BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Universidad de Santiago de Compostela

Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e bacharelato acerca do significado do cálculo integral

Pedro Antón Labraña Barrero

Tesis de Doctorado

Facultad: Ciencias de la Educación

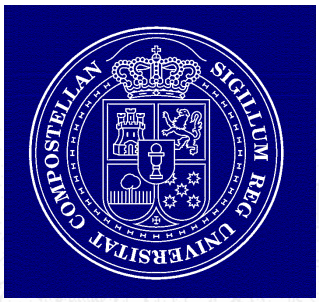
Director: José Antonio Cajaraville Pegito

2001

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DAS CIENCIAS EXPERIMENTAIS

ÁREA DE DIDÁCTICA DA MATEMÁTICA



Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e bacharelato acerca do significado do cálculo integral

PEDRO ANTONIO LABRAÑA BARRERO

Santiago de Compostela, 2000

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DAS CIENCIAS EXPERIMENTAIS

ÁREA DE DIDÁCTICA DA MATEMÁTICA

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e bacharelato acerca do significado do cálculo integral

PEDRO ANTONIO LABRAÑA BARRERO

Tese realizada baixo a dirección do Dr. D. José Antonio Cajaraville Pegito

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Esta tese desenvolveuse dentro do programa de doutoramento nº 60-1 (bienio 96-98): "DIDÁCTICA DAS CIENCIAS EXPERIMENTAIS E DA MATEMÁTICA", do Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais da Universidade de Santiago de Compostela, no marco do Proxecto PB98-0616, subvencionado pola DGES do Ministerio de Educación e Ciencia.

Foi defendida o 13 de febreiro do 2001 na Facultade de Ciencias da Educación da USC, estando constituído o tribunal polos doutores:

Presidente:

D. Juan Manuel Viaño Rey, catedrático de universidade (Dpto. de Matemática Aplicada. Facultade de matemáticas. Universidade de Santiago).

Secretario:

D. Leovigildo Alonso Tarrío, titular de universidade (Dpto. Álxebra. Facultade de matemáticas. Universidade de Santiago).

Vocais:

Dna. Carmen Batanero Bernabeu, titular de universidade (Dpto. Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidade de Granada).

D. Enrique Vidal Costa, catedrático de escola universitaria (Dpto. de Matemáticas. Facultade de Ciencias de la Educación. Universidade de Vigo).

D. Enrique de la Torre Fernández, catedrático de escola universitaria (Dpto. de pedagoxía e Didáctica das Ciencias Experimentais. Facultade de Ciencias de la Educación. Universidade de A Coruña).

obtendo a cualificación de "**sobresaliente cum laude**".

AGRADECEMENTOS:

Ó Dr. D. José Antonio Cajaraville Pegito, director da investigación, que coa súa dedicación fixo posible este traballo.

Á Dra. Dna. Mª del Pilar Jiménez Aleixandre e ó Dr. D. Joaquín Díaz de Bustamente, directora e secretario, respectivamente, do Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais, polas súas orientacións e pola labor de xestión que foi necesario realizar. Agradecemento que estendo a tódolos compañeiros de departamento.

Ós profesores de instituto e universidade, pola colaboración prestada na análise e revisión de materiais, ou na realización das probas ós seus alumnos:

Dra. Dna. Carmen Batanero – U. de Granada
Dr. D. Miguel del Río – USC
Dna. Beatriz Álvarez – IES de Lalín
D. Emilio Crespo – IES Padrón
D. José Antonio Vázquez – IES Fontiñas
Dr. D. Modesto Salgado – USC
Dra. Dna. Beatriz R. Moreiras – USC
Dr. Dna. Pilar Mato – USC
Dr. D. Felipe Gago – USC
Dr. D. Juan Manuel Viaño – USC
Dr. D. Gerardo Rgz. López – USC
Dr. D. José Luis Gómez Pardo – USC
Dr. D. Leovigildo Alonso – USC
Dna. Teresa Otero – IES Fontiñas
Dna. Marisa Gañete – IES Fontiñas
D. Lino Durán – IES Fontiñas
D. Mario García Pulido – IES Fontiñas
Dna. Susa Barreiro – IES Fontiñas
D. Rafael López-Grado – IES Rosalía de Castro
D. Carlos Campoy – IES Rosalía de Castro
D. Angel del Río – IES Rosalía de Castro
Dna. Dionisia Fraguela – IES Rosalía de Castro
Dna. Purificación Bértolo – IES Rosalía de Castro
D. Andrés Bermúdez – IES Xelmírez I
Dr. D. Luís Cachafeiro – IES Pontepedriña
D. Miguel Rivera – IES Pontepedriña
Dna. Carmen López – IES Xelmírez I
D. Enrique del Valle – IES Xelmírez I
D. Juan Rey – IES Eduardo Pondal
D. José Luís Hospido – IES Xelmírez II
D. José Ledesma – IES Sar
D. Xosé Lozano – IES Xelmírez I
Dna. Mª Carmen G. Riestra – IES Xelmírez I
Dr. Dna. Aurora Plata – IES de Negreira
Dr. Dna. Eva Acosta - USC
Dr. D. José Manuel Vilaboa – USC
D. Xan Sanmartín – USC
D. Paulino Estévez – IES Rosalía de Castro

Ós licenciados en matemáticas que realizando o CAP enriqueceron este estudio coas súas reflexións. E a tódolos alumnos e alumnas que dende os institutos ou dende as facultades colaboraron nesta investigación.

Ó Servicio de Normalización Lingüística da USC, personificado en Isabel Vaquero, polas correccións e suxerencias estilísticas ó texto.

Nada hai máis importante que
mostrar cáles foron os camiños
da invención;
na miña opinión, é aínda máis
importante que as propias
invencións.

Leibniz

BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

ÍNDICE:

Páxina

INTRODUCCIÓN 9

Capítulo 1: MARCO CONCEPTUAL

1.0.- Introducción 15

1.1.- Pensamento matemático avanzado 16

1.2.- Nocións de concepto e concepción 20

1.3.- A comprensión das matemáticas 26

Capítulo 2: REVISIÓN HISTÓRICO-EPISTEMOLÓXICA DO CÁLCULO INTEGRAL.

2.0 .- Introducción 35

2.1.- Principais procesos de construcción do concepto de integral: implicacións didácticas 37

Capítulo 3: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

3.0 .- Introducción 69

3.1.- Antecedentes 72

3.1.1.- Investigacións realizadas en torno á aprendizaxe do cálculo integral 72

3.1.2.- Revisión de libros de texto 86

3.1.2.1.- Textos de matemáticas 87

3.1.2.2.- Textos de física 93

3.1.3.- Conclusións 100

3.2.- Formulación do problema de investigación. Metodoloxía 101

3.2.1.- Presentación do problema 101

3.2.1.0.- Introducción 101

3.2.1.1.- Obxectivos xerais 103

3.2.1.2.- Fases da investigación 103

3.2.2.- Metodoloxía da investigación 106

3.2.2.1.- Poboacións e mostras 107

3.2.2.2.- Variables 109

3.2.2.3.- Hipóteses 110

3.2.2.4.- Instrumentos de recollida e análise de datos 112

Capítulo 4: ELABORACIÓN DO INSTRUMENTO PRINCIPAL DE AVALIACIÓN

4.0.- Introducción 115
4.1.- Revisións externas dos problemas 116
4.2.- Análise didáctica dos problemas que conforman o instrumento principal e categorías de resposta correspondentes a eles 129
4.3.- Estructura interna do instrumento principal 161
4.4.- Cuestionarios centrais 162
4.5.- Cuestionarios de reforzo 165

Capítulo 5: RESULTADOS DA INVESTIGACIÓN

5.0.- Introducción 179
5.1.- Estructuración da mostra 180
5.2.- Resultados e valoracións por cuestións 185

Capítulo 6: CONCLUSIÓNS

6.0.- Introducción 263
6.1.- Acerca das hipóteses 264
6.2.- Conclusións xerais 272

Capítulo 7: LIÑAS BÁSICAS PARA UNHA ALTERNATIVA DIDÁCTICA

7.0.- Introducción 279
7.1.- Notas sobre metodoloxía didáctica 280
7.2.- Antiderivación 287
7.3.- Tipoloxía dos problemas de integración 289
7.4.- Procesos sicolóxicos subxacentes 291
7.5.- Actividades introductorias: a potencia do método 293
7.6.- Aproximacións sucesivas 294
7.7.- Estudio ampliado por ordenador 298
7.8.- Buscando métodos xerais 301
7.9.- En torno á regra de Barrow 302
7.10.- Intuición do teorema fundamental 304
7.11.- Revisión crítica: modelos de integración 307
7.12.- Campo fenomenolóxico 311

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

7.13.- Táboa de primitivas: pensamento reversible 318
7.14.- Expresión dunha función como combinación de funcións máis simples 321
7.15.- Aplicacións 323
7.16.- Integración numérica: delimitación do erro 325
7.17.- Formalización dos conceptos e propiedades 329
7.18.- Cuestións 336
7.19.- Métodos de integración 336
7.20.- Ecuacións diferenciais 340
7.21.- Integrais impropias 343

Apéndice 1: Estudios: unha visión holística da aprendizaxe
A1.0.- Actividades de globalización 347
A1.1.- A integración como aplicación linear 349
A1.2.- Electromagnetismo 350
A1.2.- Esperanza de vida 352

Apéndice 2: AXUSTE DO MODELO
A2.1.- O problema da superficie lateral 359
A2.2.- Axuste do modelo 363

Apéndice 3: BATERÍA XERAL DE PROBLEMAS E ANÁLISE DIDÁCTICA 367

Apéndice 4: EXPECTATIVAS DOS PROFESORES 395

Apéndice 5: PERCEPCIÓNS DE ALUMNOS 403

Apéndice 6: DÚAS EXPERIENCIAS DE ENXEÑERÍA DIDÁCTICA
A6.1.- Experiencia en 3º de BUP 407
A6.2.- Experiencia en 2º de bacharelato 411

BIBLIOGRAFÍA 419

Introducción

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

O presente traballo de investigación ten por obxectivo afondar nos coñecementos que posuímos acerca das dificultades de comprensión do cálculo integral, a través dun estudio de avaliación sobre as concepcións dos estudiantes de COU e 2º de bacharelato (LOXSE), e de cómo se manifestan estas cando acceden ó primeiro curso universitario (na área científico-técnica), na zona de influencia da Universidade de Santiago de Compostela, en relación co significado persoal que lles atribúen ós conceptos, resultados e métodos do cálculo integral, e coa súa transferencia ó estudio de distintos campos de problemas.

Está xeralmente aceptado que o cálculo infinitesimal constitúe unha rama da matemática fundamental para diversos campos do saber tales como a enxeñería, a física, a bioloxía e as finanzas. Hai tamén evidencia na literatura científica de que a ensinanza e aprendizaxe do cálculo é problemática: os estudiantes teñen serias dificultades na adquisición do nivel de conceptualización necesaria para reflexionar comprensivamente sobre os resultados e aplicar con eficacia os seus métodos á resolución de problemas en diferentes contextos:

> *"As investigacións realizadas sobre a comprensión lograda polos estudiantes dos procesos centrais do cálculo -diferenciación e integración- poñen de manifesto dificultades. Os estudiantes tenden a reducir estos tópicos matemáticos a unha simple colección de problemas alxébricos, ó tempo que evitan a análise da información gráfica como compoñente esencial para a comprensión dentro do marco xeométrico."* (Dreyfus, 1992, p. 34).

Schoenfeld (1985a) pon de manifesto que a resolución de problemas de Cálculo require un sofisticado coñecemento das matemáticas e poñer en xogo "unha importante dose de reflexión mental".

O propio Schoenfeld (1982) subliña:

> *"Aproximadamente a metade dos estudiantes estudian cálculo no último curso de matemáticas de secundaria. A maior parte deles non o aplicarán nunca dunha forma significativa nos seus estudios, na súa vida... só parece haber unha razón para o seu estudio: alcanzar unha cualificación axeitada no exame final no que debe resolver uns problemas que son, practicamente, unha copia dos que xa fixeran con antelación na clase; non se lles pide reflexión, só poñer en práctica fórmulas rutineiras, esquemas específicos para respostar a preguntas tipo."* (p. 192).

Estas reflexións e, con máis precisión, os diferentes traballos de investigación desenvolvidos ó longo das dúas últimas décadas no marco do Pensamento Matemático Avanzado, poñen de manifesto:

a) Unha deficiente comprensión por parte dos estudiantes de obxectos matemáticos fundamentais relacionados co P.M.A. (función, límite, derivada, integral ...) que provoca significados persoais moi débiles, con presencia abundante de erros e obstáculos de aprendizaxe, e pon de manifesto carencias fundamentais no coñecemento da fenomenoloxía deses

conceptos, o que orixina moitas dificultades para o seu uso axeitado no deseño de modelos matemáticos ligados á resolución de situacións problemáticas ás que serven como soporte matemático fundamental, e para as que se precisa telos integrados en estructuras conceptuais potentes.

b) A existencia de obstáculos epistemolóxicos e didácticos durante o proceso de instrucción que se fan patentes no propio desenvolvemento histórico da Matemática como ciencia, onde se pon de manifesto a dualidade proceso-obxecto que ten habido ó longo da emerxencia, desenvolvemento e fundamentación matemática das estructuras conceptuais ás que nos referiamos. A influencia que sobre a didáctica exerceu o proceso de fundamentación rigorosa da Matemática ten, entre as súas consecuencias máis relevantes:

b.1) No acto de instrucción a énfase ponse na simboloxía e na linguaxe, e nas consecuentes formalización, alxebrización e algoritmización das ditas estructuras matemáticas.

b.2) Os caracteres anteriores configuran unha metodoloxía de ensinanza que vai ter unha influencia sobre o pensamento do futuro profesor en dúas direccións:

b.2.1) A predominancia do uso metodolóxico do marco alxébrico como patrón de instrucción.

b.2.2) A desconfianza, dende unha perspectiva didáctica, nos patróns heurísticos e intuitivos derivados da fenomenoloxía asociada ós ditos conceptos que, historicamente, ten contribuído á súa emerxencia e desenvolvemento.

Todo isto ten exercido unha forte tendencia a focaliza-la ensinanza das matemáticas dende o marco alxébrico, en detrimento do marco gráfico-xeométrico, e a limita-las alusións didácticas a situacións-problema que recreen a fenomenoloxía asociada ós obxectos matemáticos en cuestión, provocando un proceso crecente de descontextualización e deshistorización destes.

Por outra parte, as dificultades de aprendizaxe inherentes ó uso dunha linguaxe simbólica e un formalismo rigoroso, que o propio sistema educativo detecta en sucesivas avaliacións, foi modificando o contrato didáctico cara a unha algoritmización progresiva e unha visión cada vez máis mecanicista da Matemática, o que dirixe ós alumnos a conceptualiza-la matemática como un aparello de cálculo simbólico infalible que resolve "problemas", os cales se adaptan perfectamente á aplicación rutineira duns algoritmos que concentran en si mesmos o saber matemático; visión que descoñece a súa potencia e efectividade diante de situacións-problema máis realistas onde, pola contra, sería necesario pór en xogo a conxectura, o uso de patróns heurísticos de razoamento e descubrimento, o coñecemento da fenomenoloxía e dos significados asociados ós obxectos matemáticos e o xogo de marcos interrelacionados, para que unha aplicación áxil e selectiva dos algoritmos pertinentes nos conduza á resposta axeitada.

Co obxectivo de contribuír á análise desta problemática didáctica deseñamos un instrumento para explora-lo significado da integración para o alumnado de COU e 2º de bacharelato LOXSE, e coñecer cómo o manifestan cando acceden ó primeiro curso universitario, sobre una mostra de estudiantes.

Adicámo-lo primeiro capítulo á descrición e reflexión sobre o marco conceptual baixo o cal se desenvolve a presente investigación.

Nun segundo capítulo sintetizámo-lo desenvolvemento do cálculo integral ó longo da historia da Matemática, poñendo a énfase nos posibles obstáculos epistemolóxicos e as posibles repercusións para a didáctica.

O terceiro capítulo adícase a analiza-la formulación do problema de investigación, no que figuran os seus obxectivos principais e a metodoloxía, precedidos de cadansúas revisións, que resultan esenciais na orientación do traballo que se vai seguir no noso estudio: sobre os resultados de investigacións anteriores en torno á aprendizaxe do cálculo integral e sobre o tratamento do tema que se leva a cabo nos libros de texto propios destes cursos académicos.

Un cuarto capítulo adícase á reconstrucción do proceso de elaboración dos cuestionarios básicos e de reforzo utilizados para a recollida principal de datos, que sería complementada con outra información obtida a partir de entrevistas a alumnos e profesores.

No quinto capítulo móstranse detalladamente os resultados obtidos como consecuencia da avaliación das respostas da mostra de estudiantes ós cuestionarios preparados para a investigación, e contémplase unha primeira análise comparativa por colectivos ou submostras.

O sexto capítulo adicarase ó establecemento das conclusións máis relevantes do noso estudio, que confirman as carencias de significado do cálculo integral como estructura matemática ligada ós problemas de medida, as dificultades de adaptación a novos contextos dos coñecementos adquiridos durante a instrucción propia do seu curso académico, as limitacións para pensar sobre cuestións teóricas directamente relacionadas cos contidos específicos que estudiaron, e a debilidade metacognitiva acerca das técnicas de integración nas que se exercitaron prolixamente.

Nun sétimo capítulo, dos resultados e conclusións anteriores derívanse as liñas esenciais para un enfoque alternativo do tema que vehiculen unha mellora das concepcións dos estudiantes e da súa competencia técnica, nos aspectos que se reflicten no capítulo anterior.

Remátase cunha serie de apéndices que engaden ou refiren elementos significativos da investigación:

- O primeiro deles presenta tres propostas para actividades de globalización.
- Continúase cunha reflexión acerca da consistencia lóxica da estructura conceptual construída, motivada polo estudio de problemas máis sofisticados que actualmente non adoitan figurar xa en programas estándar de matemáticas de COU e 2º de bacharelato, pero que de atoparen o marco axeitado (unha materia optativa, un módulo de ampliación ...) resultarían de enorme interese.

- No terceiro apéndice recóllese a análise didáctica daqueles outros problemas que manexamos no proceso de construcción do instrumento principal de avaliación, e que finalmente non figuraron nel, pero que foron significativos á hora de configuralo.
- Seguen dous apéndices que mostran indagacións de carácter complementario, respectivamente acerca das previsións dos profesores en canto ás respostas que darían os seus alumnos ó cuestionario principal desta investigación, e acerca das percepcións dos propios alumnos fronte ó proceso de ensinanza-aprendizaxe.
- Finalmente relátanse dúas aproximacións experimentais a unha enxeñería didáctica alternativa.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Capítulo 1

Marco conceptual

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

1.0.- Introducción

Tanto o doutorando como o director da tese participan da liña de investigación en educación matemática coñecida xenericamente como "Pensamento Matemático Avanzado". A describi-las súas principais ideas adicarémo-la primeira parte deste capítulo. A segunda parte consistirá nunha revisión da dicotomía existente entre "concepto" -visto dende unha perspectiva disciplinar-, e "concepción" -dende a perspectiva do alumno-, e das implicacións didácticas que isto ten, a importancia da cal para o presente traballo de investigación pode intuírse polo seu propio título. Finalmente, continuando co discurso dos dous subcapítulos que acabamos de indicar, revisarémo-lo problema da "comprensión" en matemáticas.

1.1.- Pensamento Matemático Avanzado (PMA)

O Pensamento Matemático Avanzado (PMA) constitúe unha liña de investigación que se ocupa do estudio dos procesos que desenvolven os estudiantes e os propios matemáticos cando se implican no traballo con matemáticas avanzadas (análise matemática -que a partir de agora denominaremos cálculo-, espacios multidimensionais, lóxica, procesos de conxectura e proba, etc.). A presente investigación enmárcase dentro deste paradigma. Tall (1991a) subliña as diferencias entre pensamento matemático elemental e PMA: trátase de pasar de *describir* a *convencer* "a si mesmo, ó amigo, ó inimigo".

O PMA ocúpase do estudio dos papeis de *definición*, "*precisión*" e *demostración* e a súa relación coa intuición, abstracción formal e deducción lóxica. Cando a definición formal dun concepto matemático é introducida sen xustificarse na situación matemática que a orixina, moitos estudiantes poden non ser capaces de acomodar esta definición á súa *imaxe do concepto* (Vinner e Tall, 1981), o que provoca a súa inhibición ante a incomprensión do concepto presentado formalmente. En tal situación a comprensión dos conceptos matemáticos ou da súa definición é intuitiva antes que formal. As habilidades dos estudiantes de secundaria para abstraer, xeneralizar e demostrar formalmente adoitan mostrarse insuficientemente desenvolvidas a nivel cognitivo. Tales procesos de pensamento acostuman ir acompañados de *obstáculos epistemolóxicos* (Brousseau, 1986; Sierpinska, 1987) a causa da incapacidade para transferir un coñecemento establecido para un certo dominio a outro contexto matemático.

As investigacións en PMA, ata a data, supoñen notables avances na comprensión do pensamento en matemáticas avanzadas, en dúas direccións:

1. Dispoñibilidade dunha fundamentación epistemolóxica dos obxectos matemáticos dirixida a clarifica-lo pensamento que é característico do traballo en matemáticas avanzadas, establecido como un dominio específico de investigación de teorías e termos psicolóxicos xerais, usados na investigación en educación matemática (Dreyfus, 1990; Tall, 1991a).

2. Aportación de datos para mellora-la comprensión e aumenta-las habilidades dos estudiantes para resolver problemas matemáticos. As conductas dos estudiantes observadas en múltiples experimentos proporcionan evidencia das construccións psicolóxicas necesarias para comprender determinados conceptos matemáticos. Algúns deses constructos están incorporados en programas informáticos específicos (Dubinsky e Tall, 1991).

Unhas das primeiras nocións de epistemoloxía da educación matemática desenvolvidas en PMA son a de *concept image* (Vinner e Tall, 1981; Vinner 1983) e a de *procept* (Gray e Tall, 1993, 1994), ás que faremos referencia neste capítulo. Outra das nocións básicas en PMA é a de *significado dos obxectos matemáticos* (Godino e Batanero, 1994) que resumiremos dende dúas perspectivas: a *antropolóxica* (Chevallard, 1992; Chevallard, Bosch e Gascón, 1997) e *semiótico-antropolóxica* (Godino, 1999).

Fixemos referencia na introducción a que a resolución de problemas de cálculo require un coñecemento sofisticado das matemáticas e unha profunda reflexión mental. Esta sofisticación e abstracción crea dificultades ó profesor para deseña-la instrucción, e ó estudiante para adquirir unha comprensión conceptual axeitada do cálculo.

Pero o cálculo non só resulta problemático para a ensinanza e a aprendizaxe senón tamén para a investigación sobre os procesos cognitivos que implica. A extensa área de estructuras conceptuais que engloba: límites, estudio analítico de funcións, diferenciación, integración, ecuacións diferenciais, etc., fan necesario acomete-lo estudio dos procesos cognitivos dende varios enfoques: resolución de problemas, comprensión conceptual, visualización espacial, técnicas de integración, papel das novas tecnoloxías, aplicacións e modelos matemáticos, etc.

Para o estudio da problemática da ensinanza e aprendizaxe do cálculo integral que nos ocupa, estas diferentes perspectivas resultarán esenciais para clarificar qué situacións-problema deberemos empregar para avalia-las concepcións dos estudiantes e, en particular, para promover un equilibrio entre a proposta de problemas que implican a

posta en práctica de procesos algorítmicos (máis rutineiros e familiares ó alumno) con outros que demandan unha comprensión máis profunda onde se poñan en xogo estratexias de visualización e o xogo de marcos, como sinalan Dubinsky e Tall (1991).

Dende unha perspectiva didáctica a aprendizaxe das matemáticas non se considera tanto como a problemática de adquisición de competencias e habilidades, senón que se contempla, cada vez máis, en termos de procesos cognitivos.

> " *Son fundamentalmente os procesos de representación e abstracción os que nos permitirán analiza-las dificultades de aprendizaxe dos contidos matemáticos por parte dos estudiantes, e as actividades de "percepción de" e "acción sobre" os obxectos as que permiten explica-la transición do pensamento matemático elemental ó pensamento matemático avanzado."* (Azcárate 1995, p. 3).

As representacións mentais de profesores e alumnos poden ser notoriamente diferentes, o que sitúa os problemas que compre resolver entre dúas perspectivas diferentes e leva a unha adaptación en dobre sentido: profesor $\leftrightarrow$ alumno, na que aqueles tenden a delimita-lo dominio dos campos de problemas a unha serie de exercicios tipo, mentres que os estudiantes intentan aprender procedementos estándar que llos permitan resolver exitosamente.

Consecuentemente os alumnos estarán implicados na tarefa de aprender unha gran cantidade de formalismos, pero non de adquirir e emprega-la metodoloxía de traballo dos matemáticos, caracterizada por ter unha ampla riqueza de representacións e unha gran flexibilidade para pasar dunhas a outras en virtude das dificultades que o problema presente.

Consideramos que unha boa formación matemática require desenvolve-la capacidade de xerar diferentes representacións dunha situación ou dun concepto, interrelacionadas e coherentes entre si. De xeito semellante a como a matemática crea modelos para representar obxectos e situacións non matemáticas coa finalidade de poder estudia-lo seu comportamento, os propios conceptos e estructuras matemáticos, cando

adquiren a categoría de obxectos per se, precisan de representacións mentais que nos permitan manexalos.

É neste punto onde a nosa investigación pretende poñer de manifesto se os estudiantes poden facerse representacións mentais dos problemas de integración dende os planos xeométrico e físico, e se son capaces de pasar dende o cálculo a estes.

E unha vez teñámo-la resposta a esta primeira cuestión, trataremos de analizar qué relación garda coa metodoloxía de ensinanza empregada polos seus profesores. Particularmente importante sería esta segunda cuestión se na anterior se detectase un resultado negativo ou escasamente relevante en canto á competencia dos alumnos, xa que sería inescusable dilucidar se os seus profesores empregaban ou non diferentes representacións e se os acostumaban a empregar unhas ou outras segundo as necesidades dos problemas presentados.

Os procesos de xeneralización e síntese gardan estreita relación coa abstracción, que caracteriza ó PMA. Xeneralizamos cando identificamos trazos comúns a varios casos e os estendemos a campos de validez máis amplos, e sintetizamos cando integramos nun único obxecto diferentes elementos, dotándoos dunha organización determinada. Os procesos de síntese son laboriosos e lévannos a novas construccións máis eficaces, coas que nos afacemos a pensar, caendo en desuso os estadios mentais anteriores nos que nos moviamos. A síntese pode apoiarse inicialmente en xeneralizacións, en canto a que a identificación de trazos comúns produce a consciencia dunha regularidade ata entón non percibida, pero trascéndea ó xerar un proceso explicativo desta, que se manifesta na busca da estructura subxacente.

Na ensinanza da matemática tentamos transmitir nocións abstractas e procedementos para a súa manipulación. O interese principal delas é que nos capacitan para regresar ás situacións concretas que as orixinaron, dándonos unha maior posibilidade de controlalas. E aínda que isto require unha dose de orixinalidade importante, posibilita o tratamento de situacións novas ou tratar cun novo enfoque problemas que se nos presentaban noutros ámbitos, na medida en que sexamos capaces

de recoñecer nestas situacións ou nestes problemas elementos significativos dos conceptos implicados.

O problema para a educación reside en que é necesario vivi-los ditos procesos para que os novos obxectos matemáticos poidan ser comprendidos, para que o alumno constrúa unha nova estructura cognitiva na que as características intrínsecas de cada caso concreto ou de cada elemento deixen de ser relevantes, pasando a selo unha serie de atributos e relacións anteriormente non explicitados.

Nesta dialéctica ponse de manifesto a necesidade de indagación sobre o que significa "comprender", e particularmente "comprende-las matemáticas". A continuación presentamos algunhas nocións relacionadas cos procesos de aprendizaxe das matemáticas e algunhas perspectivas desde as que se intentan enfoca-lo problema da comprensión en Matemáticas.

MIGUEL DE CERVANTES

1.2.- Nocións de concepto e concepción

No intento de comprender cómo se aprenden as matemáticas téñense dado algúns pasos significativos:

> "*Debe aceptarse que a persoa vai construíndo o seu propio coñecemento ó integrar nova información en redes conceptuais preexistentes. A aprendizaxe das matemáticas é un proceso activo, resultado dunha variedade de interaccións do aprendiz co seu mestre, compañeiros, familia e sociedade[...]. A aprendizaxe prodúcese sobre a base de coñecementos previos: a acción sobre obxectos reais, as representacións inxenuas e, en xeral, calquera actuación que sirva para poñer de manifesto relacións entre obxectos diversos, son un paso previo imprescindible na comprensión e asimilación dos conceptos*

> *matemáticos[...]. Todo proceso de aprendizaxe é lento, necesita claves de procesamento continuo e nunca está totalmente concluído."* (Rico, 1997, p. 23).

Asúmese, por tanto, que cando o aprendiz se somete ó proceso de instrucción xa ten ideas previas –concepcións- sobre os obxectos de aprendizaxe. Cando estas concepcións entran en conflicto co "saber institucional", obxecto de ensinanza, xéranse tensións. Diante dun novo coñecemento, o aprendiz pode asumi-la non procedencia, ineficacia ou limitación das súas concepcións previas (debendo readaptar teorías persoais que elaborou na estructura conceptual que acadou nun determinado nivel) ou pode resistirse a substituílas por outras ideas que se lle fan explícitas durante a instrucción.

Para Vergnaud (1982), a noción de *concepción* refírese ó nivel de coñecementos dun individuo a respecto dun obxecto matemático determinado. Este investigador define un concepto matemático como unha tripleta que engloba a *fenomenoloxía* que o orixina, a súa familia de *invariantes* e o conxunto de *representacións simbólicas, atributos e propiedades* que o caracterizan.

Artigue (1990a) distingue a noción de concepción en dous contextos distintos: a) evidencia-la pluralidade de puntos de vista sobre un mesmo obxecto matemático: representacións, procesos asociados, campos de problemas asociados; b) diferenciación entre o saber que se quere ensinar e os coñecementos que, en realidade, constrúe o aprendiz (falsa ilusión de transparencia na comunicación didáctica).

Baixo o termo "concepción" figura un estado global de intuicións, crenzas, prácticas, representacións e coñecementos dunha persona en relación cun obxecto matemático concreto, nun período da vida concreto: a noción de concepción ten unha importante compoñente evolutiva (Cajaraville, 1996). Godino e Batanero (1994), dende unha perspectiva epistemolóxica, asimilan a noción de concepción a "*un emerxente de certos subsistemas de prácticas sociais asociadas a subcampos de problemas dun campo dado"*.

Artigue (1990a) fai referencia o termo *"concepción local"* como a que manifesta o aprendiz en resposta a unha situación particular. Unha concepción local posibilitará enfrontarse a un subconxunto de situacións, consideradas potencialmente equiparables, con axuda do mesmo modelo, de patróns de razoamento análogos e de procedementos próximos. Aínda que o termo concepción posúe unha importante compoñente evolutiva e desta evolución espérase un achegamento progresivo ás nocións institucionais, en realidade o dito achegamento pode non producirse: os modelos mentais que constrúe o individuo non teñen por qué converxer a un modelo máis xeral, podendo coexistir (Artigue, 1989) a xeito de "concepcións locais" sen dar paso á pretendida xeneralización aínda referíndose a un mesmo obxecto matemático, a causa da diferente problemática academicamente tratada en cada caso e outras prácticas que o suxeito poida desenvolver fóra do ámbito escolar.

Douady (Douady e Perrin, 1989), no contexto do "xogo de marcos" precisan, en relación coa idea de "concepción local", que "*as imaxes mentais xogan un papel esencial na contextualización dos obxectos nun marco, de tal maneira que dous marcos poden engloba-los mesmos obxectos matemáticos e diferir polas imaxes mentais e a problemática desenvolvida"*. Estas conclusións confirman que as concepcións locais están intimamente relacionadas coas diferentes prácticas sociais que realiza cada persoa e coas prácticas de ensinanza -saberes, situacions-problema, experiencias- realizadas.

Sierpinska (1989) usa o termo *"concepción espontánea"* para analiza-los aspectos intuitivos e crenzas "a priori" dos aprendices sobre determinados conceptos matemáticos antes de seren obxecto explícito de enseñanza. Joshua (1989) refírese ás *"concepcións inxenuas"* dos estudiantes como apreciacións incorrectas que lles sirven de base activa en razoamentos e prácticas, e que, en moitas ocasións, supoñen un *obstáculo* contra o que hai que loitar para acadar unha aprendizaxe correcta.

Parece evidenciarse, en todo caso, que existen unhas *concepcións iniciais* -preconcepcións ("misconceptions")- previas ó acto educativo concreto e outras *concepcións derivadas do acto de ensinanza* que poden dividirse en concepcións controladas -provocadas- e incontroladas -interpretacións persoais derivadas do proceso de ensinanza- (El Bouaizzaui, 1988).

Dubinsky, Haws, Nichols (1989) e Sfard (1989) distinguen entre concepción como proceso -*concepción operacional:* o aprendiz establece concepcións sobre determinada noción matemática, a partir de accións, experiencias e observacións- e concepción como obxecto -*concepción estructural:* a partir da xeneralización dos procesos que lle permiten "encapsular" toda a fenomenoloxía e pensar na noción como obxecto.

Vinner e Tall (1981) fan distinción entre *definición dun concepto* (concept definition) e *esquema conceptual* (concept image). Vinner (1991) describe o papel institucional da definición en matemáticas como segue:

> *"A definición -dende o punto de vista matemático- crea serios problemas na aprendizaxe da Matemática. Representa, máis que ningunha outra, o conflicto entre a estructura da matemática concibida polos matemáticos profesionais, e os procesos cognitivos de adquisición dos conceptos.[....] Xeralmente, os profesores de matemáticas utilizan nas súas clases unha secuencia de definicións, teoremas e demostracións como o esqueleto do curso que imparten. Sen embargo, as súas consecuencias poden ser pedagoxicamente catastróficas, xa que o profesor debe ter en conta os procesos psicolóxicos comúns de adquisición dos conceptos e do razoamento lóxico."*(p. 65)

Estes investigadores consideran que os alumnos se achegan ás nocións matemáticas a través de contextos moi variados: as experiencias cotiás, mediante o uso da linguaxe coloquial na que aparecen terminoloxías pseudomatemáticas, situacións problema que debe resolver no contorno educativo e social, información gráfica que debe interpretar, etc. Este feito implica que, en moitas ocasións, antes de adquirir unha noción matemática concreta -no sentido institucional- o aprendiz posúe unha experiencia moi complexa asociada á dita noción, que forma parte da súa estructura cognitiva.

Cando no proceso educativo o alumno se enfronta a una definición rigorosa -preferentemente presentada a través da linguaxe matemática institucional-, vese

obrigado a resumir nela todo o que o seu pensamento estivo elaborando previamente. Esta identificación sintética adoita tardar tiempo en ser asumida polo alumno. En ocasións non se logra en absoluto. Isto é debido, fundamentalmente a que estas definicións se incorporan á estructura conceptual do aprendiz como un elemento máis, que acompaña ás ideas previas que xa tiña formado mediante imaxes mentais, modelos, representaciones gráficas, analoxías, etc. O aprendiz, aínda despois de ter contacto coa definición formal dun concepto, adoita usar no seu lugar unha serie de imaxes mentais procedentes do seu esquema mental previo ó tratar con exemplos e contraexemplos nos que o dito concepto está implicado. As súas decisións, polo tanto, baséanse en imaxes conceptuais antes que en definicións.

Vinner e Tall (1981) introducen o termo *"concept image"* -termo traducido por Azcárate (1995), como *esquema conceptual*- definido como:

> "*... a estructura cognitiva total asociada ó concepto que engloba representacións mentais, propiedades asociadas e procesos que elabora o aprendiz a través das experiencias coas que tivo contacto ó longo da súa vida. Modifícase cando o suxeito se enfronta a novas experiencias e sofre continuas adaptacións.*"(p.152)

Paralelamente introducen *"concept definition"* -definición dun concepto- como *o conxunto de palabras que son utilizadas polo aprendiz para comunica-lo significado dun concepto*. En xeral non coincide -incluso difire ostensiblemente- coa definición institucional do concepto, xa que plasma *a descrición persoal da imaxe conceptual que construíu do dito concepto*. Constitúe, por tanto, unha definición persoal.

O enfrontamento entre definición formal e definición persoal pode crear no aprendiz unha posición de rexeitamento da definición formal: "*En ocasións, os estudiantes están tan firmemente convencidos do seu esquema conceptual que consideran improcedente a teoría formal.*" (Vinner e Tall, 1981, p. 155).

Gray e Tall (1993, 1994) e Tall (1994, 1995) analizan por qué algúns estudiantes teñen éxito coas matemáticas "cunha facilidade desarmante", mentres que os demais parecen condenados ó fracaso:

> "*... despois de analiza-las respostas dos estudiantes atopamos razóns para explicar esta diverxencia: os alumnos que fracasan utilizan un tipo de matemáticas moito más difícil en comparación cos que teñen éxito.*" (Gray e Tall, 1993, p. 1).

> *"... A partir da experiencia inicial con procedementos, uns progresan utilizando o coñecemento de forma potente e flexible, mentres outros adoptan unha forma ríxida de aprendizaxe aplicando regras e refuxiándose nos procedementos que lles aseguran respostas correctas en tarefas de rutina*". (Gray e Tall, 1994, p. 4).

Diferentes individuos ou o mesmo individuo en diferentes contextos e momentos interpretan os símbolos de forma dual: ben como un proceso ou ben como o obxecto producto de tal proceso. A capacidade para utilizar esta dobre interpretación favorece o pensamento flexible; a ausencia desta capacidade comporta o uso ríxido e rutineiro dos procedementos. O estudio dun grande número de casos onde un proceso e o seu producto se representan baixo o mesmo símbolo, induce a Gray & Tall a defini-lo termo *procept* (procepto):

> *"Un procepto é un obxecto mental combinado que consiste nun proceso, nun concepto producido por este proceso e nun símbolo que se pode usar para significar calquera dos dous ou os dous simultaneamente.*" (Gray e Tall, 1993, p.1).

O pensamento proceptual pode observarse como unha combinación de pensamento conceptual e procedemental. Consiste nunha estructura rica e flexible onde o símbolo evoca o proceso, o producto deste proceso e unha variedade de relacións tanto conceptuais como procedementais. Gray e Tall sinalan que se nos fixamos máis na natureza proceptual do pensamento matemático en vez de centrarnos só no método procedemental da computación matemática, probablemente nos aproximemos ó que significa "comprende-las matemáticas".

1.3.- A comprensión das matemáticas

Que os estudiantes deberían *comprende-las matemáticas* é unha das premisas básicas aceptadas en educación matemática (Hiebert e Carpenter, 1992). Sierpinska (1994) pregúntase cómo ensinar de maneira que os alumnos comprendan; qué é o que realmente comprenden a partir do acto de instrucción e cómo comprenden. Este dobre aspecto *qué comprender* e *cómo comprender* obriga a adoptar dous puntos de vista básicos: un descritivo (compoñentes dos obxectos para comprender) e outro procesual (fases ou niveis necesarios para logra-la comprensión).

Douady (1995) disocia o "saber" matemático en dous ámbitos diferenciados:

- *Semántico*: dispoñibilidade funcional dalgunhas nocións e teoremas para resolver problemas e interpretar novas situacións.

- *Sintáctico*: as nocións e teoremas constitúense en obxectos de estudio recoñecéndolles un estatus científico; as definicións e os enunciados precisos dos teoremas e as demostracións destes xeran a necesidade dunha linguaxe específica e dunhas regras internas.

Entre estes dous ámbitos do coñecemento dáse unha relación dual: os significados semánticos deben ser descontextualizados e despersonalizados para dar paso a significados sintácticos e estes, á súa vez, serán recontextualizados en novos problemas e situacións, expandindo os significados semánticos.

Para esta mesma autora (Douady, 1991), un concepto matemático ten dúas dimensións: como *obxecto*, que se manifesta a través da súa definición e propiedades características, e como *útil*, que se usa para resolver determinados problemas. Considera que:

> *"O significado dun concepto derívase do contexto no que está inmerso. Tamén se deriva das súas relacións con outras estructuras conceptuais, non necesariamente dentro do mesmo dominio matemático."* (p.102).

> *"Un dos problemas relevantes para a Didáctica da Matemática consiste en investigar cómo se elaboran estes significados e cómo se modifican polo efecto da instrucción."* (Balacheff, 1990, citado por Godino e Batanero,1994, p. 327).

Puidemos observar tamén que é necesario diferenciar *significado* dun obxecto matemático dende o punto de vista *institucional,* e o que lle atribúe o aprendiz cunha estructura cognitiva concreta, nun momento concreto -*significado persoal*-.

Diferentes investigadores, que citaremos no que segue, tratan o problema da comprensión dende a óptica da noción de significado, o que os leva á indagación sobre a natureza dos obxectos matemáticos e sobre a xénese persoal e institucional do coñecemento matemático e da súa interdependencia.

Godino e Batanero (1994) analizan o estado da cuestión en relación coas teorías do significado, e despois de precisaren que non se atopa unha análise explícita de qué é o significado das nocións matemáticas, partindo da clasificación de Kutschera (1971) das teorías do significado: *realista e pragmática*, adoptan unha posición máis próxima á segunda:

> *"Os obxectos matemáticos deben ser considerados como símbolo de unidades culturais, emerxentes dun sistema de usos ligados ás actividades de resolución de problemas que realizan distintos grupos de persoas e van evolucionando no tempo. Na nosa concepción, o feito de que no seo de certas institucións se realizan determinados tipos de prácticas é o que determina a emerxencia progresiva dos "obxectos matemáticos", e o "significado" destes obxectos está intimamente ligado ós problemas e á actividade matemática realizada para a súa resolución, non podendo reducirse este significado á súa exclusiva definición matemática."* (p. 331).

Estes enfoques resaltan o significado local dos obxectos matemáticos como emerxente das prácticas xeradas por situacións problemáticas concretas. Novas prácticas, neste ou noutros grupos, facilitan procesos de xeneralización e síntese, e aproxímannos ó significado do obxecto. Ulteriores procesos de comunicación e formalización conducen ó

significado institucional do obxecto, outorgando un carácter dinámico á construcción do significado.

Para Chevallard (1991, p. 8), un obxecto matemático *"é un emerxente dun sistema de prácticas no que se manipulan obxectos materiais que se organizan a través dos diferentes rexistros semióticos; rexistro oral: o que se pronuncia con palabras; rexistro xestual: o que se escribe ou debuxa (que inclúe representacións gráficas e cálculos)*". Chevallard (1992) define a noción teórica de *"relación co obxecto"*, afirmando:

> *"Un obxecto existe para un individuo X ou unha institución I, dende que X ou I recoñecen este obxecto como un existente (dende cada particular punto de vista). Máis concretamente, o obxecto O existe para X (respectivamente para I), se existe un obxecto, representado por R(X,O), que se dirá relación persoal de X con O (respectivamente R(X,I), relación institucional de I con O)."* (p. 9).

Desta maneira o que denominamos "saber" dun individuo é, en realidade, a súa relación co saber considerado. A noción de concepto aplícase ó saber institucional, non ó saber dun individuo en concreto. Non deberiamos falar, pois, da formación dun concepto por parte dun aprendíz senón da formación da relación dun individuo cun determinado concepto. Tal relación adoita emerxer dun sistema de relacións institucionais onde o individuo X entra en contacto co obxecto O e un ou varios axentes institucionais.

A *teoría antropolóxica* de Chevallard (Chevallard, Bosch e Gascón, 1997; Chevallard, 1991, 1999) propón unha *perspectiva epistemolóxica* (Gascón e Fonseca, 2000), que asume como hipótese básica unha despersonalización da problemática didáctica que implica enfoca-los problemas didácticos dende as organizacións matemático-didácticas. A diferente natureza das organizacións matemáticas escolares – dende primaria á universidade- fan necesario precisa-la súa dinámica mediante a noción de *praxeoloxía matemática* -tarefas, técnicas, tecnoloxías, teorías-, que ten un papel moi distinto en cada organización, constituíndo estas diferencias, para esta teoría, as razóns básicas de conflicto no proceso de estudio da matemática. Explicitan estas razóns en termos do *contrato didáctico* institucional (Brousseau, 1998) que preside implicitamente as relacións que se establecen entre profesores e alumnos con respecto ó coñecemento

matemático que se estudie. A noción de contrato didáctico adquire sentido máis preciso no marco da *teoría das situacións didácticas* (Brousseau, 1986) á que nos referimos a continuación.

A *teoría das situaciones didácticas* de Brousseau ten por obxectivo analiza-las interaccións entre o profesor e os alumnos nun medio concreto e a súa relación co coñecemento posto en xogo.

> *"Unha situación didáctica é o conxunto de relacións implícita e/ou explicitamente establecidas entre un alumno ou un grupo de alumnos, o contorno -no que se inclúen medios, recursos e instrumentos- e o profesor, co obxectivo de facer apropiar ó alumno dun saber constituído ou en vías de constitución. [...] Estas relacións establécense como resultado dunha negociación entre o profesor e os alumnos nunha especie de "contrato", no que se fixan, o un e os outros, unha serie de regras de xogo que asignan a cada protagonista medios de acción, medios de información e obrigas."* (Brousseau, 1986, p. 298).

> *"O contrato didáctico é o sistema de regras que presiden estas relacións. Con frecuencia, estas regras non están enunciadas explicitamente pero, en todo caso, cada situación de aprendizaxe debe poder permiti-la devolución ó alumno da regra de xogo, no sentido de que o alumno, a partir dos seus coñecementos previos debe poder interpreta-las consignas e condicións que definen a situación. [...] A aprendizaxe realízase a través da actividade do alumno, en tanto que cando toma decisións no contexto dunha determinada situación, estas deben permitirlle, gracias ós problemas que resolve, dar significado ó que aprende."* (Centeno, 1988, p. 116).

Brousseau distingue diferentes tipos de situacións didácticas*: situacións de acción* -o alumno aprende por adaptación a un medio que é factor de contradiccións, desequilibrios e dificultades-; *situacións de formulación* –o alumno utiliza representacións e linguaxes explícitas para organizar e comunica-las accións emprendidas-; *situacións de validación* –o alumno debe argumenta-las decisións que

toma de maneira razoada, e contrastalas con decisións alternativas-; *situacións de institucionalización do saber*- nas que se ha de dar un estatus oficial ós coñecementos adquiridos-.

Ó mesmo tempo, a teoría de situacións didácticas cataloga unha serie de fenómenos de didáctica como compoñentes do contrato didáctico que adoitan perturba-lo seu correcto desenvolvemento: *efecto "Topaze"* -diante dunha serie de fracasos continuados, o alumno "negocia" co profesor unha simplificación da situación-; *efecto "Jourdain"* -o profesor recoñece o logro dunha aprendizaxe ou coñecemento a través da resposta dun alumno, cando en realidade a resposta foi debida á casualidade ou a circunstancias banais ou pouco significativas-; *deslizamento metacognitivo*- o profesor enmascara os seus fracasos substituíndo o obxecto de coñecemento polos seus proprios modelos heurísticos-; *uso abusivo da analoxía*, que acostuma a producir efectos "Topaze".

O concepto de *erro* aparace intimamente ligado ó proceso de construcción de novos coñecementos. Brousseau (1983) considera que é posible conseguir que o erro se converta nun motor da acción e da reflexión, se se ofrecen ó alumno situacións apropiadas nas que poida analiza-los seus fracasos e volver reformula-las súas estratexias. As dificultades na aprendizaxe poden deberse a diversas causas: ó método de ensinanza, á natureza dos propios conceptos, á falla de motivación do estudiante, etc., e adoitan inhibi-lo alumno para a acción.

Outro tipo de problema de aprendizaxe máis complexo é o de *obstáculo*. Bachellard (1975) creou esta noción no contexto da física. Os obstáculos aparecen no mesmo acto de coñecer, como unha necesidade funcional de lentitude e confusión. Brousseau (1983, p.25), no contexto da aprendizaxe da matemática, define obstáculo como:

> *"... un obstáculo aparece cando se coñece contra un coñecemento anterior, destruíndo coñecementos incompletos ou mal adquiridos ... Para que poidamos falar de obstáculo, deben darse estas catro condicións:*

1. Debe ser un coñecemento, aínda que sexa falso ou incompleto.
2. Este coñecemento ten un dominio de validez e de eficacia.
3. É resistente ó cambio conceptual ou á adquisición de novos conceptos.
4. Non é fácilmente corrixible xa que non se debe a un erro pasaxeiro. Forma parte dos modelos implícitos que crea o alumno".

Brousseau distingue diferentes tipos de obstáculo: *obstáculos ontoxenéticos,* derivados das limitacións do desenvolvemento mental dun suxeito nun momento dado; *obstáculos epistemolóxicos*, inherentes o propio concepto ou noción que é necesario superar para acada-la súa comprensión; e *obstáculos didácticos*, orixinados pola elección concreta dunha metodoloxía ou proxecto para enfoca-la instrucción na aula. As nocións de obstáculo epistemolóxico e obstáculo didáctico resultarán relevantes para a nosa investigación.

Como vimos reflictindo, a noción de *sistema de prácticas*, baixo unha ou outra nomenclatura, resulta básica para discuti-lo significado dos obxectos matemáticos. Ten como obxectivo primario resolver situacións problemáticas concretas. Estas situacións-problema poden ter diversas orixes pero conducen ó mesmo fin: atopar e explica-las regras que gobernan as ditas situacións. Aínda que Chevallard insiste na "manipulación de obxectos materiais" tamén debe contemplarse a "manipulación mental" de obxectos inmateriais como compoñentes do sistema de prácticas asociados a un obxecto matemático. Neste sentido Godino e Batanero (1994) caracterizan a práctica como:

"... toda actuación ou manifestación (lingüística ou non) realizada por alguén para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solución, validala e xeneralizala a outros contextos e problemas [...] As prácticas persoais poden ser actuacións observables, isto é, manifestacións empíricas, ou tamén accións interiorizadas non observables directamente." (p. 334).

Para Godino e Batanero (1994), un concepto matemático virá dado por unha serie de propiedades invariantes que se refiren ós seus atributos e ás relacións con outros

conceptos. Pero dende o campo da sicoloxía cognitiva considérase que estes non determinan completamente o concepto, senón que este vén condicionado polas situacións e os significantes asociados a el. Así, na perspectiva da educación matemática estes autores diferencian dous significados relevantes:

- *Institucional*: emerxente a partir dun sistema de prácticas sociais asociadas a un determinado campo de problemas.

- *Persoal*: emerxente a partir dun sistema de prácticas que realiza o estudiante, que resulten significativas para el.

Na clase de matemáticas o profesor selecciona as situacións e as prácticas (tendo en conta as directrices curriculares, o libro de texto e outros posibles materiais), o cal condiciona e incluso pode determina-las posibilidades de atribución de significados que ten o alumno. Deste xeito, o sistema de prácticas consistirá esencialmente naquelas prácticas típicas da instrucción, que se refiren unicamente a algún/s subcampos do campo de problemas, aínda que eventualmente puidesen acceder a outras prácticas diferentes non incluídas na dita selección.

As diversas investigacións realizadas baixo este enfoque poñen de relevo a necesidade diferencia-lo "saber" que se pretende ensinar e os coñecementos efectivos que constrúe o alumno, as súas concepcións.

Godino (1999), afondando no enfoque anterior, desenvolve unha nova perspectiva para a investigación en Didáctica da Matemática que consideramos relevante para o PMA: a *perspectiva semiótico-antropolóxica*. Tenta analizar máis polo miúdo as consecuencias que se derivan da noción de significado que acabamos de resumir, como a chave para analiza-la actividade matemática e os procesos de difusión do coñecemento matemático. Este enfoque configúrase en torno a tres modelos teóricos emerxentes: a teoría do significado persoal e significado institucional dos obxectos matemáticos; a teoría das funcións semióticas (Eco, 1976); e a articulación das teorías das situacións didácticas e os momentos didácticos (Chevallard, Bosch e Gascón, 1997). A través da identificación de cinco dimensións ou compoñentes do significado dun obxecto ou organización matemática: *ostensiva, extensiva, actuativa, validativa e intensiva*, este

investigador pon de manifesto o relativismo epistemolóxico das nocións de significado e comprensión, soamente determinables de xeito parcial. A tipoloxía das funcións semióticas identificadas permite implementar métodos de analise da complexidade ontolóxica e semiótica do proceso de estudio das matemáticas que pode achegar explicacións para as dificultades que xorden neste proceso.

Nesta investigación estes constructos cognitivos e epistemolóxicos vannos servir para organiza-los obxectivos e analiza-los seus resultados.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Capítulo 2

Revisión histórico-epistemolóxica do cálculo integral

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

2.0.- Introducción

O núcleo da producción matemática en torno ó cálculo diferencial e integral atopámolo no século XVII, no que a práctica totalidade dos grandes matemáticos da época se ocuparon del, destacando entre eles as figuras de Newton e Leibniz.

Pero como sinalaba Morris Kline (1972), as orixes de calquera idea importante poden rastrearse ducias e aínda séculos de anos antes. Con isto queremos poñer de manifesto que, historicamente, un concepto hoxe formalizado puido existir durante moito tempo en estados "inferiores" (dende a perspectiva da teorización), diferentes nas distintas épocas, e con graos de manipulación e éxito diversos.

Un seguimento histórico do concepto en cuestión pode poñernos na pista sobre dalgunhas das intuicións que o sustentan, de desviacións en que pode incorrerse e das

dificultades que será necesario superar para corrixilas nunha nova estructura cognitiva máis eficaz, e das compoñentes desta nova estructura.

Cada matemático realizaba a súa propia aproximación ós problemas de definir e calcula-la derivada e a integral: uns razoaban de maneira puramente xeométrica, outros de maneira puramente alxébrica, e outros empregaban mesturas dos dous métodos, á súa vez diferentes entre si.

As dificultades que atoparon foron grandes e as súas construccións convertéronse en centro de moitas e duras críticas: ¿que significaba facerse infinito?, ¿e ser infinitamente pequeno?, ¿como pode sumarse liñas?, ¿como, se calquera paso consta dunha suma finita de rectángulos, podemos nalgún momento estar sumando infinitos? ...

Expresións como "fluxións", "cantidades evanescentes", "estados de transición instantánea", "última razón" ..., que hoxe podemos escoitar como propias dunha linguaxe pseudomística, foron frecuentemente utilizadas por Newton e Leibniz nos seus tratados, que abriron unha nova época dourada para as matemáticas e a ciencia en xeral. O significado quedaría posteriormente institucionalizado a partir dun novo concepto, o de límite, pero a súa aprehensión non foi posible, aínda, nesa época.

Dada a traxectoria zigzaguexa que seguiu o desenvolvemento do cálculo, propoñémonos organiza-lo resumo desta revisión histórica, científica e epistemolóxica a partir da explicitación das ideas que xulgamos relevantes para o ensino, e non a partir da secuenciación temporal coa que se produciu, aínda que ámbalas dúas perspectivas tiñan moito en común.

Intentaremos unha revisión xeral da temática implicada, xirando en torno á construcción da integral de Riemann, dende os antecedentes históricos na época grega ata a definitiva caracterización de Lebesgue: problemas que se pretendían resolver, dificultades que se atoparon, solucións que se achegaron, críticas de que foron obxecto e novas alternativas que xurdiron.

2.1.- Principais procesos de construcción do concepto de integral: implicacións didácticas

1.- Newton empregou métodos xeométricos para realizar moitos dos seus descubrementos, e tamén para probar algúns outros resultados que atopaba analiticamente. Xa o seu mestre, Barrow, fundamentara os seus resultados en forma xeométrica:

> *"As Lectiones geometrica de Barrow conteñen un gran número de transformacións xeométricas para cuadraturas, que de seren traducidas ó simbolismo analítico resultarían algoritmos estándar de cálculo diferencial e integral. Foi precisamente a dita traducción, vinculada á toma de conciencia da estructura lóxica subxacente e da xeneralidade dos métodos, o impulso definitivo que Newton e Leibniz lle deron."* (Bos, 1984, p. 88).

Na obra de Newton é esencial o desenvolvemento en series de potencias, xa que lle permitía expresar curvas complicadas como sumas de curvas sinxelas. Aínda que as series supoñían sumas de infinitos termos, basicamente é a mesma idea que regula unha gran parte do cálculo de primitivas nos niveis académicos que nos competen nesta investigación: transformar unha expresión complexa nunha combinación de expresións máis sinxelas polos métodos alxébricos habituais; a pesar de que nos textos non se lle recoñeza este carácter estratéxico, alomenos non dunha maneira explícita.

- Cando a dificultade era maior, empregaba ese mesmo procedemento para aproxima-las curvas; idea de grande importancia que poucas veces se aborda.

Establece un método para obter unha función a partir dunha área: considera un punto xenérico que describe a curva no tempo, pero non no sentido de magnitude física, senón do tempo como soporte sicolóxico que nos permite secuenciar un proceso. Este matiz vai ser fundamental na comprensión da problemática subxacente á aprendizaxe da integración: o problema da área é un problema estático e global nun intervalo, mentres que os problemas de velocidade son de variación e locais.

Punto, imaxe e área varrida variaban simultaneamente, e denominounas "fluentes", e ás súas velocidades de cambio, ou ritmos con que fluían, chamounas "fluxións".

- Empregaba intervalos "infinitamente pequenos", tan pequenos que se podían desprezar, pero distintos de 0, polo que se podía dividir entre as súas medidas.

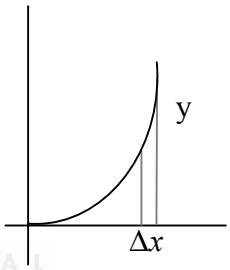
  A estratexia que adoptaba podería cualificarse como de "deriva-las integrais".

  Por exemplo, se $A(x) = x^2$ é a función que expresa a área dun recinto entre *0* e *x*:

  $A(x) + \Delta x \cdot y \approx A(x + \Delta x)$ cando $\Delta x \to 0$

  $x^2 + \Delta x \cdot y \approx (x + \Delta x)^2 \to x^2 + \Delta x \cdot y \approx x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$

  $\Delta x \cdot y \approx 2x\Delta x + \Delta x^2 \to y \approx 2x + \Delta x \to y = 2x$



- Abordaba dous tipos de problemas que son, en esencia, ecuacións diferenciais, e para os que xa construíu unha táboa de integrais:
  - Dadas as fluentes e as súas relacións, determina-las fluxións.
  - Dadas as fluxións e as súas relacións, determina-las fluentes.

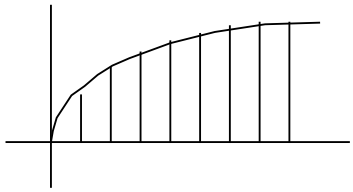
2.- Pola súa parte, Leibniz xustificaba as súas propostas pola efectividade que con elas se conseguía no cálculo. Unha das súas preocupacións era a creación dun *Cálculo*: unha linguaxe simbólica que permitise expresar e garanti-la corrección dos razoamentos, que se lle facía especialmente necesaria naqueles problemas que tiñan relación co infinitesimal, polas propias dificultades intrínsecas deles (Bos, 1984). Merece a pena valora-los aspectos metacognitivos que isto implica para a educación.

Confiaba en que, se formulaba claramente as regras das operacións e estas se aplicaban correctamente, os resultados serían tamén correctos por vagos que puidesen se-los conceptos involucrados. Ó avalia-las integrais descubriría *independentemente* a relación inversa entre os problemas de diferenciación e de integración, relación que se converteu no teorema fundamental do Cálculo.

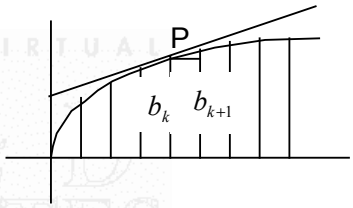
Nos seus estudios sobre series numéricas decatouse de que as series de diferencias podían sumarse facilmente:

- Dada a sucesión $\{a_n\}$ e a sucesión de diferencias primeiras asociada a ela, $b_n = a_{n+1} - a_n$, temos que $\sum_1^n b_n = a_{n+1} - a_1$. Levou esta idea á xeometría:

  Tomando intervalos de 1 unidade, Leibniz aproximaba a área baixo a curva pola "suma" das ordenadas, mentres que a diferencia entre dúas ordenadas consecutivas aproximaba a pendente da tanxente: $m = \frac{b_{k+1} - b_k}{1}$.



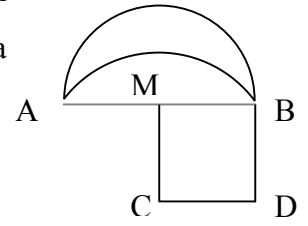
  Esta aproximación sería mellor canto máis pequena fose a unidade elixida. Os problemas de tanxentes e cuadraturas eran inversos, correspondéndose cos de diferencias e sumas.



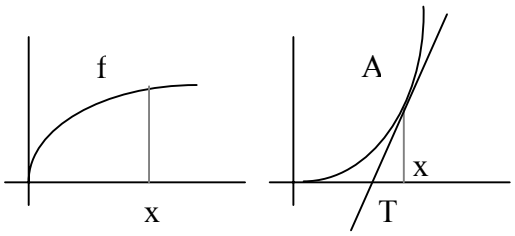
A estratexia de Leibniz suxire de xeito natural a terminoloxía adoptada: integrar, no sentido de reunir, sumar; diferenciar, no sentido de diferencia, resta.

A adxectivación "independentemente", referida ós distintos descubridores do cálculo, é moi pertinente, pois, insistimos pola relevancia do feito, unhas décadas antes Barrow xa se decatara da relación inversa derivación/integración dende a perspectiva xeométrica que adoptara, ó observa-lo carácter inverso dos problemas relativos a tanxentes e cuadraturas. A súa regra segue a se-lo resultado práctico máis recorrido na integración e, aínda que nas ordenacións lóxicas *a posteriori* frecuentemente se presente esta como un corolario, moitos autores a consideran o teorema fundamental (Bradley e Smith, 1977; Larson, Hostetler e Edwards, 1999; Gere, B.H. et al, 1972; ...).

Os problemas de cuadratura apareceran xa no século V aC con Hipócrates de Chíos, quen determina que a área da lúnula construída sobre un segmento AB, obtida facendo centros en C e M, respectivamente, é igual á área do cadrado CMBD.



Pero o propio Barrow xa os estudiara dende unha perspectiva de variación: considerando a función área *A(x)*, proba que esta ten por subtanxente T en *x A(x)/f(x)*, o que equivale a dicir que *A´(x) = f(x).*



3.- A idea de "sumar segmentos rectilíneos" xa fora usada exitosamente décadas antes por Cavalieri para, mediante analoxías xeométricas que vai construíndo sucesivamente para n = 1, 2, ..., 9, e logo xeneraliza, chegar ó resultado que hoxe coñecemos como:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

e no que, para el, *x* representaba os "segmentos elementais ou indivisibles" que formaban un triángulo. Desta maneira poderíase pensa-la superficie como unión de liñas.

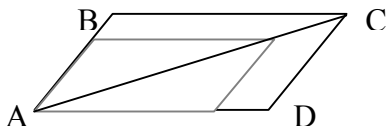
En realidade viña de moi atrás, pois xa Arquímedes barallou a idea das áreas como constituídas por infinitas liñas paralelas (indivisibles).

Dende un punto vista técnico, se as liñas teñen área 0, ¿como é posible que sumando liñas se obteña unha área cun valor arbitrario? Esta cuestión ocasiona un sutil conflicto cognitivo.

O problema filosófico ó que se enfrontaban radicaba en que aínda sendo admisible dividir unha área indefinidamente en partes, estas deberan ser da mesma "orde" ca ela, ou sexa, tamén áreas, pero os *indivisibles* eran de orde inferior, xa que eran liñas (Andersen, 1984).

Esta cuestión dista moito de ser banal e o seu estudio dános luz sobre algunha das intuicións erróneas máis frecuentes neste tema. De feito mantivo aberta unha prolífica polémica entre Cavalieri e Torriceli, como reflicte Gandt (1983), que constitúe unha ilustración dun conflicto entre paradigmas:

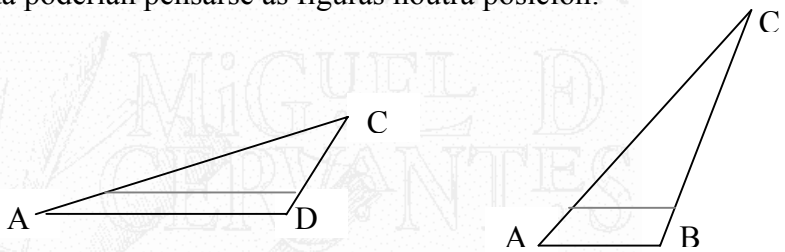
- Cavalieri considera válidas al liñas como indivisibles de superficies e a estas como indivisibles de volumes. Diante das contradiccións que se lle presentaban introduce unha serie de condicións que limitan o dominio de aplicación dos indivisibles, pero que lle permiten salvalos. Vemos un exemplo:



Se cada liña horizontal é maior cá súa correspondente vertical, o triángulo ABC debe ter máis área có ADC.

i) Entón impón a primeira condición de validez: para poder comparar magnitudes mediante indivisibles, estes deben ser paralelos a unha recta fixa (a un plano no caso dos volumes). A colocación invalidaba a aplicación do criterio de comparación.

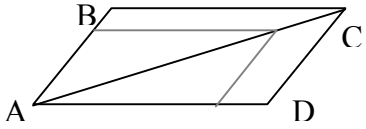
ii) Pero aínda poderían pensarse as figuras noutra posición:



Polo que impón unha nova condición: as alturas a respecto desa recta deben ser iguais.

- Torriceli propón un cambio de perspectiva: os indivisibles deben ser da mesma orde cás magnitudes primitivas.

Así, ó considerar pequenas tiras, a perda en lonxitude vese compensada polo aumento de largura, igualando as áreas.



Entón introdúcese a idea de considerar rectángulos de largura infinitesimal para o cálculo de áreas: $A = \quad a_n \cdot \Delta x$; pero, ¿que significaba que unha magnitude fose infinitesimal?, e ¿que significa unha suma de infinitos termos? (Por exemplo, a serie:

1 - 1 + 1 - 1 + 1 - .... permitía obter resultados diferentes ó aplicarlle as propiedades das sumas finitas, segundo como se elixa a maneira de facelo).

Hai, de tódolos xeitos, unha forma de avalia-la integral dunha función continua como límite dunha media de valores da función en puntos regularmente distribuídos no intervalo de integración (Linés, 1991).

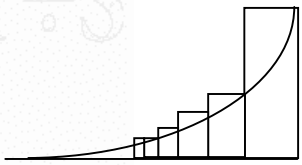
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+.....+f(\xi_n)}{n}$$

onde os ξ son puntos arbitrarios correspondentes ós n subintervalos de igual lonxitude en que se divide [a, b].

4.- Un pouco antes, pero dende unha óptica ben distante que parecía obviar esta cuestión, Fermat descubrira aquel mesmo resultado mediante series de potencias, dando unha proba para todo $n \in \mathrm{N}$, que posteriormente el mesmo xeneraliza a Q ($n \neq -1$).

- Dividía o intervalo [0, a] tomando puntos de abscisas $a, aE, aE^2, aE^3, \ldots$, con E menor ca 1.

  Para unha función do tipo $f(x) = x^n$ as áreas dos rectángulos circunscritos forman unha progresión xeométrica de razón E^{n+1}, menor cá unidade:



$$(a-aE)\cdot a^n, (aE-aE^2)\cdot(aE)^n, (aE^2-aE^3)\cdot(aE^2)^n, \ldots$$

$$(1-E)\cdot a^{n+1}, (1-E)\cdot a^{n+1}E^{n+1}, (1-E)\cdot a^{n+1}E^{2n+2}, \ldots$$

A suma dos infinitos termos será:

$$\frac{(1-E)\cdot a^{n+1}}{1-E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{\frac{1-E^{n+1}}{1-E}} = \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\ldots+E^n}$$

que se fará igual a $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ cando E sexa 1.

5.- O problema cando $n = -1$ foi resolto pouco despois por Gregoire de St. Vicent:

$$\int_a^b x^{-1}dx = \ln b - \ln a$$

Aquí pódese apreciar claramente a relación entre a integración e a derivación, así como a "forma" da regra de Barrow.

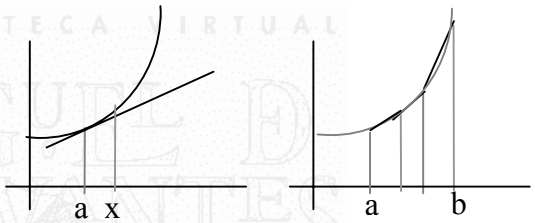
Para un sistema educativo que constrúe a integral a xeito de "consecuencia" da derivación, resulta significativo que Fermat resolvese antes os problemas de integración da familia de funcións x^n con $n \in \mathrm{N}$ cós da diferenciación (tanxentes), así como tamén sucedera con St. Vicent para a función logarítmica.

Fermat xa era coñecedor da relación inversa entre os problemas de rectificación e cuadratura. A aplicación desta idea a un intervalo resulta enormemente suxestiva, xa que nos achega conceptualmente á regra de Barrow.

- A tanxente nun punto permítenos aproxima-lo valor da curva:

  $f(x) - f(a) \approx m_a \cdot (x - a)$

  (a igualdade cúmprese para a tanxente).



  Rectificando a curva, indo por pequenos subintervalos, en [a, b] teremos:

  $$f(b) - f(a) \approx \quad m_i \cdot (x_{i+1} - x_i)\,.$$

  A pendente en cada punto permítenos, en terminoloxía actual, definir unha nova función que será precisamente a función derivada, co cal, a anterior expresión escribiriámola: $f(b) - f(a) \approx \quad f'(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)\,.$

6.- Wallis, pouco despois, reconstrúe os métodos xeométricos de Cavalieri dende unha perspectiva aritmética, asignándolle valores ós "indivisibles" e introducindo por vez primeira un símbolo para o infinito ($\propto$) que lle permitía pecha-los seus cálculos:

$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$, onde n é o número de indivisibles. Se $n = \propto$, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Aquí podemos atopar unha anticipación do concepto de límite, aínda sen un termo nin unha definición específicos. Isto suxire a posibilidade de que a tardanza en

explicita-lo concepto de límite pode ter relación co feito de que antes do XVII o método de exhaución, do que falaremos no punto 10 deste capítulo, permitíalles proba-los seus resultados.

A secuenciación académica actual favorece procesos deste tipo, xa que o alumnado chega á integración despois de ter estudiado os límites, o que suporía unha notable vantaxe.

7.- Antes ca eles, nos primeiros anos do XVII, Keppler ou Galileo tamén empregaron "sumas de segmentos rectilíneos" para estudiar e deducir leis acerca do movemento. Resulta altamente suxestivo o método seguido por Keppler para a obtención do volume dunha esfera, descompoñendo esta nunha suma de pirámides:

- Cando estas sexan tan finas que case se reduzan a segmentos, a súa altura coincidirá co raio e as súas bases cubrirán exactamente a superficie da esfera. Daquela $dV = \frac{1}{3} dB \cdot r$, e entón:

$$V_{esfera} = S_{uma}\, dV = S_{uma}\, \tfrac{1}{3} dB \cdot r = \tfrac{1}{3} r \cdot S_{uma}\, dB = \tfrac{1}{3} r \cdot S_{uperficie\ da\ esfera}$$

Coñecendo que $S_{uperficie\ da\ esfera} = 4\pi \cdot r^2$, obtemos finalmente $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

Por outra parte, Galileo xa empregou gráficas velocidade/tempo para representa-lo movemento, e interpretou a área baixo a gráfica como o espacio percorrido, e naqueles anos Torricelli explicitou que a velocidade nun instante dado é a taxa de variación do espacio, e calcula-lo espacio a partir da velocidade é o problema inverso a calcula-la velocidade a partir do espacio. Estas dúas ideas correspóndense conceptualmente coas ideas xerais da integración.

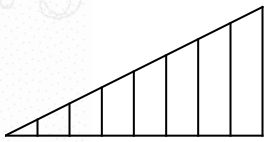
- A velocidade infórmanos de se imos percorrer moito ou pouco espacio nos instantes inmediatos.

- O producto da velocidade polo tempo de duración deses "instantes" dáno-lo valor dese espacio: un fino rectángulo baixo a gráfica. A suma de todos estes espacios dáno-lo espacio total: a área total baixo a gráfica.

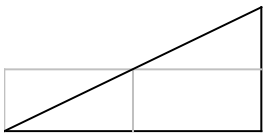
8.- Co mesmo recurso moito tempo atrás, a mediados do XIV, Nicolás de Oresme obtiña un resultado sobre velocidades que é unha auténtica recreación do teorema do valor medio, resultado que por outra parte xa fora obtido experimentalmente polos físicos do Merton College de Oxford.

- Discutíase entón a "cuantificación das formas variables" (velocidades, temperaturas,...). Oresme decide representa-lo problema mediante un debuxo; suxestivo procedemento de xogo de cadros de representación, que paga a pena non esquecer:

  Na horizontal representa os tempos, e con segmentos verticais representa as correspondentes velocidades instantáneas.
  Se partimos do repouso e se trata dunha variación "uniformemente diforme" (unif. acelerado), os extremos das verticais estarán sobre unha recta, e os ditos segmentos (velocidades) encherán o triángulo de área coincidente coa distancia percorrida.

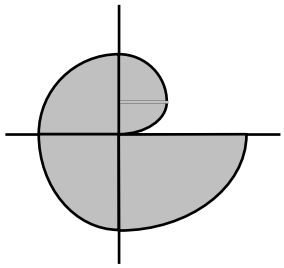


  Entón hai un instante no que leva xustamente aquela velocidade que de manterse constante permitiría percorre-la mesma distancia no mesmo tempo.



O que non aclara é por qué admite que a área coincide coa distancia; quizais por extensión do resultado evidente cando se trata dun movemento uniforme, quizais porque manexou aproximacións por rectángulos (Boyer, 1986).

9.- Dando un gran salto cronolóxico cara a atrás, no S. III a.C. atopamos unha figura ineludible: Arquímedes de Siracusa. Nos seus estudios en torno á "espiral" determina as tanxentes a ela por métodos cinemáticos que recordan o cálculo diferencial, e empregando o método de exhaución calcula as áreas varridas polo raio nas súas sucesivas rotacións.



Como el mesmo explicou no "Método", moitos dos seus descubrimentos matemáticos baseáronse en investigacións "mecánicas" previas. Por exemplo considera unha área como suma de segmentos rectilíneos que se poden "pesar" e comparar con outros corpos de "peso" coñecido, e logo aplicándolle-la lei da palanca deduce o seu valor. De xeito semellante calcula volumes de corpos de revolución segmentándoos en cilindros ou discos, tal e como o fai o método moderno de integración.

10.- A esencia da integración está xa no método de exhaución, que xeralmente se lle atribúe a Eudoxo (S. IV a.C.), quen o emprega para probar que o volume dun cono é igual a 1/3 do volume do cilindro que o contén, aínda que quizais xa fose empregando antes por Hipócatres para probar que a razón entre as áreas de dous círculos é igual ó cadrado da razón entre os seus diámetros.

Presentámolo someramente en termos actuais:

- Trátase de probar que certa magnitude X ten como medida K.
- Constrúense dúas sucesións: unha crecente I_n, e outra decrecente C_n tales que $I_n \leq X \leq C_n$.
- Se para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $C_N - I_N < \varepsilon$ e para todo $n>N$ é $I_n \leq K \leq C_n$, entón, por *reductio ad absurdum*, $X = K$.

A diferencia esencial coa integración moderna é que non manexaban formalmente o concepto de límite, aínda que todo parece indicar que na súa intuición

sempre estivo presente: subxacía como método heurístico na busca de resultados, pero non era utilizado nas demostracións.

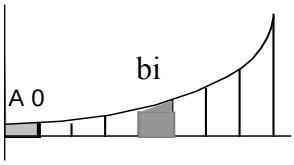
- Neste sentido resulta ilustrativo o método de Fermat, ó que nos referimos anteriormente, pois facer *E=1* soamente ten sentido como límite e, independentemente dos conceptos inherentes á integración, obte-la suma dos infinitos termos dunha progresión xeométrica presupón unha utilización implícita do límite.
- Certamente o método de exhaución presupón que o valor *K* é coñecido, polo que se precisaba dalgún método complementario que permitise obtelo, aínda que estoutro método non fose formalmente aceptado.
- A denominación do método como de "exhaución" adoptouse no século XVII con pouca fortuna xa que, como pode apreciarse, non leva ó esgotamento da figura a determinar (Dijksterhuis, 1956). Unha vez máis a idea do límite parecía entrecruzarse no camiño dos analistas.

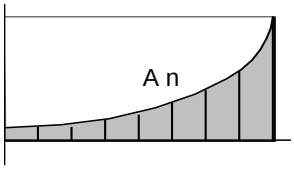
Moitos dos textos que revisamos constrúen a integral definida a partir deste método ou de ideas semellantes (sumas inferiores e superiores), o que non deixa de ser sorprendente, xa que mentres no problema clásico o que pretendían era evita-lo infinito, os estudiantes destes textos xa traballan rutineiramente con el, e particularmente cos límites.

11.- Despois de Newton e Leibniz o coñecemento matemático é reorganizado e a integración será considerada como a operación inversa da diferenciación ata ben entrado o XIX. As leccións de Johan Bernoulli a L´Hopital explican claramente o cambio de concepción: a integral non provén de sumar cantidades infinitamente pequenas dunha magnitude, senón de diferencia-la dita magnitude; o problema estriba en cómo expresar estes elementos diferenciais para, unha vez que se consiga, inverte-la operación de diferenciación. Con tal obxecto propón o "método inverso das tanxentes": determinación da ecuación dunha curva a partir de certas propiedades das súas tanxentes.

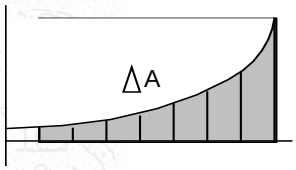
- O que estaba facendo era construír ecuacións diferenciais: dada unha magnitude, toma nela un elemento diferencial; non se pregunta cómo construí-la magnitude, senón cómo descompoñela. A posterior recomposición era outro problema.

Resulta relevante que, a pesar de que Bernoulli poña o contrapunto a Leibniz, ó considerar un recinto dado descomposto en partes infinitamente pequenas onde cada parte é unha diferencia (diferencial) de áreas, se as numerasemos e aplicasémo-las mesmas series de Leibniz, teriamos unha sucesión de diferencias primeiras $b_n = A_n - A_{n-1}$ asociada a unha sucesión de áreas A_n, e sumando os seus termos: $\sum_{1}^{n} b_n = A_n - A_0$.





Isto proporciona unha visualización moi plástica da regra de Barrow, que nos retrotrae a ideas anteriores; unha mostra máis dos sinuosos camiños polos que evolucionou o coñecemento.



$$\Delta A = \sum_{1}^{n} b_n = A_n - A_0$$

Como sinalaba Apostol (1984), o cálculo non é unicamente un instrumento técnico, senón que contén unha restra de ideas fascinantes que ocuparon o pensamento humano durante séculos. Unha das súas características é o gran poder unificador: moitos problemas dos que se ocupa pódense reducir a problemas de natureza puramente xeométrica.

12.- Adentrándonos xa no século XIX, Fourier xeneraliza o concepto de función desvinculándoa dunha presumible expresión analítica, e adopta a denominación de *funcións arbitrarias* (termo que xa fora empregado con anterioridade), para referirse a un conxunto de abscisas e ordenadas non necesariamente suxeitas a unha lei común. (Nótese cómo subxace o concepto de aplicación).

Traballando sobre sucesións de particións dun intervalo, Cauchy, motivado polas irregularidades da relación derivada/integral (nos puntos angulosos e nas descontinuidades "evitables" unha función non é derivable, pero a integral non presenta problema), recupera o sentido xeométrico da integral como límite das sumas de rectángulos, recuperando ó paso a súa propia entidade como concepto:

- Considera as sumas $S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot(x_{i+1} - x_i)$ e proba que para funcións *continuas* pode facerse que dúas sumas S e S' difiran nunha cantidade arbitrariamente pequena, con tal de que as lonxitudes dos subintervalos sexan o suficientemente pequenas, o que lle permite definir nun intervalo [a, b]:

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{como o} \quad lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot(x_{i+1} - x_i).$$

  A condición recordaranos sen dúbida a caracterización usual de "sucesión de Cauchy".

- Compárese pola súa sinxeleza coa posterior condición de Riemann, que se ocupa de funcións descontinuas, referida a que tódalas sumas relativas ás particións P con $\|P\| < \delta$, para algún δ positivo, difiran dun certo número, que será a integral, nunha cantidade arbitrariamente pequena. Entón sería:

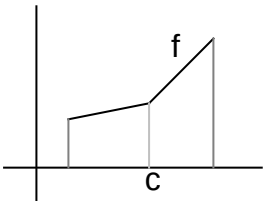
$$\int_a^b f(x)dx = Lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1} - x_i),\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

13.- Xulgamos de interese, sen embargo, unha pequena revisión desta casuística pois a frecuencia coa que os enunciados se establecen para funcións continuas nun intervalo, propicia a confusión entre "ser integrable", "ter primitiva" e "ser continua" nun intervalo.

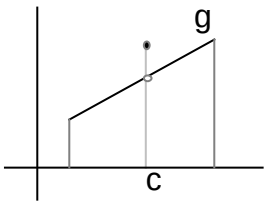
- Efectivamente, se existe $\int_a^b f(x)\cdot dx$, a función $F(x) = \int_a^x f(t)\cdot dt$ definida para todo $x \in [a,b]$ é diferenciable en calquera punto $c \in [a,b]$ no que f sexa continua, e $F'(c) = f(c)$.

- Por outra parte, se existe $\int_a^b f(x)\cdot dx$ e f ten en *c* unha descontinuidade evitable, entón $F'(\mathrm{c}) = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{c}} f(x)$.

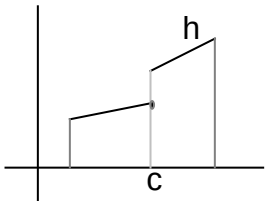
- Pero se existe $\int_a^b f(x)\cdot dx$ e f ten en *c* unha descontinuidade con salto, entón non existe $F'(\mathrm{c})$.



$F'(c) = f(c)$



$F'(\mathrm{c}) = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{c}} g(x)$



$\neg\exists\, F'(\mathrm{c})$

- As funcións *g* e *h* son integrables no intervalo da figura, a pesar de non ser continuas nel, pero ningunha das dúas ten primitiva (en xeral sucederá isto cando sendo descontinua nun punto posúa límites laterais nel).
    - No caso de *g*, a "función integral" é derivable en *c*, pero a súa derivada non coincide con *g(c)* .
    - No caso de *h*, a "función integral" non é derivable en *c*.

- Por outra parte, podemos atopar funcións descontinuas que si teñan primitiva e integral, como por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0 & , se\ x = 0 \end{cases}, \text{ obtida de derivar } g(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0 & , se\ x = 0 \end{cases}$$

- E aínda sería posible definir funcións descontinuas non R-integrables nun intervalo pechado que si teñan primitiva nel (Linés, 1991; p. 436).

14.- Pero o problema era responder se existía ou non a integral para calquera función arbitraria de Fourier.

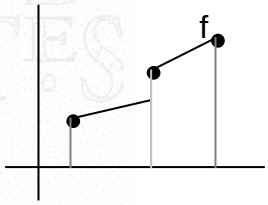
- Cauchy enuncia a súa definición de integral e proba múltiples propiedades para funcións continuas, certamente con independencia de que teñan ou non fórmula

(entendendo por *f(x)* o valor da ordenada en *x*, arbitrariamente definido), pero en realidade estaba empregando o concepto que hoxe denominamos como *continuidade uniforme*. (Nótese que se a función é continua nun pechado, é uniformemente continua nel).

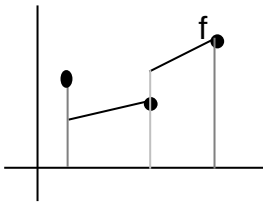
- Du Bois postula que a integrabilidade dunha función dependía de cómo fose o seu conxunto de puntos de descontinuidade.

- Na análise da conxectura de Fourier acerca do desenvolvemento de funcións en series, Dirichlet vese obrigado a revisa-la idea de integrabilidade de Cauchy, pois limita-la dita propiedade unicamente a funcións continuas restrinxía enormemente as posibilidades da análise, e definiu a integral nun intervalo como a suma das integrais nos subintervalos nos que a función si era continua (Lakatos, 1986). Isto funcionaba para funcións acoutadas cun número finito de descontinuidades: abondaba con facer coincidi-los puntos de descontinuidade con extremos dos subintervalos.

  - A estratexia é moi visible cando $Lim_{x \to x_i^+} f(x) = f(x_i)$, e poden intentalo por si mesmos os estudiantes. O exercicio ten interese pois fai presente a propiedade aditiva.



  - Noutro caso hai que pecha-las descontinuidades en intervalos cunha lonxitude que sexa desprezable. Esta idea é máis difícil, pero tamén máis fonda e con moito maior alcance, como veremos.



- A pregunta, daquela, era se se poderería estender a calquera función.

15.- Pouco despois Dirichlet atopaba o famoso contraexemplo:

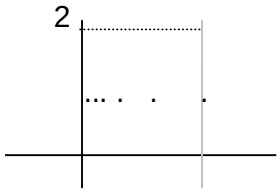
$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \in Q \\ 1 & se \quad x \notin Q \end{cases}$$

- É posible tomar particións arbitrariamente pequenas con tódolos extremos dos subintervalos racionais, o que dá lugar a sumas de Cauchy de valor 0; pero tamén

se poden tomar con tódolos extremos irracionais (agás os propios 0 e 1), o que fai que as sumas sexan ≈ 1 (non exactamente 1 por causa dese primeiro subintervalo). Logo non hai *un* límite ó que se aproximen as sumas: en todo caso dous diferentes, 0 e 1.

- Sen embargo, o propio Dirichlet cre que pode existi-la integral para funcións cun número infinito de descontinuidades. Por exemplo

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = \begin{cases} 1 & se \ \exists n \in N / \quad x = 1/2^n \\ 2 & se \ \forall n \in N \quad x \neq 1/2^n \end{cases}$$



e *conxectura* que existe a integral se o conxunto dos puntos de descontinuidade é diseminado (que entre dous puntos calquera do intervalo sexa posible atopar sempre un subintervalo no que a función sexa continua).

A idea subxacente, á cal xa nos referiamos máis arriba, é a de que tódolos puntos de descontinuidade se poidan recubrir cun número finito de intervalos de lonxitude total arbitrariamente pequena. Nese exemplo anterior podemos tomar un intervalo [0, ε] convenientemente pequeno, que pecha a case tódolos puntos de descontinuidade; o resto, un número finito, xa sabemos que non supoñen problema.

Pero o concepto de conxunto diseminado non resultaría ser equivalente ó de poderse recubrir cun número finito de intervalos de lonxitude total arbitrariamente pequena, como probaría posteriormente Cantor.

- Esta idea sería formalizada posteriormente como que o conxunto de descontinuidades teña contido nulo.

16.- Ese tipo de problemas, de corte netamente teórico, relativos á integrabilidade de funcións altamente descontinuas xunto con outros como os da converxencia de series de funcións, darían lugar á sucesivos afondamentos no rigor, dos que xurdiría a "integral de Riemann", que é a que se pretendería abordar en COU ou 2º de bacharelato.

Unha vez máis atopámonos co desaxuste académico, xa que se supera a integral de Cauchy e establécese a integral de Riemann para estes alumnos, cando a problemática que lle dá sentido é inimaxinable para eles.

Riemann estende a integral a funcións acoutadas cun número infinito de descontinuidades nun intervalo calquera. Traballa sobre as ideas de Cauchy, aínda que cunha noción máis xeral de "suma", e define a integral, se existe, como:

$$Lim_{\max\{(x_{i+1}-x_i)\}\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i),\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

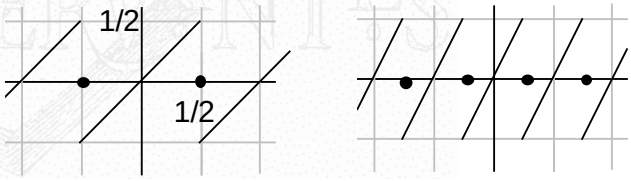
Constrúe unha función integrable altamente descontinua mediante unha serie uniformemente converxente:

$f(x) = \sum_i \frac{f_i(x)}{i^2}$ onde, sendo $f_1(x) = \begin{cases} x - E(x) & se \quad |x - E(x)| < \frac{1}{2} \\ 0 & se \quad |x - E(x)| = \frac{1}{2} \\ x - E(x+1) & se \quad |x - E(x)| > \frac{1}{2} \end{cases}$

E(x) a parte enteira de *x*,

e, para todo *i*: $f_i(x) = f_1(i \cdot x)$.

Esbozamo-las gráficas de f_1 e f_2:



A función $f_1(x)$ é descontinua en tódolos puntos $\frac{2n+1}{2}$, para todo enteiro *n* (incluíndo o 0). En xeral, $f_i(x)$ é descontinua en tódolos puntos $\frac{2n+1}{2i}$, para todo enteiro *n*. Cada punto de descontinuidade dalgunha das funcións f_i produce un salto que fará que f tamén o teña: hai infinitos puntos de descontinuidade en cada intervalo.

Riemann non manexaba as ideas formais de medida, e dá unha caracterización da integrabilidade analizando o "salto" que se produce nas descontinuidades (idea que conectaría co concepto posterior de oscilación, e que posiblemente abre a futura perspectiva de traballar sobre o eixo de ordenadas):

- Unha función acoutada é integrable "*see*" para todo σ>0 a suma das lonxitudes dos intervalos para os que é $\sup\{f(x)\}-\inf\{f(x)\}>\sigma$ pode facerse tan pequena como se desexe, con tal de toma-las particións o suficientemente finas.

17.- A xeneralización de Darboux da relación que coñecemos como "regra de Barrow", que xa fora probada por Cauchy para derivadas continuas, supuxo un gran triunfo para a integral en sentido Riemann, xa que demostraba que as súas condicións de existencia, moito máis débiles, garantían tamén esta fundamental propiedade (Hawkins, T., 1984).

- Se f ten unha derivada f' acoutada e integrable (en sentido Riemann) no intervalo [a, b], entón: $\forall x\in[a,b]\quad \int_a^x f'(t)\,dt = f(x)-f(a)$.

Pero no contexto da integración de Riemann, integración e derivación non son completamente reversibles.

- Isto pon de manifesto outro dos desaxustes académicos habituais, cando se presenta a integración (precisamente de Riemann) como a "operación" inversa da derivación.

Se f ten unha derivada f' que se anula nun conxunto denso de puntos do intervalo [a, b], e f non é constante, entón non existe $\int_a^b f'$ (en sentido Riemann), xa que nas sumas de Riemann sempre poderiamos elixir puntos nos que a función f' fose 0, logo a integral sería 0, pero do teorema anterior concluiríase que f era constante:

$$\forall x\in[a,b]\quad \int_a^x f'(t)\,dt = f(x)-f(a)=0 \qquad f(x)=f(a).$$

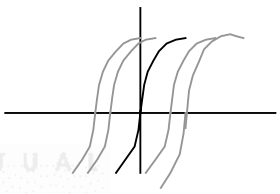
18.- A dificultade estaba en construír funcións dese tipo. Posiblemente foi Weierstrass, co seu proceso de construcción dunha función continua que non é

diferenciable en ningún punto, quen abriu un camiño de invención de funcións especialmente anómalas, difíciles de imaxinar e de pintar: $f(x) = \sum_{i=1} \frac{1}{10^i} E\left(10^i x\right)$.

Nótese que a función "altamente descontinua" de Riemann segue esa mesma estratexia de ir engadindo a unha función anterior as anomalías doutra función semellante pero moitas veces repetidas.

Un gran paralelismo pode verse na función de Bodrén, que responde ó contraexemplo buscado:

$f(x) = \sum_i \frac{f_i(x)}{2^i}$, sendo $f_i(x) = (x - a_i)^{1/3}$, onde os a_i forman un conxunto denso no intervalo [-1, 1].



A función ten tanxentes verticais nun conxunto denso. Como é suma uniforme de continuas é continua, e por ser estrictamente crecente ten inversa continua, tamén estrictamente crecente, a cal ten consecuentemente tanxentes horizontais nun conxunto denso. A dita inversa é o contraexemplo desexado.

19.- A limitación da integral de Riemann ía estar, como parecía poñerse de manifesto nos contraexemplos que viñan xurdindo, en que non se conserva no paso ó límite:

- Se $\{f_n(x)\}$ é unha sucesión converxente de funcións R-integrables un intervalo $[a, b]$, sendo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, non necesariamente se cumprirá que exista $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$
- Si se cumpriría cando a converxencia fose uniforme.
- Cauchy xa probara que se cumpría para funcións continuas, aínda que implicitamente estaba manexando a idea, entón aínda descoñecida, da converxencia uniforme.

Nesta liña de traballo, Baire obtería a función de Direchlet como límite dunha sucesión uniformemente acoutada[1] de funcións R-integrables en [0, 1]:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x = p/q \ irreducible, \ con \ q \le n \\ 0 & noutro \ caso \end{cases}$$

Lebesgue ía construír un novo concepto de integral compatible co paso ó límite para sucesións de funcións uniformemente acoutadas, na cal a función de Direchlet tería integral (igual a 0)[2]. Pero as súas ideas están vinculadas ó problema da medida, que tomou un impulso definitivo das incipientes teorías conxuntistas de Cantor, coas notabilísimas intervencións de Jourdan e Bórel, entre outros. Para velo temos que volver atrás; máis adiante referirémonos a isto.

20.- Hankel adopta unha posición conxuntista: o problema de establece-las condicións de existencia da integral é un problema de caracteriza-los conxuntos dos puntos "problemáticos"; ou sexa, de determinar cándo estes son "desprezables"; en definitiva, trátase dun problema de *medida*.

Traballa na idea de estudia-los "saltos" dunha función, á que xa nos referimos, que xeneraliza no concepto de oscilación:

$$\omega(x) = \lim_{\delta \to \infty} \{\sup f(t) - \inf f(t), t \in (x - \delta, x + \delta)\}$$

(Nótese que unha función f é continua nun punto x *see* $\omega(x) = 0$)

Particularmente a súa caracterización de R-integrabilidade viña dada por que para todo $\sigma > 0$ o conxunto $\{x / \omega(x) > \sigma\}$, dos puntos de oscilación maior que σ, poida ser recuberto por un número finito de intervalos de lonxitude total arbitrariamente pequena.

[1] $\exists B > 0 / \forall n, |f_n(x)| \le B \ \forall x \in [a, b]$.

[2] Algúns autores intercambian o índice, co que a integral resultaría ser 1.

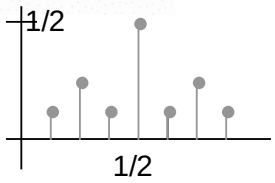
21.- Jourdan desenvolve a súa teoría da medida[3] e aplícalla á integral estendendo as ideas de Darboux de integral superior e integral inferior a conxuntos medibles, non necesariamente intervalos:

- Referíndose a un intervalo [*a,b*], define $\underline{f} = \sup\left\{ \sum_k m_k \cdot c(X_k) \right\}$ e $\overline{f} = \inf\left\{ \sum_k M_k \cdot c(X_k) \right\}$, con $m_k = \inf\{f(x) / x \in X_k\}$ e $M_k = \sup\{f(x) / x \in X_k\}$, sendo $\{X_k\}$ unha partición do intervalo en conxuntos medibles disxuntos. Unha función sería R-integrable *see* $\underline{f} = \overline{f}$.

22.- A condición que ía garanti-la de integrabilidade de Riemann sería a de que o conxunto de puntos de descontinuidade teña *contido nulo* (que se poida recubrir por un número finito de intervalos pechados de lonxitude total arbitrariamente pequena).

Sen embargo, aínda será posible atopar funcións cun conxunto de descontinuidades que teña contido *non nulo*, e que sen embargo son R-integrables:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x = 0 \wedge x = 1 \\ 0 & se \quad x \notin Q \\ \frac{1}{q} & se \quad x = \frac{p}{q}, \textit{irreducible} \end{cases}$$



- A función anterior ten integral igual a 0 e é descontinua en tódolos racionais do intervalo, que constitúen un conxunto de contido non nulo: non é posible recubrilos cun número finito de intervalos de lonxitude total arbitrariamente pequena, aínda que si sería posible facelo con infinitos intervalos.

[3] Define o contido dun conxunto (en R) a partir de lonxitudes de intervalos, I_k. Contido interior: $c_i(X) = \sup_{I_k \subset X} l(I_k)$ (disxuntos dous a dous) e contido exterior: $c_e(X) = \inf_{I_k \cap X \neq \Phi} l(I_k)$. Cando ámbolos dous valores coinciden dise que X é medible, e a súa medida, ou contido, é ese valor.

- Pero esta última idea aínda tardaría en chegar. Un resultado decisivo foi a proba de Harnack de que os conxuntos numerables teñen medida 0:

$$E = \{e_n / n \in N\} \subset \bigcup_n (e_n - \varepsilon/2^n , e_n + \varepsilon/2^n)$$

- A posibilidade de empregar unha colección numerable amosábase prometedora. Por outra parte algúns conxuntos densos eran numerables, como $Q \cap [0,1]$, de contido 1, que fora o utilizado por Dirichlet.

23.- Sería Lebesgue quen, definitivamente conseguiría caracteriza-las funcións R-integrables: aquelas cun conxunto de descontinuidades que teña *medida nula* (medida en sentido Lebesgue[4], xa que se construíron varias teorías ó respecto).

- Na terminoloxía anterior, medida nula significaría que se poida recubrir por un número finito ou numerable de intervalos pechados (ou, de xeito equivalente, abertos) de lonxitude total arbitrariamente pequena.
- Desta maneira, contido nulo implica medida nula, pero a recíproca non é certa en xeral. (Si o é no caso de compactos).

24.- Pero Lebesgue non se detén aquí e trata de supera-las limitacións da integral de Riemann cunha nova concepción, de xeito que:

- Se f ten unha derivada f' acoutada no intervalo [a, b], exista $\int_a^b f'$ (en sentido Lebesgue), e: $\forall x \in [a,b] \quad \int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$.
- Que a nova integración se conserve no paso ó límite:

[4] Estende a medida de Jordan apoiándose nas propostas de Bórel, quen resolvera o problema da medida de Cantor de que podía darse o caso de que a unión de dous conxuntos disxuntos tivese menor medida que a suma das medidas deles. Define medida exterior admitindo coleccións numerables de intervalos; para o caso de $X \subset [0,1]$ sería: $m_e(X) = \inf_{I_k \cap X \neq \Phi} l(I_k),\ k \in N$, e a medida interior como $m_i(X) = 1 - m_e(X^c)$. Cando ámbolos dous valores coinciden dise que X é medible, e a súa medida é ese valor.

Se $\{f_n(x)\}$ é unha sucesión uniformemente acoutada de funcións L-integrables nun intervalo $[a,b]$, e é $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, necesariamente se cumprirá que existe $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

- Isto permitiría integra-la función de Dirichlet, a partir da serie de Baire. Estudia, entón, a posibilidade de estende-lo concepto de integral ata poder abarca-las funcións índice ou funcións características de certo conxunto, a partir das cales podería aproximar calquera función (acoutada e medible):
  - Toma particións do conxunto das ordenadas, $\{\Delta y_i\}$, tendo que

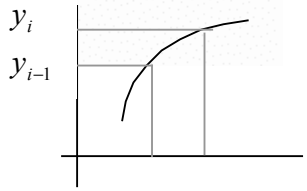
$$f(x) \approx \sum_1^n y_i f_i(x) \quad \text{con} \quad f_i(x) = \begin{cases} 1 & se \quad f(x) \in \Delta y_i \\ 0 & se \quad f(x) \notin \Delta y_i \end{cases}$$

Adopta así un punto de vista inverso: traballa sobre particións do conxunto das ordenadas, en lugar do das abscisas; e aplica a súa medida obtendo as correspondentes sumas inferiores e superiores:

$$\sum_{i=1}^n m\{x / y_{i-1} \le f(x) \le y_i\} y_{i-1} \quad ; \quad \sum_{i=1}^n m\{x / y_{i-1} \le f(x) \le y_i\} y_i$$

(m indica aquí medida)

(Nótese que nos casos máis sinxelos coinciden coas sumas usuais)

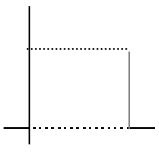


E define a integral como o límite, se existe, común a estas sumas cando a amplitude máxima dos intervalos tende a 0.

Necesita entón que os ditos conxuntos de abscisas teñan medida, para o cal establece o concepto de función medible: se para todo α o conxunto $\{x / f(x) > \alpha\}$ é medible.

- En particular a función de Dirichlet:

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in Q \\ 0 & se \quad x \notin Q \end{cases}$$



$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m\{x / y_{i-1} \le f(x) \le y_i\} y_{i-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m\{x / y_{i-1} \le f(x) \le y_i\} y_i =$$
$$= m([0,1] \cap \mathrm{I}) \cdot 0 + m([0,1] \cap Q) \cdot 1 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

- En xeral, para $f(x) = \sum_i y_i f_i(x)$ con $f_i(x) = \begin{cases} 1 & se \quad f(x) \in \Delta y_i \\ 0 & se \quad f(x) \notin \Delta y_i \end{cases}$ será:

$$\int_a^b f = \sum_i y_i \cdot \int_a^b f_i = \sum_i y_i \cdot m(E_i)$$

onde E_i é conxunto de puntos nos que a función f_i vale 1.

25.- Respecto dos camiños seguidos para a construcción teórica da integral definida destacamos, polas posibilidades de adaptalos ós alumnos en cuestión:

- As sumas de Cauchy: $S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$, nas que se considera o valor da función no extremo inferior de cada subintervalo, porque permiten intuí-la existencia de $lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$ nos termos de converxencia usuais.

- As sumas superiores e inferiores, introducidas por Darboux (Guzman & Rubio, 1979), buscando a igualdade:

$$Supremo \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \right\} = Ínfimo \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \right\}$$

na que non se apela ó límite, pero na que tampouco se dá unha vertente constructiva do problema por resolver, senón que se refire unicamente á existencia da solución (integral definida).

Este tratamento parecería especialmente interesante se intentasemos acouta-los erros, pero desafortunadamente preséntase nos textos desvinculado desta cuestión, por outra parte de grande importancia. Iso non é que lle reste lexitimidade teórica, pero si valor educativo.

Outra xustificación didáctica podería estar en funcións como a de Dirichlet, pero tampouco se mencionan nos textos deste nivel, agás raras excepcións.

- As sumas de Riemann, nas que o proceso si se fai constructivo apelando ó límite:

$$Lim_{\max\{(x_{i+1}-x_i)\}\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i),\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

pero onde o límite debe corresponder a calquera das sucesións formadas tomando particións sucesivas coas súas normas converxendo a 0, e elixindo arbitrariamente un punto calquera de cada subintervalo; idea bastante máis complexa cás de límite dunha sucesión ou dunha función, que estes estudiantes manexan.

- Neste sentido, pero un pouco máis simple preséntao J. Stewart (1999), que si considera unicamente particións de anchura constante nos subintervalos, pero que toma "puntos mostra" arbitrarios en cada un deles. Isto permite simplificar notablemente as expresións:

$$Lim_{h\to 0}\, h\cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ ,\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

- Por outra parte, concretamente a identificación do punto medio dun intervalo ofréceno-la posibilidade de sistematiza-lo cálculo (*regra do punto medio*):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x_i})\cdot(x_{i+1}-x_i),\quad \overline{x_i} = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\ .$$

Isto ten moita importancia no tratamento computacional: combinado coa suxestión de J. Stewart, poderíamos xerar a priori tódolos valores da variable:

$$\overline{x_i} = x_0 + (2i+1)\frac{h}{2}\ .$$

26.- Respecto das demostracións, atopamos dous tipos clásicos e usuais, que con maior ou menor rigor son as que seguen os textos de secundaria. Comentámolo someramente:

a) Aquelas que, unha vez probada a aditividade sobre o intervalo e o teorema do valor medio, deducen a relación fundamental para funcións continuas. Na proba do T.V.M. "encaixan" a integral entre uns valores mínimo e máximo (o que

presupón ter demostrada a ordenación), e logo ó reduci-lo intervalo fan que no punto medio *c*, *f(c)→f(x)* por se-la función continua nun pechado:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx \qquad m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

$$\exists c \in (a,b) / f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \qquad \int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(x)dx}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(c)\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} f(c); \quad c \in (x, x+h) \qquad A'(x) = f(x)$$

b) Aqueloutras que, baixo os mesmos presupostos, "encaixan" directamente a integral entre uns valores mínimo *m* e máximo *M*, e ó reduci-lo intervalo fan que $f(x_m) \to f(x)$ e $f(x_M) \to f(x)$ por se-la función continua nun pechado:

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \quad ; \quad m\cdot h \le A(x+h) - A(x) \le M\cdot h$$

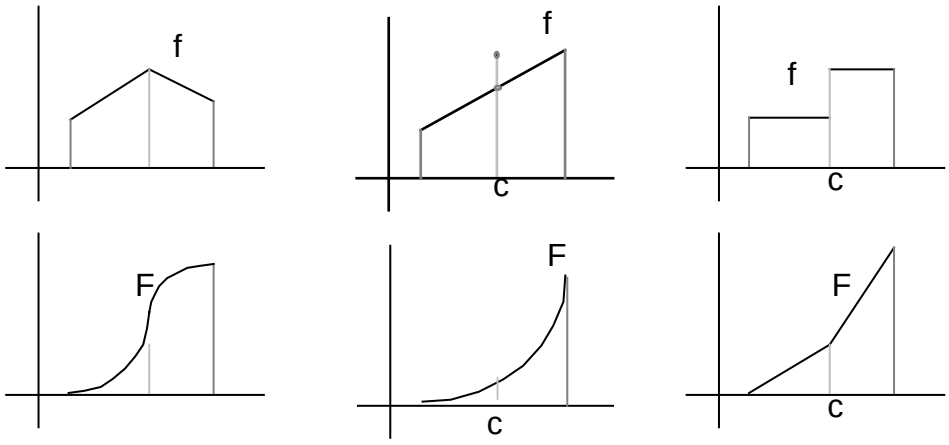
$$f(x_m) = m \le \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \le M = f(x_M), \quad x_m, x_M \in [x, x+h]$$

$$h \to 0 \qquad f(x_m) \to f(x) \wedge f(x_M) \to f(x) \qquad \lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$$

Tamén Abraham Robinson (1996) utiliza esta segunda estratexia dende a perspectiva da análise non-estándar, pero mentres que nas clásicas o obxecto $\int_x^{x+h} f(x)dx$ queda desprovisto de identidade a pesar de que acaba de ser construído mediante sumas, Robinson mantén explícito que o que acouta é a parte estándar das sumas correspondentes.

27.- A forma de presenta-los enunciados dos teoremas, referíndose expresa e previamente ó carácter continuo das funcións, deixa un baleiro importante acerca do que sucedería respecto deses mesmos resultados se a función non fose continua.

- Isto pode limita-lo pensamento acerca da integración ás funcións continuas, o que resulta contradictorio coas propias introduccións ó tema, que se basean na coincidencia dos límites ou do ínfimo e supremo das sumas superiores e inferiores, a xustificación lóxica do cal ven requirida precisamente polas funcións non continuas.
- Alomenos, pola súa sinxeleza e porque en temas e incluso cursos anteriores estudian os puntos de descontinuidade, parece interesante tratar funcións continuas a anacos.
- Respecto do teorema fundamental, un tratamento xeneralizado levaríanos a comprender cómo *regulariza* as funcións o proceso de integración (xa puxemos unhas notas no apartado 13 deste mesmo capítulo). Afortunadamente o cadro xeométrico é enormemente clarificador. Sexa $F(x) = \int_a^x f(t)\cdot dt$:
    - A f continua asígnalle F derivable, aínda que f non o sexa.
    - Incluso se a descontinuidade é evitable, F é derivable.
    - Se f é descontinua con salto, F é continua.



    - En xeral, se f é integrable, F é continua.
- Respecto ó teorema do valor medio, presentalo para funcións integrables non continuas non permitiría máis que constatar que hai un número η situado entre

dúas cotas calquera de *f(x)* en [*a,b*], inferior e superior respectivamente, tal que $\int_a^b f(x)dx = \eta \cdot (b-a)$.

- Hai, de tódolos xeitos, unha versión xeneralizada: se *f* é unha función non negativa e existe $\int_a^b f(x)dx$, entón para toda función *g* continua en [*a,b*]:

$$\exists c \in [a,b] / \int_a^b g(x)f(x)dx = g(c)\int_a^b f(x)dx .$$

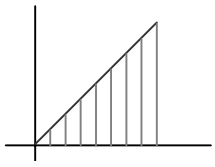
(Cando para todo *x* é *f(x) = 1*, témo-lo teorema coñecido).

- A versión restrinxida do teorema do valor medio permítenos defini-la altura media ou, máis xeralmente, a *media dun conxunto infinito* de números, a través da integral.

Neste caso si que "sumamos" ordenadas, pero a integral non me dá outra ordenada, senón unha "superficie", da cal obteño a ordenada media dividindo entre *b-a*.

Nótese que o conxunto de números non é sequera numerable, para o cal aínda sería posible formar unha serie (quizais absolutamente converxente), senón que é un continuo numérico.

A interpretación literal de "sumar ordenadas" lévanos de camiño a evidentes contradiccións: se a suma de tódalas ordenadas de *f(x)=x* entre 0 e 1 fose a área, aquela valería 1/2 , o cal sería absurdo pois soamente a última xa vale 1.



- Respecto da regra de Barrow tamén é posible unha xeneralización a funcións que teñan primitiva, aínda que non sexan continuas.

  - Un resultado que se emprega habitualmente na demostración é que se dúas funcións teñen a mesma derivada entón diferéncianse nunha constante. Sen embargo nos textos de secundaria non é frecuente atopa-la súa proba nos capítulos de derivación, senón a da proposición recíproca, polo que é posible que entre os estudiantes exista confusión.

28.- Sorprendentemente nos textos de secundaria o tema está capitalizado pola antiderivación, e aínda así descoindándose os aspectos metacognitivos desta operación, xa que se ben se declara que "a integración é a operación inversa da derivación", apréndense *per se* "fórmulas de integrar". O panorama non pode ser máis desalentador: a maioría das funcións elementais non teñen primitivas elementais (J. Stewart, 1999).

- Unha curva tan sinxela como $f(x) = e^{x^2}$ non ten primitivas elementais. Isto significa que non podemos avaliar $\int_a^b e^{x^2} dx$ en ningún intervalo, a pesar de te-la seguridade de que existe por ser f continua.
- O mesmo nos pasaría con $\sqrt{1+\cos x^2}$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $sen x^2$, $\sqrt{x^3+1}$ ou $\frac{1}{Lx}$, por citar algúns exemplos do corte daqueles que constitúen a tipoloxía habitual no cálculo de primitivas, e que non revisten en aparencia maiores dificultades.
- Particularmente destacable é o caso da curva normal, peza clave nos estudios estatísticos. Como pode verse facilmente trátase unicamente duns axustes de coeficientes con respecto á anterior $\int_a^b e^{x^2} dx$: $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$, no caso da distribución N(0,1), e novos axustes (ou tipificación previa) se a media é distinta de 0 ou a desviación típica é distinta de 1.

29.- A pesar da importancia que tivo o problema da área na creación da integral, esta non proporciona o mellor método para defini-las áreas, aínda que si vai ser con frecuencia o instrumento axeitado para calculalas (Spivak, 1992).

Das implicacións propiamente matemáticas derivadas de identifica-los conceptos de área e integral (ben definindo a integral como a área, ben definindo a área como a integral) dános cumprida conta o noso ilustre Puig Adam (1979) cando sinala a

necesidade de probar que a área definida sexa unha propiedade intrínseca do recinto que pretendemos medir, independente do sistema de referencia.

- Para a súa exposición introduce entón a noción de área de Jordan, quen propuxera adopta-lo punto de vista conxuntista de Cantor. Nunha linguaxe entre formal e intuitiva, define a área dun recinto arbitrario de Jourdan como a *fronteira* común das áreas dos conxuntos formados polas áreas dos polígonos[5] *envoltos* e *envolventes*, respectivamente, onde o elemento definido (área) é independente dos elementos arbitrarios introducidos na definición. (Nótese que un cambio no sistema de referencia provocaría un cambio de ecuación da curva, ademais do troco nos valores que puidese ser debido ás unidades elixidas).

No mesmo sentido, aínda que soamente sexa a xeito de ilustración, indicámo-la definición axiomática de área dada por Apostol (1984):

Sexa M unha clase de conxuntos do plano e a unha función de conxunto en $\boldsymbol{R}$ con dominio M. Diremos que a é unha función área se verifica as seguintes propiedades:

1ª- *Non negatividade*: $a(S) \geq 0 \quad \forall\, S \in M$

2ª- *Aditividade*:

$$\forall S,T \in M \quad S \cup T \in M \wedge S \cap T \in M \wedge a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$$

3ª- *Diferencia*:

$$\forall S,T \in M \,/\, S \subseteq T \quad T - S \in M \quad \wedge \quad a(T - S) = a(T) - a(S)$$

4ª- *Invarianza*: $\forall S \in M, T \equiv S \quad T \in M \quad \wedge \quad a(S) = a(T)$ [6]

5ª- *Escalonada*: Todo rectángulo[7] $R \in M$.

Se os lados de R teñen de lonxitudes h e k, entón $a(R) = h \cdot k$

6ª- *Exhaución*:

$$\forall Q \,/\, \exists S,T \in M \,/\, S \subseteq Q \subseteq T, \exists^{\bullet} c \in R \,/\, a(S) \leq c \leq a(T) \quad Q \in M \wedge a(Q) = c$$

[5] Polígonos: unións conexas de unidades de superficie.

[6] Define $T \equiv S :\Leftrightarrow \exists\, f : T \to S$ bixectiva que conserva as distancias, isto é:

$$\forall p,q \in T \quad \left| f(q) - f(p) \right| = q - p \,.$$

[7] Define o rectángulo a partir da "base" e "altura": $R = \{(x,y) \,/\, 0 \leq x \leq h \wedge 0 \leq y \leq k\}$.

Nótese que o axioma 3 xunto co 1 implican a ordenación: $S \subseteq T \quad a(S) \leq a(T)$; o axioma 5 xunto co 2 permítenos considerar áreas de rexións escalonadas (sumas de rectángulos); e o axioma 6 permítenos estende-la medida a conxuntos máis xerais.

A aceptación do axioma de elección introducirá aínda maiores sutilezas na cuestión, pois virá a significa-la imposibilidade de medir tódolos conxuntos.

30.- Sen embargo, o principal uso da integral vai ser para construír novas funcións, que virán demandadas polas ecuacións diferenciais. Máis explícitos son aínda Larson, Hostetler e Edwards (1999), que chegan a defini-la integración indefinida ou antiderivación como a operación de resolver tódalas solucións dunha ecuación diferencial $dy = f(x)dx$.

Esta visión xa era sostida por Euler a mediados do XVIII, desvinculando as funcións das súas orixes xeométricas. Traballando na liña de Leibniz introduciu o cálculo con diferencias infinitamente pequenas que consideraba, de facto, iguais a 0, pero que tiñan razóns que podían acadar un valor finito determinado.

Nos seus *Textos sobre o cálculo integral* aporta unha grande cantidade de métodos para resolver ecuacións diferenciais, tanto ordinarias como en derivadas parciais. Presenta xa a ecuación xeral:

$$0 = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots.$$

As ecuacións diferencias xurdían ó fío de problemas da Astronomía ou da Física. Particularmente interesante resultou a descrición do movemento do péndulo: $\frac{d^2\alpha}{dx^2} + mg\sin\alpha = 0$, que Newton utilizou para deduci-lo abombamento da Terra no ecuador.

Un dos problemas que resolveu Leibniz foi o da traxectoria ortogonal a unha familia de curvas, mediante a ecuación diferencial $y^2 = -2xy\frac{dy}{dx}$, introducindo a técnica de separación de variables.

Figuras destacadas foron os Bernouilli; entre outras:

- Jacques resolve a isócrona (traxectoria que se percorrería no mesmo tempo que a pendular), a través da ecuación diferencial: $dy\sqrt{b^2 y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$.
- Jean, a Catenaria (forma que adopta un cable suxeito polos extremos), mediante a ecuación diferencial: $dy = \frac{a \cdot dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.
- Daniel describe o movemento dunha barra elástica pola solución da ecuación diferencial : $k^4 \frac{d^4 y}{dx^4} = y$.

Tamén foron notables as aportacións de D´Alambert, aplicadas a problemas de música, equinoccios, perturbacións do movemento lunar ...

Posteriormente Lagrange estudia as ecuacións diferenciais non homoxéneas.

Con ecuacións diferenciais desenvolve Laplace a súa *Mecánica celeste*.

A transcendencia interna para a propia Matemática foi estudiada por Boole a mediados do XIX, analizando os paralelismos entre as propiedades dos operadores diferenciais e as regras da álxebra.

Unhas décadas despois Poincaré fai un desenvolvemento teórico sobre teoremas de existencia de solucións de ecuacións diferenciais.

Crecementos de poboación, economía, estudios de mercado, desintegración radioactiva, deforestación, epidemias, curvas de aprendizaxe, difusión da información,

disolucións, efecto de un medicamento ..., son algúns dos exemplos que se poden abordar simplemente con ecuacións diferenciais de 1ª orde.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Capítulo 3

Problema de investigación

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

3.0.- Introducción

Nas últimas décadas asistimos a un proceso crecente de algoritmización no ensino das matemáticas, descoidándose os aspectos contextualizadores dos conceptos que se introducen e as súas aplicacións a situacións do contorno, mesmo do contorno académico dos estudiantes.

Particularmente a integración/cálculo integral pivota sobre os mecanismos de cálculo de funcións primitivas, inverténdose a maior parte do tempo e dos esforzos de alumnos e profesores na súa exercitación.

A experiencia persoal do investigador, como docente en matemáticas de COU, e o continuo intercambio de opinións cos seus colegas, levárono a pensar que este sesgo no desenvolvemento do tema transmite unha suposta énfase neses aspectos mecanicistas, o que leva a unha interiorización por parte dos estudiantes de que nos traemos entre mans un aparello de cálculo infalible e de uso universal, xa que a totalidade dos problemas propostos están adaptados para ser resoltos sen máis

requirimentos que unha aplicación correcta dos algoritmos, na que centran os seus esforzos cognitivos.

- Na realidade isto dista moito de ser así, xa que os verdadeiros problemas presentan uns altos niveis de complexidade, que fan que aqueles algoritmos resulten pouco versátiles.

Como consecuencia da asunción por parte dos alumnos dese enfoque algorítmico, poden derivarse:

- Dificultades para comprende-los enunciados.
- Falta de iniciativa ante problemas nos que poderían empregarse, alomenos nunha primeira fase, procedementos xerais que se supoñen básicos na formación.
- Incapacidade para reorganiza-las técnicas utilizadas en cursos anteriores, en función das novas demandas.

Nunha consulta realizada a profesorado de matemáticas de universidade e de ensino secundario acerca dos problemas que iamos seleccionando de cara á elaboración dos cuestionarios, e que se detalla no capítulo 4 desta memoria, engadíase unha recollida de opinións acerca da problemática xeral que abordamos na presente investigación. A partir dela, puidemos coñecer cómo, dende unha perspectiva formativa máis ampla, coincidían con nós nas súas preocupacións acerca do alumnado, preocupacións que se corroborraban nos diálogos persoais que mantiñamos con eles/as tanto previamente, para explicárlle-las nosas intencións e pedírlle-la súa colaboración, como posteriormente na recollida dos cuestionarios.

En canto as opinións ás que nos estabamos a referir, dadas por escrito, cuantificámo-las puntuacións. Concretamente a cuestión dicía así:

> Finalmente, dende unha óptica xeral, pregámoslle que responda as seguintes preguntas, utilizando a mesma escala (de menos a máis):

a) ¿Considera vostede importante desenvolver estratexias de exploración visual?

..... 1 2 3 4 5

b) ¿É prioritario ter unha visión de conxunto de todo o tema?

..... 1 2 3 4 5

c) ¿É prioritario que o alumno aprenda conceptos, propiedades e resultados básicos e que saiba contextualizalos e aplicalos a situacións diversas?

..... 1 2 3 4 5

d) ¿É prioritario que o alumno aprenda conceptos, propiedades e resultados básicos, sendo capaz de repeti-las demostracións dos teoremas, e de aplicalos á resolución de exercicios-tipo?

..... 1 2 3 4 5

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

As valoracións medias (sobre 5, tal como figuraba no cuestionario), foron de:

	Universidade	Secundaria
a) ... desenvolver estratexias de exploración visual.	5	4´4
b) ... visión de conxunto de todo o tema.	4´125	4´6
c) ... contextualizalos e aplicalos a situacións diversas.	4´75	4
d) ... repeti-las demostracións dos teoremas, e de aplicalos á resolución de exercicios-tipo.	2´625	3´4

Estas puntuacións ó igual que os diálogos persoais, aínda que soamente tiñan carácter indicativo, permitíanos constatar que tanto as nosas preocupacións como a nosa valoración das intencións formativas estaban dentro da óptica xeral da comunidade educativa matemática.

Propoñiámonos nesta investigación pasar do plano das opinións ó da contrastación, o que lle daría un claro carácter descritivo e nos situaría fronte ó horizonte de establecer cáles poderían se-las liñas básicas que orientarían futuras elaboracións de unidades didácticas alternativas, polo que decidimos incluír esta tarefa no proxecto de tese.

3.1.- Antecedentes

3.1.1. Investigacións realizadas en torno á aprendizaxe do cálculo integral

As investigacións de Orton (1980) revelan un nivel aceptable dos estudiantes no manexo dos algoritmos alxébricos para o cálculo de primitivas e, sen embargo, dificultades importantes na conceptualización dos procesos de límite asociados ó concepto de integral.

Tamén Turégano (1997) conclúe que a excesiva algoritmización é unha das causas do gran fracaso dos estudiantes universitarios na materia de Cálculo Infinitesimal, tendo grandes dificultades para recoñecer nun problema, no cal non figure de forma explícita, unha integral, unha derivada ou unha ecuación diferencial.

Nesa mesma liña de reflexión, Azcárate (1996) atopa que, máis alá das áreas e quizais dos volumes, os estudiantes non aprenden a recoñecer cándo require unha integración o cálculo dunha magnitude, a pesar da extensión do tratamento do cálculo de primitivas e do rigor deductivo ó que son sometidos no tratamento teórico.

- En problemas de áreas que presentan algunha dificultade estándar (valores negativos, intersecións ou descontinuidades) moitos estudiantes saben o que teñen que facer, pero non son capaces de xustificar por qué o fan así.
- Outras dificultades atópanse no concepto de diferencial e no uso da notación.

- Destácase tamén a fraxilidade das formas xeométricas e gráficas e a ausencia de significados dos conceptos de límite e de aproximación.

O propio Orton (1983a) leva a cabo unha investigación experimental comparativa a través dun cuestionario individual con 110 estudiantes entre 16 e 22 anos: 60 estudiantes de secundaria que recibiron instrucción en cálculo elemental e 50 estudiantes que cursan estudios universitarios para futuros profesores de matemáticas, nos que o cálculo ocupa un lugar destacado.

- No que concirne á integración, Orton conclúe que os estudiantes de ámbolos dous grupos mostrais teñen serias dificultades. Aínda que estas dificultades aparecen con carácter bastante xeneralizado en tódolos ítems do cuestionario empregado, hai 4 ítems onde o fracaso é maior. Estes ítems requiren un coñecemento explícito da integración como límite dunha suma, coñecemento que constitúe o primeiro obstáculo epistemolóxico real que se detecta nesta investigación. Parece que a maioría dos estudiantes mostrais non son capaces de comprender este importante paso. Resulta así moi improbable que a introducción da integración poida resultarlles fácil ós estudiantes, partindo da ilusión de que os estudiantes alcanzarán a comprensión da integración, a través do desenvolvemento de habilidades de cálculo de primitivas e a obtención de respostas para sinxelos exercicios de aplicación.

Segundo Orton, diante destas dificultades algúns profesores reaccionan cunha introducción ó tema meramente testemuñal, e outros introducen a integración como simple rega de antiderivación. Sen embargo, outros intentan afianzar antes o concepto de límite e o manexo da álxebra co obxectivo de que os estudiantes poidan alcanza-la comprensión axeitada dos procesos de integración, que se introducirán máis tarde.

Orton opina que as regras sen argumentación non se xustifican en educación matemática, incluso para os non especialistas: o estudio do concepto de integral, polo menos nun primeiro nivel, non debe apoiarse no estudio formal do concepto de límite. En todo caso, podemos utilizar ideas intuitivas sobre límites usando situacións apropiadas de "aproximación". A comprensión do concepto de límite presenta moitas

dificultades, ben investigadas por Cornu (1982, 1983, 1991) e Sierpinska (1985a), entre outros.

> *"O concepto matemático de límite constitúe unha noción de especial dificultade, típica do pensamento requirido para traballar en matemática avanzada. Ocupa unha posición central dentro da Análise Matemática e sobre el aséntanse os fundamentos da teoría da aproximación, da continuidade, e do cálculo diferencial e integral ... unha das grandes dificultades da ensinanza e aprendizaxe do concepto de límite débese non soamente á riqueza e complexidade do concepto, senón ó feito de que os seus aspectos cognitivos non poden ser abordados dende o único punto de vista da definición matemática"* (Cornu, 1991, p. 153).

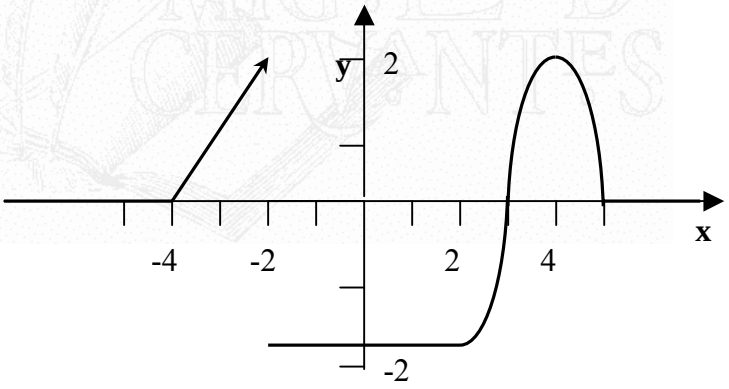
Cornu (1982, 1983) formula unha serie de obstáculos epistemolóxicos ligados ó concepto de límite: a falta de enlace entre números e xeometría; as nocións de "infinitamente grande" e "infinitamente pequeno", e o aspecto metafísico da noción de límite. Sierpinska (1985) establece tres categorías de obstáculos en relación con este concepto: *o "horror" ó infinito*, de raíz metafísica: "algo ó cal soamente podemos aproximarnos"; *continuidade:* as dificultades céntranse no significado de "puntos próximos", primando o aspecto de relación funcional sobre o concepto de distancia; e *obstáculos lóxicos e simbólicos,* ligados á definición formal do concepto de límite.

Orton (1983b) considera relevantes algunhas experiencias na aproximación ó concepto de límite optimizando a área manexando conxuntos de polígonos, aumentando o número lados dentro dun recinto fixo, ou optimizando o volume de sólidos por medio de poliedros, aumentando o número de caras. Fai referencia á proposta de Tall relativa ó uso de programas gráficos mediante os que aborda o estudio da superficie de formas irregulares contando cadrados e discutindo cómo se aproxima a superficie real cando o tamaño dos cadrados se fai máis pequeno ata aproximarnos a un "límite", en lugar de dar directamente unha regra para o cálculo da área como fan moitos profesores. A dispoñibilidade de calculadoras que permitan a integración numérica é moi eficiente para analizar estas situacións. Estas vantaxes fanse mais evidentes para aqueles estudiantes que teñen dificultades coa álxebra. Estas dificultades adoitan afondar nos

problemas de comprensión das ideas centrais do cálculo: preocupados por manexar variables e procesar datos esquecen o sentido dos conceptos de derivación e integración.

As implicacións que se derivan dos estudios de Orton de cara á introducción da integración fan referencia á necesidade de fomenta-lo seu estudio durante varios cursos académicos, empezando por unha aproximación informal á integración usando a calculadora ou o ordenador para obter aproximacións de áreas de recintos polo proceso suxerido anteriormente; logo deberanse relacionar os conceptos de derivada e integral, partindo sempre de situacións experimentais e tendo en conta que o teorema central do cálculo presenta obstáculos relevantes nos primeiros niveis de secundaria.

A disparidade entre destreza algorítmica e carencia de recursos no tratamento gráfico-xeométrico, sinalada por Orton, tamén é posta de manifesto por outros autores. Artigue e Szwed (1983), analizan os resultados das respostas de 89 estudiantes universitarios que cursan primeiro de matemáticas á cuestión:



Sexa *f* a función da gráfica de arriba. Describe intuitivamente o gráfico da función *g*, definida por: $\int_x^4 f(t)dt$.

- Soamente 35 estudiantes intentan construí-lo gráfico, aportando solucións extremadamente diversas que soamente teñen en común un segmento de recta en [–2,2].
- Só 14 lle dan a pendente correcta e outros 14 gráficos presentan descontinuidades. Dos 35 gráficos producidos soamente 13 consideran a dirección da variación de *g*. Finalmente soamente 3 poden considerarse solución aceptables.

> *"A análise da transcrición dos erros cometidos mostra que moitos estudiantes que non son capaces de traballar directamente cos gráficos intentan obter expresións alxébricas para f en cada intervalo, co fin de poder derivala e integrala posteriormente. Nestes casos maniféstanse numerosos erros. Noutros casos realizan ámbalas dúas tarefas e, cando os resultados analíticos obtidos son inconsistentes co gráfico, intentan dar explicacións pouco razoables que mostran máis confianza nos cálculos que no debuxo"* (Artigue, 1989, p. 179).

As investigacións sobre as concepcións dos estudiantes acerca da derivada danse en tres eixos principais:

i) Análise da evolución histórica dos conceptos.

ii) Análise das concepcións dos estudiantes dende os puntos de vista matemático e físico, a través de cuestionarios e entrevistas.

iii) Experimentación e avaliación de secuencias de instrucción.

- A análise da evolución histórica, á súa vez, suxire tres direccións:
  - Conceptos e procedementos usados frecuentemente en diferenciación.
  - Aproximación ó rigor no razoamento.
  - O papel dos "elementos diferenciais".

- Respecto ó papel dos "elementos diferenciais", as respostas mostran as dificultades que presenta o aspecto funcional da diferencial no nivel declarativo: menos dun tercio das respostas escriben a diferencial en forma dunha función. Ademais, as imaxes xeométricas asociadas con este concepto son débiles e restrínxense ó caso dunha dimensión. En física, os resultados obtidos mostran que o papel dos elementos diferenciais oscila entre dous polos:

  - Nun extremo, estes elementos teñen un papel puramente formal: "Para integrar non é necesario pensar no que representa *dx*, senón proceder mecanicamente", "*dx* non é real", "a súa lonxitude é ficticia", etc.

- No outro extremo, os elementos diferenciais teñen un arraigado "significado material", que exclúe calquera outro significado: "*dl* é un pequeno anaco de aramio".
- Entre estes dous polos hai un extenso rango de puntos de vista, tales como: "*dx* é o límite de Δx cando $\Delta x \to 0$", "*dl* é un elemento infinitesimal, que non se pode atopar nada máis pequeno", etc.

Artigue conclúe que, á vista dos resultados obtidos, parece que existen simultaneamente "dous diferenciais" para os estudiantes, potencialmente en conflicto coas definicións, influenciados por certas tendencias:

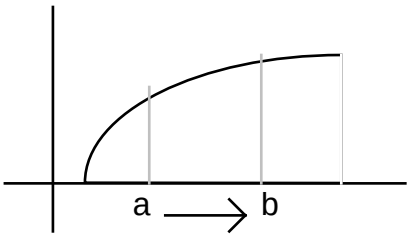
- Os algoritmos alxébricos esconden o significado e os procesos de aproximación linear.
- As cuestións de rigor son reducidas ó formalismo.
- O pensamento funcional móstrase débil.

> *"En todo caso, constátase unha dominancia do proceso alxébrico en contraste cunha fráxil visión xeométrica e gráfica, e evidénciase unha carencia de significados para os conceptos límite e aproximación"* (Artigue,1991, p. 186).

Por outra parte, nas súas investigacións, Tall (1991b) atópase con que moitos estudiantes e non poucos profesores cren que a área é positiva se a rexión plana está por derriba do eixo horizontal, e que é "negativa" se está por debaixo. Pero, se ademais se lle dá unha orientación móbil, percorrendo o eixo de abscisas, os signos anteriores invértense cando se formula o problema de acha-la área entre dous puntos dende un situado máis á dereita cara a outro máis á esquerda.

Turégano (1977) detecta incluso dificultades para identifica-la área visualmente. Tamén observa que moitos alumnos, á hora de asignarlle valores á área, non reparan na cuestión do signo da integral mentres non os enfronten a unha situación claramente contradictoria.

Tall relaciona estas observacións co feito constatado de que nas prácticas académicas non hai un xogo flexible entre as catro situacións posibles, senón que hai unha dominante:



e as outras, menos frecuentes, aparecen subordinadas a esta.

Schneider (1988) pon de manifesto, a través de máis de 15 anos de experiencia docente, que non se acada unha comprensión relevante do significado do teorema fundamental de cálculo integral por parte dos alumnos de humanidades. E nunha investigación con estudiantes de primeiro curso universitario de matemáticas, chega a conclusión de que, a penas transcorridos uns meses dende a instrucción:

> "*Os recordos destes estudiantes sobre o tema teñen que ver con técnicas de integración e outros aspectos do cálculo integral (encadramentos por medio de rectángulos de superficies limitadas por curvas), pero a meirande parte deles non saben por qué o cálculo de áreas e de volumes trae consigo, en certos casos, a necesidade de calcular primitivas*".

Noutras observacións, esta investigadora conclúe que:

- Os estudiantes consideran que unha superficie limitada por curvas pode ser cuantificada exactamente por medio dun número real, igual que unha superficie delimitada por segmentos rectilíneos. Sen embargo resúltalles chocante que unha área calculada por medio dun proceso infinito (percibido como suma indefinidamente prolongable) teña como resultado un número decimal finito.
- Os estudiantes teñen dificultades coas descomposicións laminares das superficies dos sólidos, aplicando intuicións erróneas como o uso incorrecto da proporcionalidade, ou a idea de que a reunión de indivisibles disxuntos corresponde sempre a unha suma de medidas.

- A noción de infinitésimo presenta un obstáculo epistemolóxico: os alumnos non perciben o límite dunha sucesión de sumas de áreas de rectángulos, senón que perciben unha unión de moitos rectángulos "finos", que a súa imaxinación transformará progresivamente nunha unión cada vez máis prolongada de rectángulos máis e máis finos, pasando a continuación a ve-los rectángulos como segmentos, co que chegan ó dilema de que unha área curvilínea non pode ser cuberta mediante rectángulos, xa que o dito proceso non ten final. Esta dificultade deriva das concepcións de infinitésimo e da interpretación que os estudiantes fan da razón *dy/dx*, o mesmo que se produce coa idea de velocidade instantánea.
- Existen importantes dificultades nos estudiantes para entender a idea de variación dunha función, cando non depende da variable tempo: non teñen unha percepción dinámica do problema, no senso de que intentamos coñecer certa magnitude (área) por medio da súa variación; e consideran antinatural expresar un proceso de variación respecto dunha variable que non sexa o tempo e, quizais xa non o tempo físico, senón o tempo sicolóxico no sentido en que Newton o facía, como sucede con total naturalidade no emprego actual de frases como "límite cando *x* tende a ...".
- Importantes conflictos cognitivos relaciónanse coa natureza dos "indivisibles": a elección de elementos diferenciais de orde inferior ó da magnitude inicial (áreas para volumes, ou liñas para superficies); conflicto cognitivo ó que denomina como *heteroxeneidade das magnitudes*.

Schneider pon de manifesto, a partir da análise de libros de texto e de manuais dos profesores, o descoido da instrucción tradicional respecto á modelización mediante conceptos da análise das nocións de área, volume e velocidade: os textos consideran como verdade implícita que o cálculo dunha área baixo unha curva representativa dunha función ten interese por si mesmo. Os alumnos descobren, a través de exercicios, que se trata dun cálculo estándar, sen necesidade doutra xustificación.

- Por exemplo, cando se lles propón ós estudiantes obteren exactamente a área baixo a curva $y = x^3$ entre 0 e 1, como límite dunha suma de rectángulos,

mediante un proceso infinito de "adelgazamento" destes, os estudiantes mostran perplexidade diante desta alternativa: a unión de rectángulos non pode formar unha superficie curvilínea, os segmentos non poden sumarse.

Pero os manuais non se paran a analizar estas dúbidas; de maneira xeral as nocións intuitivas de área e a definición de integral cohabitan, pero sen que pareza paga-la pena xustifica-la fusión entre as dúas.

Esta investigadora propón algunhas recomendacións didácticas para intentar salvar estas dificultades:

- Dotar de sentido as técnicas formais do cálculo por medio de intuicións perceptivas.
- Ter en conta a variedade epistemolóxica dos conceptos e teoremas, diversificando os contextos problemáticos. En definitiva, contemplar unha fenomenoloxía máis ampla.
- Rescata-lo papel de instrumentos para resolver problemas dos conceptos e resultados do cálculo.
- Contentarse nunha primeira fase introductoria co tratamento das evidencias empíricas para máis tarde explora-los límites da validez operativa das primeiras evidencias que poñan de manifesto a necesidade de evolución das intuicións cara á formación dos conceptos.
- Darlles ós estudiantes oportunidades para a reflexión epistemolóxica a propósito dos seus propios erros.

O teorema fundamental preséntase no COU como un resultado importante do cal o alumno debe, inexcusablemente, saber reproduci-la demostración. Na práctica, na súas representacións mentais, poden estar actuando como un apéndice ó tema de integración, e non como un fundamento del, pois nesas representacións a integración puido moi ben perde-la súa propia entidade, quedando diluída no cálculo de primitivas.

Tall propón realizar exercicios de antidiferenciación, como resolver algunhas ecuacións diferenciais sinxelas, de xeito que esta actividade mostre a súa independencia epistemolóxica da integración, e viceversa.

Os resultados dunha pequena experiencia realizada por nós mesmos no ano 86, nun grupo de 39 alumnos de 2º de BUP, son alentadores nese sentido. Sen ter feito nin un só exercicio de antiderivación, nin ningunha referencia a ela, nin a primitivas nin a integrais, no exame de avaliación que se correspondía ós temas de derivadas, incluíuse un último exercicio:

Despois de derivar unhas funcións obtivemos, respectivamente:

$$a)\quad 3x^2 - 4x \qquad b)\quad \operatorname{sen} x \qquad c)\quad 2x(x^2+1)$$

¿De que función se trataba en cada caso?

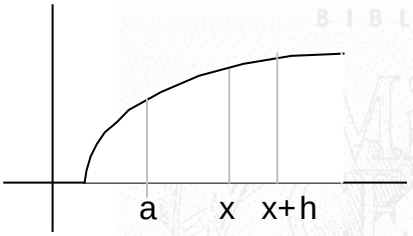
- Se obviámo-lo asunto relativo á constante de integración (que habitualmente se engade rutineiramente), podemos afirmar que un 75% dos alumnos responderon ben as dúas primeiras cuestións (de feito foi así con tódolos alumnos que aprobaron o exame), e un 40% tamén á terceira.
- Nótese que en a) o segundo coeficiente non é directo, e en b) hai que corrixi-lo signo. En c) tratábase xa dunha función composta.

Sobre a aproximación didáctica ó teorema fundamental, Tall suxire realizar exercicios de comparación gráfica dunha función e da función área, tentando de ver cómo aquela expresa precisamente a variación desta. Isto é factible se contamos con sofware apropiado (hoxe en día case ordinario) que nos permita representa-las funcións con eficacia e rapidez, e facer zoom en torno a aqueles puntos que susciten discusións.

Dentro desta mesma formulación suxire unha aproximación á demostración do dito teorema. Isto permitiríanos supera-la idea de "evanescencia" e de "suma de liñas" que actuaron de soporte intuitivo no S XVII, nos nacementos da integración, como se sinalou antes, e que reflicten a existencia de importantes obstáculos cognitivos que seguen a reaparecer xeración tras xeración, como revelan a investigacións de:

- Sierpinska (1985a), quen sinala que para moitos alumnos o proceso de adelgazamento dos rectángulos que constitúen as sumas superiores e inferiores de Riemann, é potencialmente infinito e din que nunca se chegaría ó final.
- Schneider (1988): moitos estudiantes "ven" que se continuamos adelgazando os rectángulos, estes acabarían sendo simples liñas e polo tanto terían área 0, e a suma de ceros é 0. E aínda sen que lle asignen o valor 0, algúns néganse a aceptar que os rectángulos puidesen chegar a cubrir con exactitude unha superficie de contorno curvo, xa que sempre habería algunha diferencia entre a "tapa" recta do rectángulo e a curva, cuestión esta que está intimamente relacionada coa referencia a Sierpinska.

A suxestión de Tall responde á seguinte idea:

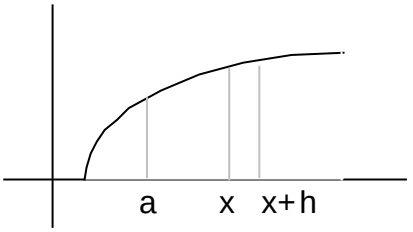


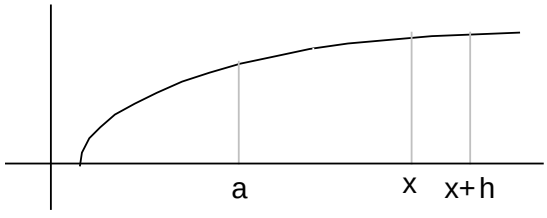
Cando $h \to 0$

$$A(x+h) - A(x) \approx h \cdot f(x)$$

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(x)$$

- Se facemos un zoom parcial en torno a *x*, estirando a figura na dirección do eixo de abscisas, podemos darlle máis significatividade ó feito de que $h \to 0$:





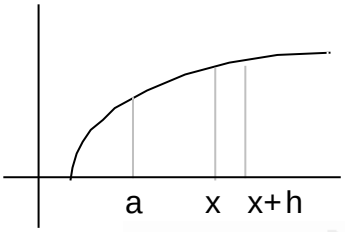
- Continuando as ampliacións iriamos "vendo" un rectángulo, o que fai verosímiles as igualdades:

$$A(x+h) - A(x) = h \cdot f(x) \to \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

Pola súa parte, Thompson (1994) detecta que os esquemas mentais relativos ás funcións, frecuentemente nos estudiantes deste nivel responden ás representacións

gráficas (debuxos), e non a unha relación de co-varianza entre dúas variables. Na súa opinión isto vai ser unha seria deficiencia para comprende-lo Cálculo.

- Destaca entre os seus resultados que moitas veces nas concepcións dos alumnos non está dabondo explícito que as sumas de Riemann se constrúen multiplicativamente e, polo tanto, cando falamos de variación dunha área, falamos de incrementos dun producto. A explicitación desta circunstancia permitiría recrea-lo teorema fundamental en termos de velocidade media e velocidade instantánea. (En xeral variación media e variación instantánea).



Variación: $A(x+h)-A(x) \approx h \cdot f(x)$

Variación media: $\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx f(x)$

A igualdade cumpriríase na variación instantánea.

- Atopa que os estudiantes máis novos tenden a pensar a velocidade como unha medida estática, que se usa para saber distancias. Isto suxire que os esquemas conceptuais que operan en torno á idea de velocidade non responden a algún tipo de variación en relación á duración dun cambio (dun desprazamento, no caso máis simple). Poden estar pensando nos incrementos como obxectos en si mesmos, e non como relacións. Neste sentido observa tamén unha anomalía importante na actuación dos profesores cando explican a proba do teorema fundamental, xa que se apoia no teorema do valor medio do cálculo diferencial, o que lle dá un carácter estático cando o que aparece como problema é o cálculo dunha derivada, dunha variación.
- A súa proposta reside nunha visión dinámica baseada na coordinación de tres fenómenos de variación:
    - Acumulación (función área).
    - Razón de cambio (derivada).
    - Razón de acumulación (derivada da función área).

Hegedus (1998) considera necesario a introducción da análise metacognitiva como unha compoñente esencial para a análise dos problemas de aprendizaxe do

cálculo. Na súa tese, relacionada coa aprendizaxe do cálculo integral en alumnos universitarios de primeiro ciclo, ensaia unha metodoloxía de análise metacognitiva que define como ROME (reflexión, organización, instrucción e avaliación) co obxectivo de obter información relevante para comprende-los procesos de conceptualización e visualización que demandan os problemas de cálculo:

- Obtén que as conductas metacognitivas eficientes móstranse eficaces na resolución de problemas.

- O desenvolvemento destas conductas metacognitivas pasa por comprender primeiro cómo se comportan os matemáticos expertos na resolución de problemas.

Incide Hegedus na necesidade de contempla-la epistemoloxía do desenvolvemento dos conceptos do cálculo como unha fonte de información providencial para identificar e tratar de comprende-los obstáculos na aprendizaxe do cálculo, así como a necesidade de seguir investigando cáles son as maneiras de mellora-las concepcións e os procesos de visualización dos estudiantes, a partir da observación das súas conductas metacognitivas.

Outra das nocións chave para a análise das dificultades relacionadas coa aprendizaxe do cálculo integral é a de función. Ruíz (1993), en relación coa investigación que leva a cabo sobre a noción de función, dende un punto de vista epistemolóxico-didáctico, conclúe que:

> *"As situacións problemáticas ás que está ligado o obxecto función, en distintos períodos históricos, os invariantes que o determinan e as distintas representacións simbólicas usadas, permítennos describir diferentes tipos de concepcións epistemolóxicas. Do estudio desta evolución puidemos determinar diferentes obstáculos epistemolóxicos:*
>
> *- Obstáculos a nivel de crenzas e convicción: unha concepción estática e de disociación entre magnitudes e números obstaculiza o*

desenvolvemento do concepto de función e bloquea a observación das leis físicas como funcións matemáticas.

- Obstáculos a nivel de esquemas de pensamento: entre os que cabe cita-lo aspecto discursivo da noción de proporción, que evita a súa presentación escrita en forma de igualdade de fraccións, ocultando o carácter funcional da proporción.

- Obstáculos a nivel de coñecemento técnico, derivados das restriccións impostas ó campo de aplicación da noción de función: no XVIII, limitado á descrición alxébrica e ás ecuacións; ademais, nun principio, as curvas non foron consideradas como gráficos funcionais, conxuntos de puntos que satisfán condicións específicas dadas pola relación funcional, senón como traxectorias de puntos en movementos ("curvas mecánicas").”

Esta investigadora, en relación coas concepcións manifestadas polos alumnos categoriza varios cadros:

- Algoritmo de cálculo.
- Expresión alxébrica.
- Gráfica (construída a partir dunha fórmula).
- Ideograma (alxébrico e gráfico).
- Correspondencia entre conxuntos numéricos.
- Transformación.

Segundo Ruíz, os alumnos, nunha porcentaxe bastante alta non teñen conseguido chegar á modelización alxébrica nin á gráfica: resúltalles inaccesible o paso da "fórmula" ou da "ecuación" á función. Tódalas situacións asociadas ás diferentes concepcións dos alumnos refírense á exercitación de rutinas e procedementos case algorítmicos: construír táboas, calcular dominios, representar funcións, etc., e serían consecuencia do funcionamento do sistema de ensinanza actual, centrado en gran medida no cadro alxébrico.

Azcárate (1990) sinala que hai situacións nas que os esquemas conceptuais de velocidade instantánea dalgúns dos alumnos non se revelan coherentes fronte ó esquema "velocidade igual a espacio partido por tempo", esquema este que constitúe, na súa opinión, un obstáculo epistemolóxico xa que se usa indiscriminadamente para resolver tódalas situacións que teñen que ver co concepto de velocidade. E maniféstase tamén nesas situacións a tendencia a utilizar unha única linguaxe, sexa verbal, gráfica ou simbólica, resistíndose a facer transferencias dunha a outra, o que indica unha fráxil conexión dos seus esquemas conceptuais, que Azcárate interpreta como falta de madurez na asimilación de tódolos aspectos do concepto ó cal se aplica.

White e Mitchelmore (1996) atribúen unha grande importancia ó significado persoal do concepto de variable que teñen os estudiantes, como prerrequisito para ter éxito no estudio do cálculo diferencial e integral. Nas súas investigacións analizan a confusión que se orixina nos alumnos de primeiro curso de matemáticas de universidade, cando se utiliza unha simboloxía non habitual —distinta de *dx*, *dy*— para as variables que interveñen en modelos matemáticos de problemas relacionados co cálculo diferencial:

> *"... o aspecto manipulativo que os estudiantes atribúen ó simbolismo alxébrico do concepto de variable limita a súa conceptualización: aprenderon a operar con símbolos sen considera-lo seu posible significado contextual. Producese unha acumulación de novas regras, aprendidas de memoria, sobre os seus coñecementos previos, sen intentar integralas coas ideas anteriores ... "*

3.1.2. Revisión de libros de texto

Comentamos a continuación, a partir da revisión dunha mostra, cómo se aborda o tema da integración en textos de ensinanza de nivel secundario. En primeiro lugar referímonos a libros de texto de matemáticas usuais en España, complementando a mostra con outros materiais escritos dirixidos ó alumnado dese mesmo nivel de Galicia, Valencia, Francia, URSS e USA. Despois, a menor escala, farémo-lo propio respecto

dos libros da disciplina de Física, polo seu emparellamento coa de Matemáticas nas opcións de Ciencias, á que lle ofrece un denso campo de aplicacións.

3.1.2.1 Textos de matemáticas

LIBROS DE TEXTO REVISADOS:

Editorial	Ano	Curso e materia
Alambra	1987	C.O.U. Matemáticas I
Anaya	1980	C.O.U. Matemáticas I
SM	1996	C.O.U. Matemáticas I
Santillana	1981	C.O.U. Matemáticas I
McGaw-Hill	1994	C.O.U. Matemáticas II
McGaw-Hill	1996	2º Bacharelato Matemáticas II
Bruño	1989	2º Bacharelato Matemáticas II
SM	1997	2º Bacharelato Matemáticas aplicadas ás Ciencias Sociais
Everest	1999	1º Bacharelato Matemáticas I
Alambra	1995	3º de B.U.P. Matemáticas
Bruño	1991	3º de B.U.P. Matemáticas
Santillana	1995	3º de B.U.P. Matemáticas
Anaya	1988	3º de B.U.P. Matemáticas

OUTROS TEXTOS PARA O ALUMNO:

Editorial	Ano	Nivel académico
Reverté	1972	Curso programado de Cálculo para Ensinanza Media (The Mathematical Association of America).
ICE - Univ. de Valencia	1979	Matemáticas para 3º de B.U.P. e C.O.U.
Mir	1985	Manual de matemáticas para Ensinanza Media (URSS).
Toxosoutos	1994	"Sobre integrais", para 3º BUP-C.O.U./1º-2º Bacharelato (LOXSE).
Nattenn	1994	Matemáticas para Terminal de Secundaria (Francia).

1.- Quizais o comentario inicial sobre dos textos deba poñer de manifesto as grandes diferencias existentes no tratamento do tema da integración, o que dificulta poder dar unha visión de conxunto susceptible dunha análise sintética, como sería desexable.

Estas diferencias non parecen estar soamente motivadas por dirixírense os textos a dous niveis educativos nos que á súa vez atopamos materias distintas (o que xustificaría, ó noso entender, diferentes niveis de formalización e de extensión do tema), senón tamén polas propias concepcións dos respectivos autores acerca do cálculo integral e do rol que desempeña nos currícula académicos, así como da metodoloxía didáctica máis apropiada para o seu estudio (o que xustificaría as diferencias de enfoque).

- Así, mentres que un texto de 3º de B.U.P. introduce a integral definida para funcións en esqueira e esténdea a funcións que son límite dunha serie de funcións en esqueira, outro de C.O.U. (opción de *ciencias*) aborda directamente as funcións continuas mediante límites de sumas superiores e inferiores, e outro de 2º de bacharelato (opción de *ciencias*) establece a regra de Barrow empiricamente, relacionando as áreas de varios recintos con primitivas das funcións que interveñen nos seus respectivos contornos, ou outro de 2º de bacharelato (opción de *sociais*) define a área para continuas como límite de sumas de trapecios, que logo fai coincidir cos límites de sumas superiores e inferiores.

2.- Case sempre se comeza polo cálculo de primitivas, establecendo a integral indefinida, introducindo a terminoloxía e o simbolismo característicos.

Soamente atopamos unha mención a que hai funcións que teñen primitivas que non se poden expresar como funcións elementais, para a continuación caer na contradicción de afirmar que "nese caso dise que non son integrables", co que as descarta. Por outra parte, antes do teorema fundamental tampouco hai nada con que avalar tal afirmación.

Continúase coa demostración das propiedades de linearidade, a partir das correspondentes propiedades das derivadas, e logo dáse unha táboa de integrais elementais. Neste punto non hai unicidade: uns textos presentan a táboa para funcións simples e compostas, mentres que outros reservan as compostas para o "método" de substitución.

É curioso que se adoita toma-lo logaritmo dos valores absolutos, pero non se fan advertencias a outros problemas dos dominios (raíces e cocientes) doutras funcións que se utilizan.

Tampouco hai unicidade na extensión da táboa, xa que algúns textos inclúen as hiperbólicas, e outros inclúen casos especiais de elementais, o que resulta sorprendente, xa que presentalos na táboa implica unha invitación á memorización en contra da deducción ($\frac{1}{\sqrt{1-ax^2}}$; $\frac{1}{a+bx^2}$; e^{ax}; $\sin ax$; ...).

3.- En canto ós "métodos" de integración, hai un descoido xeneralizado dos aspectos metacognitivos: a penas hai alusións a que o que se pretende é expresar funcións de maior complexidade como combinación doutras máis simples; e as escasas veces que se alude a isto é de pasada.

Particularmente sorprendente é o caso de presenta-la integración de funcións compostas como un *método (que vai ser aprendido)*, pois os alumnos prodigáronse anteriormente na derivación de funcións deste tipo. O procedente sería que, despois de realizados algúns exercicios, se valorase a posibilidade de automatizalos mediante un xogo simbólico determinado, se é que realmente se desexa potenciar que iso se faga, cuestión por outra parte máis que discutible.

Máis en xeral, respecto daqueles trocos de variable que son oportunos para tipos específicos de funcións, non se declara a intención (que conviría xustificar) que conduce a elixir precisamente o que se elixe entre as múltiples eleccións posibles.

Na integración "por partes" non sempre se advirte sobre a necesidade de reflexionar sobre cómo elixi-las funcións que desempeñan cada un dos dous roles: a que vai ser derivada e a que vai ser integrada, de maneira que semella ser cuestión de sorte.

O traballo con funcións racionais adoita ser extenso e intenso nas opcións de ciencias, pero case sempre se presenta como un "método" de integración, o que lles priva da oportunidade de aplicar conscientemente a destreza adquirida no curso anterior no manexo e simplificación de fraccións alxébricas.

4.- A integral definida preséntase sempre a partir do problema da área; e ben se define a partir desta, ou se define a área como a integral.

a) No primeiro caso, ó defini-la integral como unha área xérase unha dificultade lóxica cando se intenta aplicar a outras magnitudes. Aínda non sendo moi prolixos nisto, na maioría dos textos hai algún problema de volume, velocidade, traballo físico, crecemento de poboacións, ou economía, se ben practicamente nunca chega sequera a haber un problema de cada tipo.

   Unicamente atopamos advertencias sobre a xeneralidade do concepto que se ía introducir nun dos "outros textos ", aínda que non o aplica fóra das áreas ata o final do tema; e atopamos aplicacións introductorias, dende unha perspectiva intuitiva, noutro deles.

b) No segundo caso, definindo finalmente a área dun recinto plano que ten un contorno dado por unha función nun intervalo, como a integral desa función no dito intervalo, a área non constitúe unha propiedade intrínseca do recinto, senón que está supeditada á existencia dunha función, á existencia da súa integral e, aínda finalmente, só sería un coñecemento productivo se soubesemos calcula-la dita integral.

   Poderiamos estende-la crítica á necesidade de probar que a área así definida sería independente do sistema de referencia elixido, tal como sinalou Puig Adam, que sitúa neste punto a decisión de Jordan de adoptar para as funcións a

teoría conxuntista de Cantor. En todo caso, compre facer notar que non atopamos ningunha alusión a esta casuística.

En calquera das dúas tendencias aludidas, resulta chamativo o esforzo por abordar con rigor o problema da área, que recorda (sen tanto detalle) á axiomatización que expoñemos no capítulo 2º, xa que nin os exemplos que se manexan, nin o coñecemento anterior dos estudiantes, suxiren a sutil problemática que trata de salvarse.

- Dada a complexidade da situación, por unha cuestión de coherencia didáctica, parecería suficiente con traballar sobre as idea intuitiva de área, no caso de desexar vincular a integración á mesma.
- Por exemplo, contrasta moitas veces o detemento en construír sumas inferiores e superiores, ou a propiedade de exhaución, ou incluso falar de diferentes teorías da medida, que rodea dunha aureola de rigor ó tema, coa lixeireza en utiliza-la integral definida para calcular outras magnitudes sen discusión ningunha da súa validez. E, aínda que a tendencia é facelo máis intuitivo en 3º de BUP e 1º de bacharelato, non sempre é así.

5.- Ás veces dáse unha definición previa para integrais de funcións en esqueira, e logo xeneralízase seguindo camiños diversos: defínese integral superior e inferior e postúlase a súa igualdade, ou tómase o límite das integrais de funcións en esqueira. Outras veces trabállase con sumas superiores e inferiores, presentando unha única integral, pero tamén aquí se toman opcións diferentes: igualando o ínfimo das primeiras ó supremo das segundas, ou igualando os seus límites.

6.- Acerca das condicións de existencia da integral definida, sempre se explicita para continuas, aínda que non se proba e incluso nin se cuestionan a necesidade de probalo. Nos textos de COU abórdanse casos con algunha descontinuidade, ou explicitamente continuas a anacos ou monótonas, pero tampouco aquí hai coincidencia; nin a hai en cómo trata-lo que se afirma: cun exemplo, cun debuxo ou cunha demostración bastante rigorosa.

7.- Do teorema fundamental atopamos os dous tipos de demostracións usuais que referiamos no anterior capítulo (apartado 26), e que se seguen con desigual rigor: dende as que aceptan resultados polo valor ilustrativo do debuxo, ata as que fan mencións expresas ós teoremas de Weierstrass (do máximo e mínimo) e Bolzano (dos valores intermedios).

8.- As aplicacións, en consecuencia coa decisión adoptada para introduci-lo tema, céntranse no cálculo de áreas sendo o verdadeiro problema o de determina-lo recinto e, dentro deste, as zonas *supra* e *infra* eixe de abscisas, pola repercusión que vai ter no signo.

A función a integrar non haberá que construíla; todo o máis restando dúas funcións se queremos abreviar e non restar as correspondentes integrais.

Por outra parte, esas mesmas funcións non responden case nunca a todos aqueles intrincados casos de cálculos de primitivas que se estiveron practicando os días anteriores, o que produce unha sensación de desconexión pouco desexable.

Noutra orde de cousas, atopamos con frecuencia, que non sempre, *algúns* problemas relativos a outras magnitudes: aceleración/velocidade/espacio, volumes, traballo físico, centros de gravidade, lonxitude dun arco, superficie de revolución, ou ingreso marxinal, pero sen unha discusión expresa que poña de manifesto a pertinencia da integración, senón máis ben admitíndoa a priori.

9.- En canto ás ecuacións diferenciais, poucas veces se mencionan expresamente nos libros de texto consultados, podendo tratarse nalgunha ocasión dentro das actividades de aplicación a outros contextos. Son máis frecuentes nos "outros textos", chegando incluso a tratarse nun deles as de 2ª orde.

10.- Respecto da integración aproximada tamén son escasas as mencións, tanto ó método dos trapecios como ó de Simpson, ou ó do punto medio. A pesar da súa enorme importancia, o problema da acotación do erro parece non existir, agás honrosas excepcións.

11.- As integrais impropias tampouco merecen moita atención, a pesar de que representan un contexto interesante para aplica-lo cálculo de límites que tanto se ten prodigado anteriormente. Aínda, algunhas desas poucas veces propóñense como meros exercicios sen maior significatividade.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

3.1.2.2 Textos de Física

A xeito de mostra, revisamos textos de C.O.U. e 2º de bacharelato das seguintes editoriais, de grande implantación no mercado:

Editorial	Ano	Curso
Everest	1996	C.O.U.
Bruño	1989	C.O.U.
McGaw-Hill	1991	C.O.U.
SM	1997	2º Bacharelato
Bruño	1989	2º Bacharelato

1.- Na física de COU/2º de bacharelato son moitos os conceptos, os principios e os problemas prácticos que se abordan con integrais tanto definidas como indefinidas, percorrendo un extenso abano de variables que son diferenciadas e de magnitudes que son determinadas: un panorama que non parece fácil abordar dende a perspectiva que se poida adquirir a partir dos libros de texto de matemáticas para o mesmo alumnado, xa que estes non se ocupan explicitamente de favorece-la transferencia da problemática do cálculo de áreas a outros contextos

FENOMENOLOXÍA	MAGNITUDE CALCULADA/VARIABLE
- Erros:	probabilidade/medición resultante
- Movemento uniforme:	
- rectilíneo:	espacio/tempo
- circular:	ángulo/tempo
- Movemento uniformemente acelerado:	
- rectilíneo:	espacio/tempo
	velocidade/tempo
- circular:	ángulo/tempo
	velocidade angular/tempo
- Centro de gravidade:	
- corpo:	posición/volume
- lámina:	posición/superficie (grosor constante)
- fío:	posición/lonxitude (sección constante)
- Impulso mecánico:	impulso/tempo
	impulso/velocidade
	impulso/cantidade de movemento
- Sistema continuo de partículas:	
- centro de masas:	
	posición/masa
	masa/volume
	cantidade de movemento/tempo
- linear:	momento linear/masa
	velocidade/masa
- angular:	momento angular/masa
- Traballo:	traballo/espacio
	traballo/velocidade
- traballo realizado polas forzas interiores nun sistema de dúas partículas:	
	traballo/distancia

- Enerxía:
  - cinética: enerxía cinética/velocidade
  - potencial: enerxía potencial/altura
- Rotación: momento de inercia/masa
  momento de inercia/volume
  traballo/ángulo
  enerxía cinética/velocidade angular
  enerxía cinética/masa
  - variña: momento de inercia/lonxitude (sección constante)
  - cilindro: momento de inercia/raio
- Campos escalares e vectoriais
  circulación/espacio
  fluxo/superficie
  incremento da enerxía potencial/espacio
  - gravitatorio terrestre:
    traballo/raio da órbita
  - eléctrico: intensidade/carga
    intensidade/distancia
    diferencia de potencial/espacio
    .. nun corpo cargado:
    forza/volume
    .. nun conductor:
    forza/superficie
    forza/lonxitude
  - potencial: potencial/espacio
    potencial/carga
    potencial/volume
  - desprazamento eléctrico:
    carga/superficie

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

- enerxía dun conductor cargado:
  traballo/carga
- corrente alterna:
  intensidade eficaz/tempo
  enerxía/intensidade

- Electromagnetismo:
  - linear: forza/lonxitude
    intensidade/lonxitude
  - circular: forza/ángulo
    intensidade/ángulo
    momento de xiro/ángulo:
  - tensión nun condensador (bobina xirando nun campo magnético):
    tensión/tempo
  - autoinducción:
    enerxía almacenada/intensidade da corrente
    potencia media/tempo
- Ondas: variación da intensidade/espacio percorrido
- Radioactividade: variación do número de átomos/ tempo
- Termodinámica: entropía/calor
  entropía/temperatura absoluta
  calor/volume
  calor/temperatura
  traballo dun gas/volume
- Mecánica cuántica:
  enerxía emitida por un corpo negro/lonxitude de onda

2.- Chamativo é tamén que tódalas funcións para integrar que localizamos, tanto nos problemas como na teoría, agás unha, son "de táboa", requirindo en todo caso axustes de coeficientes:

- constantes, afíns e cuadráticas
- outras polinómicas (grao >2)
- racionais simples
- trigonométricas elementais
- logarítmicas
- exponenciais

e incluso, a penas aparecen funcións compostas. Isto contrasta de novo cos textos de matemáticas correlativos, que se prodigan no cálculo de primitivas ata uns graos de complexidade dificilmente abordables por moitos dos estudiantes, tal e como confirman as avaliacións ordinarias deste tema.

- A única integral non directa que se postula, refírese ó momento de xiro dunha "espira" pola que circula unha corrente eléctrica baixo o influxo dun campo magnético: $M = I \cdot B \cdot r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \beta \cdot d\beta$.

  O problema, dentro do cálculo de primitivas é un clásico de integración por partes, aplicando o dito método dúas veces e reagrupando os termos, pero que se resolve trivialmente utilizando o ángulo dobre que a converte nunha integral "de táboa".

- En realidade localizamos outra integral non directa, pero sen intención de explica-lo seu cálculo, senón unicamente de indicala. A razón é bastante evidente: $E = \int_0^{\infty} M_\lambda \cdot d\lambda$, con $M_\lambda = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$, sendo M_λ a *exitancia* (enerxía emitida por unidade de tempo, por unidade de superficie dun corpo), λ a lonxitude de onda e E a enerxía emitida.

3.- O procedemento implícito que seguen é o da división do continuo en intervalos infinitesimais nos que se poidan aplicar fórmulas coñecidas (cando determinado parámetro permanece constante): é un proceso de análise, xeral, levado ás últimas consecuencias (parcelación en elementos diferenciais) e logo invertido mediante un proceso de síntese, globalizando os infinitos elementos nun único obxecto: a integral.

- Pensabamos, dende unha perspectiva matemática, que o dito proceso complexo de análise-síntese constituía o aspecto máis relevante da integración; e dende a perspectiva de educadores entendiamos que debería tratarse *explicitamente* e con dedicación, dado o seu alto valor formativo xa que instrúe ó alumno en procesos xerais de pensamento. Este "varrido" de textos de Física reafírmanos na nosa opinión.
- Polo xeral as dificultades atópanse na elección do elemento diferencial axeitado a cada caso e na determinación dos extremos de integración (así tamén na súa adecuación cando sexa pertinente un troco de variable), e raramente creará complicacións o cálculo de primitivas.

4.- En varias ocasións preséntanse cambios de variable significativos e non unicamente como recursos técnicos, no sentido de que a nova variable considerada como "independente" é outra magnitude diferente. Por exemplo:

- Impulso mecánico: $\int_{t_0}^{t_1} F \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} m \cdot a \cdot dt = \int_{v_0}^{v_1} m \cdot dv = \int_{P_0}^{P_1} dp$

- Principio de conservación da enerxía: $\int_{h_1}^{h_2} m \cdot g \cdot dh = \int_{v_1}^{v_2} m \cdot v \cdot dv$

- Variación do momento angular: $M_0 = \frac{d(I \cdot \omega)}{dt} \rightarrow \int_0^t M_0 \cdot dt = \int_0^{\omega} I \cdot d\omega$

(M-momento resultante forzas exteriores; I-momento de inercia; ω-frecuencia angular).

5.- Atopamos unha gran variedade de situacións, a comprensión das cales esixe unha base intuitiva moi ben establecida, o cal non parece que poida derivarse da formación proporcionada polos programas de matemáticas. Integrais "circulares", en

derivadas parciais, con magnitudes vectoriais, integrais impropias, integración "por capas", integración aditiva por sectores, integración implícita -ecuacións diferenciais, ...

- Traballo: derivadas parciais.

$$W = \int_{(0,0,0)}^{(2,-1,3)} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{(0,0,0)}^{(2,-1,3)} 2xdx - ydy + 3zdz$$

- Rotación dun cilindro: integración por capas.

- Circulación dun vector: integral "cíclica". $C = \circ \bar{a} \cdot \bar{dl}$

- Desprazamento eléctrico: integral "cíclica". $Q = \circ \bar{D} \cdot \bar{dS}$

- Fluxo nun campo vectorial: integración aditiva por sectores.

$$\Phi = \int_S E \cdot dS = \int_{\text{cara superior}} E \cdot dS + \int_{\text{cara inferior}} E \cdot dS + \int_{\text{contorno}} E \cdot dS = 2E$$

- Potencial: integral impropia. $V = \int_{P_0}^{\infty} \bar{E} \cdot \bar{dr}$

- Esfera de carga Q: integral impropia. $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \int_{\infty}^{R} \frac{1}{r^2} dr$

- Tensión nun condensador (bobina xirando con desfase φ nun campo magnético): función composta. $V = \frac{I}{C} \int \text{sen}(\omega t - \varphi) dt$

- Autoinducción (potencia media): aplicación do T. V. M.

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T P \cdot dt$$

- Ondas: ecuación diferencial de 1ª orde.

$$dI = -\beta I dr; \quad \frac{dI}{I} = -\beta dr; \quad \int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\beta \int_0^r dr$$

- Radioactividade: ecuación diferencial de 1ª orde.

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$$

- Entropía: aditividade por sectores (unión de sectores de intercambios de calor +, e de intercambios de calor -).

$$\circ\frac{dQ}{T} = \underset{+}{\frac{dQ}{T}} + \underset{-}{\frac{dQ}{T}}$$

3.1.3. Conclusións

Os resultados obtidos nos proxectos de investigación descritos con anterioridade presentan unha forte coherencia, non soamente entre si, senón con outros traballos relacionados con conceptos de cálculo máis básicos ou máis avanzados. Ó cotexalos coas prácticas educativas que particularmente os sustentan e coa revisión mostral de textos, que nos permiten establece-los trazos máis estendidos na ensinanza do cálculo, podemos concluír que a aprendizaxe dos primeiros conceptos da análise matemática presenta dificultades que parecen ser debidas a diferentes factores, en particular:

i) O *alto nivel de sofisticación dos obxectos que configuran esta materia.* Diante destas dificultades, a instrucción usual refúxiase nunha intensiva manipulación de fórmulas como expresións alxébricas e non como representación de funcións; resalta o cálculo de derivadas en lugar da teoría de aproximación linear, o cálculo de primitivas en lugar de afondar no significado dos procesos de integración; e, no seu caso, propugna a aprendizaxe de receitas para resolver ecuacións diferenciais sen desenvolver unha visión conceptual delas.

ii) *A existencia de varios obstáculos,* incluídos os de carácter histórico, debidos uns ó significado conflictivo dalgúns dos termos, outros ó sempre permanente problema do infinito, e outros á conceptualización dos números reais, máis consonante coa teoría non-estándar que coa formalización estándar que se presenta, algúns deles relacionados co uso implícito do axioma de continuidade (de completitude para a converxencia das sumas de Riemann, ou do extremