evalf(Xd[i+1]):
> od:
```

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Anexo III

> restart:

> Digits:=:

> with(linalg):

> p:=:

> n:=:

> h:=:

Ecuación

> f:=(r,xx)->:

> beta:=:

> ecu:=:

> init:=:

> fcns :=:

Cálculo de las φ-funciones.

> g:=array(0..p+3):

> g[0]:=1:

> g[1]:=h:

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

```
> g[2]:=evalf(1/beta^2*(1-cos(beta*h))):

> gd[2]:=evalf(1/beta*sin(beta*h)):

> g[3]:=evalf(1/beta^2*(h-1/beta*sin(beta*h))):

> delta:=:

> for i from 4 to p+3 do

> g[i]:=evalf(sum('(-1)^k/(2*k+i)!*beta^(2*k)*h^(2*k+i)','k'=0..delta)):

> od:
```

Vectores de aproximaciones.

```
> x:=array(0..n):

> X:=array(0..n):

> xd:=array(0..n):

> Xd:=array(0..n):
```

Matriz recurrente del método explícito.

```
> S:=array(1..p,1..p):

> S[1,1]:=1:

> for i from 2 to p do

> S[i,1]:=0:

> od:

> for j from 2 to p do

> S[1,j]:=0:

> od:

> for j from 2 to p do

> for i from 2 to p do
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

```
> S[i,j]:=S[i-1,j-1]-S[i,j-1]*(2-j)*h:
> od:
> od:
```

Matriz recurrente del método implícito.

```
> Q:=array(1..p,1..p):
> Q[1,1]:=1:
> Q[1,2]:=-h:
> for i from 2 to p do
> Q[i,1]:=0:
> od:
> for j from 3 to p do
> Q[1,j]:=0:
> od:
> for j from 2 to p do
> for i from 2 to p do
> Q[i,j]:=Q[i-1,j-1]-Q[i,j-1]*(3-j)*h:
> od:
> od:
```

Cálculo de las diferencias divididas.

```
> t:=array(0..n):
> for i from 0 to n do t[i]:=h*i od:
> y:=array(0..n):
> for i from 0 to (p-1) do y[i]:=evalf(f(t[i],x[i])) od:
```

```
> DIF:=array(0..n,0..(p-1)):
> for i from 0 to (p-1) do DIF[i,0]:=y[i] od:
> for j from 1 to (p-1) do
> for i from j to (p-1) do
> DIF[i,j]:=(DIF[i,j-1]-DIF[i-1,j-1])/(t[i]-t[i-j]);
> od:
> od:
```

Aplicación del método.

```
> a:=array(1..p):
> A=array(1..p):
> b:=array(0..p-1):
> B:=array(0..p-1):
> for i from (p-1) to (n-1) do
> for j from 1 to p do
> a[j]:=DIF[i,j-1];
> od:
> for j from 0 to p-1 do
> b[j]:=evalf(sum('a[k]*S[j+1,k]*j!','k'=1..p)):
> od:
> x[i+1]:=evalf(-x[i-1]+2*x[i]+2*b[0]*g[2]+2*beta^2*b[p-1]*g[p+3]+
  +2*sum('(b[2*l]+beta^2*b[2*l-2])*g[2*l+2]','l'=1..((p-1)/2))):
> xd[i+1]:=evalf(xd[i-1]+2*b[0]*gd[2]+2*beta^2*b[p-1]*g[p+2]+
  +2*sum('(b[2*l]+beta^2*b[2*l-2])*g[2*l+1]','l'=1..((p-1)/2))):
```

```
> y[i+1]:=evalf(f(t[i+1],x[i+1])):DIF[i+1,0]:=y[i+1]:

> for k from 1 to (p-1) do

> DIF[i+1,k]:=(DIF[i+1,k-1]-DIF[i,k-1])/(t[i+1]-t[i+1-k]):

> od:

> for j from 1 to p do

> A[j]:=DIF[i+1,j-1]:

> od:

> for j from 0 to p-1 do

> B[j]:=evalf(sum('A[k]*Q[j+1,k]*j!','k'=1..p)):

> od:

> X[i+1]:=evalf(-x[i-1]+2*x[i]+2*B[0]*g[2]+2*beta^2*B[p-1]*g[p+3]+
  +2*sum('(B[2*l]+beta^2*B[2*l-2])*g[2*l+2]','l'=1..((p-1)/2))):

> Xd[i+1]:=evalf(xd[i-1]+2*B[0]*gd[2]+2*beta^2*B[p-1]*g[p+2]+
  +2*sum('(B[2*l]+beta^2*B[2*l-2])*g[2*l+1]','l'=1..((p-1)/2))):

> x[i+1]:=evalf(X[i+1]):

> xd[i+1]:=evalf(Xd[i+1]):

> od:
```

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Anexo IV

```
> restart:

  > Digits:=:

  > with(linalg):

  > p:=:

  > n:=:

  > h:=:

  Ecuación.

  > f:=(r,xx)->:

  > alpha:=:

  > ecu:=:

  > init:=:

  > fcns :=[]:

  Calculo de las φ-funciones.

  > g:=array(0..p+3):

  > g[0]:=evalf(cos(alpha*h)+alpha/2*h*sin(alpha*h)):

  > g[1]:=evalf(-1/2*h*cos(alpha*h)+3/(2*alpha)*sin(alpha*h)):
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

```
> g[2]:=evalf(h/(2*alpha)*sin(alpha*h)):

> gd[2]:=evalf(1/(2*alpha)*sin(alpha*h)+h/2*cos(alpha*h)):

> g[3]:=evalf(-h/(2*alpha^2)*cos(alpha*h)+1/(2*alpha^3)*sin(alpha*h)):

> delta:=:

> for i from 4 to p+3 do

> g[i]:=evalf(sum('(-1)^k/(2*k+i)!*alpha^(2*k)*(k+1)*h^(2*k+i)','k'=0..delta)):

> od:
```

Vectores de aproximaciones

```
> x:=array(0..n):

> X:=array(0..n):

> xd:=array(0..n):

> Xd:=array(0..n):
```

Cálculo de matriz recurrente del método explícito.

```
> S:=array(1..p,1..p):

> S[1,1]:=1:

> for i from 2 to p do

> S[i,1]:=0:

> od:

> for j from 2 to p do

> S[1,j]:=0:

> od:

> for j from 2 to p do

> for i from 2 to p do
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

```
> S[i,j]:=S[i-1,j-1]-S[i,j-1]*(2-j)*h:

> od:

> od:
```

Cálculo de matriz recurrente del método implícito.

```
> Q:=array(1..p,1..p):

> Q[1,1]:=1:

> Q[1,2]:=-h:

> for i from 2 to p do

> Q[i,1]:=0:

> od:

> for j from 3 to p do

> Q[1,j]:=0:

> od:

> for j from 2 to p do

> for i from 2 to p do

> Q[i,j]:=Q[i-1,j-1]-Q[i,j-1]*(3-j)*h:

> od:

> od:
```

Cálculo de las diferencias divididas.

```
> t:=array(0..n):

> for i from 0 to n do t[i]:=h*i od:

> y:=array(0..n):

> for i from 0 to (p-1) do y[i]:=evalf(f(t[i],x[i])) od:
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

```
> DIF:=array(0..n,0..(p-1)):
> for i from 0 to (p-1) do DIF[i,0]:=y[i] od:
> for j from 1 to (p-1) do
> for i from j to (p-1) do
> DIF[i,j]:=(DIF[i,j-1]-DIF[i-1,j-1])/(t[i]-t[i-j]);
> od:
> od:
```

Aplicación del método predictor-corrector.

```
> a:=array(1..p):
> A=array(1..p):
> b:=array(0..p-1):
> B:=array(0..p-1):
> for i from (p-1) to (n-1) do
> for j from 1 to p do
> a[j]:=DIF[i,j-1];
> od:
> for j from 0 to p-1 do
> b[j]:=evalf(sum('a[k]*S[j+1,k]*j!','k'=1..p)):
> od:
> x[i+1]:=evalf(-x[i-1]+2*x[i]*cos(alpha*h)+2*b[0]*g[2]+2*alpha^2*b[p-1]*g[p+3]+
   +2*sum('(b[2*l]+alpha^2*b[2*l-2])*g[2*l+2]','l'=1..((p-1)/2))):
xd[i+1]:=evalf(xd[i-1]-2*alpha*sin(alpha*h)*x[i]+2*b[0]*gd[2]+2*alpha^2*b[p-1]*g[p+2]+
   +2*sum('(b[2*l]+alpha^2*b[2*l-2])*g[2*l+1]','l'=1..((p-1)/2))):
```

```
> y[i+1]:=evalf(f(t[i+1],x[i+1])):DIF[i+1,0]:=y[i+1]:
> for k from 1 to (p-1) do
> DIF[i+1,k]:=(DIF[i+1,k-1]-DIF[i,k-1])/(t[i+1]-t[i+1-k]):
> od:
> for j from 1 to p do
> A[j]:=DIF[i+1,j-1]:
> od:
> for j from 0 to p-1 do
> B[j]:=evalf(sum('A[k]*Q[j+1,k]*j!','k'=1..p)):
> od:
> X[i+1]:=evalf(-x[i-1]+2*x[i]*cos(alpha*h)+2*B[0]*g[2]+2*alpha^2*B[p-1]*g[p+3]+
   +2*sum('(B[2*l]+alpha^2*B[2*l-2])*g[2*l+2]','l'=1..((p-1)/2))):
Xd[i+1]:=evalf(xd[i-1]-2*alpha*x[i]*sin(alpha*h)+
   +2*B[0]*gd[2]+2*alpha^2*B[p-1]*g[p+2]+
   +2*sum('(B[2*l]+alpha^2*B[2*l-2])*g[2*l+1]','l'=1..((p-1)/2))):
> x[i+1]:=evalf(X[i+1]):
> xd[i+1]:=evalf(Xd[i+1]):
> od:
```

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Anexo V

```
> restart:

  > Digits:=:

  > with(linalg):

  > p:=:

  > n:=:

  > h:=:

  Ecuación.

  > f:=(r,xx)->:

  > ecu:=:

  > init:=:

  > fcns :=[]:

  Calculo de las φ-funciones.

  > g:=array(0..p+3):

  > g[0]:=1:

  > g[1]:=evalf(h):

  > g[2]:=evalf(h^2/2):
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

```
> gd[2]:=evalf(h):

> g[3]:=evalf(h^3/3!):

> for i from 4 to p+3 do

> g[i]:=evalf(h^i/i!):

> od:
```

Vectores de aproximaciones

```
> x:=array(0..n):

> X:=array(0..n):

> xd:=array(0..n):

> Xd:=array(0..n):
```

Cálculo de matriz recurrente del método explícito.

```
> S:=array(1..p,1..p):

> S[1,1]:=1:

> for i from 2 to p do

> S[i,1]:=0:

> od:

> for j from 2 to p do

> S[1,j]:=0:

> od:

> for j from 2 to p do

> for i from 2 to p do

> S[i,j]:=S[i-1,j-1]-S[i,j-1]*(2-j)*h:

> od:
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

```
> od:
```

Cálculo de matriz recurrente del método implícito.

```
> Q:=array(1..p,1..p):
> Q[1,1]:=1:
> Q[1,2]:=-h:
> for i from 2 to p do
> Q[i,1]:=0:
> od:
> for j from 3 to p do
> Q[1,j]:=0:
> od:
> for j from 2 to p do
> for i from 2 to p do
> Q[i,j]:=Q[i-1,j-1]-Q[i,j-1]*(3-j)*h:
> od:
> od:
```

Cálculo de las diferencias divididas.

```
> t:=array(0..n):
> for i from 0 to n do t[i]:=h*i od:
> y:=array(0..n):
> for i from 0 to (p-1) do y[i]:=evalf(f(t[i],x[i])) od:
> DIF:=array(0..n,0..(p-1)):
> for i from 0 to (p-1) do DIF[i,0]:=y[i] od:
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

```
> for j from 1 to (p-1) do
> for i from j to (p-1) do
> DIF[i,j]:=(DIF[i,j-1]-DIF[i-1,j-1])/(t[i]-t[i-j]);
> od:
> od:
```

Aplicación del método predictor-corrector.

```
> a:=array(1..p):
> A=array(1..p):
> b:=array(0..p-1):
> B:=array(0..p-1):
> for i from (p-1) to (n-1) do
> for j from 1 to p do
> a[j]:=DIF[i,j-1];
> od:
> for j from 0 to p-1 do
> b[j]:=evalf(sum('a[k]*S[j+1,k]*j!','k'=1..p)):
> od:
> x[i+1]:=evalf(-x[i-1]+2*x[i]+2*sum('b[2*l-2]*g[2*l]','l'=1..((p+1)/2))):
xd[i+1]:=evalf(xd[i-1]+2*b[0]*gd[2]+2*sum('b[2*l]*g[2*l+1]','l'=1..((p-1)/2))):
> y[i+1]:=evalf(f(t[i+1],x[i+1])):DIF[i+1,0]:=y[i+1]:
> for k from 1 to (p-1) do
> DIF[i+1,k]:=(DIF[i+1,k-1]-DIF[i,k-1])/(t[i+1]-t[i+1-k]):
> od:
```

```
> for j from 1 to p do
> A[j]:=DIF[i+1,j-1]:
> od:
> for j from 0 to p-1 do
> B[j]:=evalf(sum('A[k]*Q[j+1,k]*j!','k'=1..p)):
> od:
> X[i+1]:=evalf(-x[i-1]+2*x[i]+2*sum('B[2*l-2]*g[2*l]','l'=1..((p+1)/2))):
> Xd[i+1]:=evalf(xd[i-1]+2*B[0]*gd[2]+2*sum('B[2*l]*g[2*l+1]','l'=1..((p-1)/2))):
> x[i+1]:=evalf(X[i+1]):
> xd[i+1]:=evalf(Xd[i+1]):
> od:
```

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Bibliografía

[1] Alan C.: Odepack, a Systemized Collection of ODE Solvers. Hindmarsh Scientific Computing, R. S. Stepleman et al. (eds.) North-Holland, Amsterdam, (1983).

[2] Battin, R.H., and Fraser, D.C.: Space Guidance and Navigation. AIAA Professional Study Series (1970).

[3] Battin, R.H.: An introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. New York: AIAA (1987).

[4] Bettis, D.G.: Numerical Integration of Products of Fourier and Ordinary Polinomials. Numer. Math. 14 (1970), 421.

[5] Birkhoff, G.y MacLane, S.:Algebra Moderna. Ed. Vicens Vives, (1980).

[6] Brock, P. and Murray, F. J.: The use of exponential sums in step by step integration. Math. Tables Aids Comput. 6, (1952), 63.

[7] Carrillo de Albornoz, A.,Llamas Centeno, I..: Maple V, aplicaciones matemáticas. RA-MA. Madrid (1995).

[8] Clark, A.: Elementos de Algebra Abstracta. Ed. Alhambra, (1974)

[9] Dennis, S.C.R.: The numerical integration of ordinary differential equations processing exponential type solutions. Proc. Cambridge Philos. Soc.,56, (1960), 240.

[10] Deprit, A, Elipe, A. and Ferrer, S. Celes. Mech. 58 (1994), 151.

[11] Denk, G.: A new numerical method for de integration of highly oscillatory second-order ordinary differential equations .App. Num. Math. 13 (1993), 57.

[12] Deuflhard, P.: A study of extrapolation methods based on multistep schemes without parasitic solutions. ZAMP. 30 (1979), 177.

[13] Deuflhard, P.: Kepler discretization in regular celestial mechanics. Celes. Mech. 21 (1980), 213

[14] Enright, W.H.:The Relative Efficiency of Alternative Defect Control Schemes for High Order Continuous Runge-Kutta Formulas. Technical Report 252/91, (1991).

[15] Fairén, V., Martín, P. and Ferrándiz, J.M.: Numerical tracking of small deviations from analytically known periodic orbits. Computers in Physics. Vol 8, n^o 4, (1994), 455.

[16] Ferrándiz, J.M.: A general cononical transformation increasing the number of variables with application to the two-body problem. Celes. Mech. 41 (1988), 343.

[17] Ferrándiz, J.M.: Linearization in special cases of perturbed Keplerian motions. Celes. Mech. 39 (1986) 23

[18] Ferrándiz, J.M.: A new set of canonical variables for orbit calculation. Proceedings of the Second International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics, Darmstadt, FR Germany, ESA SP-255, (1986), 361.

[19] Ferrándiz, J.M.: A general canonical transformation increasing the number of variables with application to the two-body problem. Celes. Mech. 41 (1988), 343.

[20] Ferrándiz, J.M., Ferrer, S. y Sein-Echaluce, L.: Genaralized elliptic anomalies. Celes. Mech. 40, (1987), 315.

[21] Ferrándiz, J.M., Martín, P., Vigo, J.: Special algorithms to limit the error growth in long-term computation of satellite orbits. Proceeding AAS/AIAA Spacefligh Mechanics meeting. Colorado-Spring (1992), 1167.

[22] Ferrándiz, J.M and Novo, S.: Improved Bettis methods for long-term prediction. Predictability, Stability and Chaos in N-Body Dynamical Systems. A.E. Roy Ed, Plenum Publishing Corporation, NATO ASI Series C. (1991), 515.

[23] Ferrándiz, J.M. y Sansaturio, M. E.: Elemento de tiempo en variables de Ferrándiz. Actas XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matematicas, Puerto de la Cruz, Vol III, (1989), 1231.

[24] Ferrándiz, J.M, Sansaturio, M.E. and Pojmand J.R.: Increased accuracy of computations in the main satellite problem throught linearization methods. Celes. Mech. 53 (1992), 347.

[25] Ferrándiz, J.M, Sansaturio, M.E. and Vigo, J.: On Long-time predictions of satellite orbits by numerical integrations on Predictability, Stability and Chaos

in N-Body Dynamical Systems. A.E. Roy Ed, Plenum Publishing Corporation, NATO ASI Series C. (1991), 387.

[26] Ferrándiz, J.M, Sansaturio, M.E. and Vigo, J.: On the Accurate Numerical Computation of Highly eccentric Orbits. Proceeding AAS/AIAA Spacefligh Mechanics meeting. Colorado-Spring (1992), 1185.

[27] Ferrándiz, J.M, and Vigo, J.: Integración numérica precisa de osciladores perturbados a largo plazo. Actas del XII CEDYA / II Congreso de Matemática Aplicada, Oviedo. (1991), 123

[28] Ferrándiz, J.M, Vigo, J. and Martín, P.: Reducing the error growth in the numerical propagation of satellite orbits. Proceedings of the Second International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics, Darmstadt, FR Germany, ESA SP-326, (1991), 49.

[29] Ferrándiz, J.M, Vigo-Aguiar, J.: New numerical method improving the integration of time in KS regularization. J. Guidance. Vol 19, n^o 3, (1996), 742.

[30] Ferrard, J-M.: Maths et Maple. Dunod. Paris (1998)

[31] Franco, J.M.,Correas, J. M. y Petriz, F.: Métodos adaptados de tipo Störmer - Cowell de orden elevado. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol, 7 n^o 2. (1991), 193.

[32] Gautschi, W.: Numerical integration of ordinary differential equations based on trigonometric polynomials. Numer. Math.,3, (1961), 381.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

[33] Gautschi, W.: Computational aspects of three-term recurrence relations. SIAM Re. 9, (1967), 24.

[34] Gear, C.W.: Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. Prentice-Hall, (1971).

[35] Goodyear, W.H.: Completely General Closed-Form Solution for Coordinates and Partial Derivatives of the Two-Body Problem. Astron. J. 70, (1965), 189.

[36] Grigorieff, R.D.: Stability of Multistep-Methods on Variable Grids. Numer. Math. 42, (1983), 359.

[37] Hairer, E., Wanner, G.:Solving Ordinary Differential Equations II. Springer-Verlag. New York, (1996).

[38] Henrici, P.: Discrete variable methods in ordinary differential equations. John Wiley and Sons, Inc. New York (1962).

[39] Herrick, S.: Universal Variables. Astron. J. 70, (1965), 309.

[40] Herstein, I.N.: Algebra Moderna. Ed. Trillas. Mexico (1980)

[41] Kirchgraber, U.: An ODE-Solver Based on the Method of Averaging. Numer. Math. 53, (1988), 621

[42] Kreider, D.L., Kuller, R.G. y Ostberg, D.R.: Ecuaciones Diferenciales. Fondo Educativo Interamericano, (1973).

[43] Lambert, J.D.: Numerical methods for ordinary differential systems. John Willey and Sons Ltd., New York, 1991.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

[44] Lambert, J.D.and Sigurdsson, S.T.: Multistep methods with variable matrix coefficients. SIAM J. Numer. Analysis, 4 (1972), 715

[45] Lentin, A., and Rivaud, J.: Algebra Moderna. Ed. Aguilar, (1967).

[46] Lyche, T.: Chebyshevian Multistep Methods for Ordinary Differential Equations. Numer. Math. 19 (1972), 65.

[47] MacDonald, I.G.: Symmetric Functions and Hall Polinomials. Oxford University Press Inc. New York (1998)

[48] Martín, P. and Ferrándiz, J. M.: Multistep numerical methods based on Scheifele G-functions with application to satellite dynamics. SIAM J. Numer. Analysis, 34 (1997), 359

[49] Martín, P. and J.M. Ferrándiz.: Behaviour of the SMF method for the numerical integration of satellite orbits. Celestial Mech. Dynam. Astronom. 63, (1995), 29.

[50] Milne-Thomson, L.M.: The calculus of finite differences. The Macmillan Press. New York, 1981.

[51] Nagle, R. K. y Saff, E. B.: Fundamentos de ecuaciones diferenciales. Addison - Wesley Iberoamericana (1992)

[52] Ola Fatunla, S.:Numerical methods for initial value problems in ordinary differential equations. Academic Press Inc.New York, (1988).

[53] Palacios, M. and Franco, J.M. Adv. Astronaut. Sci. 68 (1989), 3.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

[54] Pérez López, C.: Métodos matemáticos y programación con Maple V. Ed. RA-MA, (1998).

[55] Pitkin, E.T.: A Regularized Approach to Universal Variables. AIAA Journal 3, n^o 8, (1965).

[56] Pitkin, E.T.: Second Transition Partial Derivatives Via Universal Variables. Journal of the Astronautical Sciencies 13, n^o 3, (1965).

[57] Pitkin, E.T.: Integration with Univesal Variables. AIAA Journal 4, n^o 3, (1966).

[58] Richardson, D. L. and Vigo, J.: A family of variables Step Chebyshev Methods for Precise Integration of Perturbed Harmonic Oscillator. Adv. Astronaut. Sci. vol 95 (1997), 1525.

[59] Roy, A. E.: Orbital Motion. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia. (1988).

[60] Scheifele, G.: On numerical integration of perturbed linear oscillating systems. ZAMP. 22 (1971), 186.

[61] Simos, T. E.: Some new four-step exponential-fitting methods for de numerical solution of the radial Schrödinger equation. IMA J. Numer. Anal. 11 (1991), 347.

[62] Simos, T. E. and Raptis, A. D.: A fourth-order Bessel fitting method for the numerical solution of the Schrödinger equation. J. Comp. and Appl. Math. 43 (1992), 313.

[63] Sheffield, C.: Generalized multi-step methods with an applications to orbit computation. Celestial Mechanics.,1, (1969), 46.

[64] Shepperd, S.W.: Universal Keplerian State Transition Matrix. Celes. Mech. 35, (1985), 129.

[65] Shepperd, S.W.: Naturally Ocurring Continued Fractions in the Variation of Kepler´s Equation. Celes. Mech. 42, (1988), 91.

[66] Stetter, H.J. Analysis of discretization methods for ordinary differential equations. Springer, Berlin-Heildelberg-New York, 1973.

[67] Stiefel, E.L. and Scheifele, G.: Linear and Regular Celestial Mechanics. Springer, Berlin-Heldelberg-New York (1971).

[68] Stiefel, E.L. and Bettis, D. G.: Stabilization of Cowel´s method. Numer. Math., 13, (1969), 154.

[69] Stumpff, K.: Neue Formeln und Hilfstafeln zur Ephemeridenrechnung. Astron. Nachrichten (1947), 275.

[70] Stumpff, K.: Uber die Reihenentwicklung der rechtwinkligen Bahnkoordinaten in Zweikorperproblem. Zweite Mitteilung. Astron. Nachrichten (1947), 275.

[71] Stumpff, K.: Himmelsmechanik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin (1959).

[72] Vanthournout, J., Vande Berge, G. and De Meyer, H.: Families of backward differentiation methods based on a new type of mixed interpolation. Comput. Math. Appl. 20 (1990), 19.

[73] Vigo, J. Doctoral Dissertation. University of Valladolid (1993)

[74] Vigo-Aguiar, J. and Ferrándiz, J.M.: A General Procedure for the Adaptation of Multistep Algorithms to the Integration of Oscillatory Problems. SIAM J. of Numerical Analysis, vol 35 n^o 4 (1998), 1684.

[75] Vigo-Aguiar J.: An Approach to Variable Coefficients Methods for Special Differential Equations. Internatinal Journal of Applied Mathematics vol 1, n^o 8 (1999), 168.

[76] Vigo-Aguiar, J. and Ferrándiz Leal, J.M.: VSVO Adapted Multistep Methods for the Numerical Integration of Secon Order Differential Equations. Applied Mathematics Letters, vol 1 n^o 3 (1998), 83.

[77] Vigo-Aguiar, J. and Ferrándiz J.M.: Inplementation of Bettis algorithms for the numerical integration of perturbed oscillating systems. Computational Physics, (1993), 349.

[78] Vigo-Aguiar, J. and Ferrándiz Leal, J.M.: Higher-order varible-step algorithms adapted to the accurate numerical integration of perturbed oscillators. Computer in Physics, vol 12 n^o 5, (1998), 467.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES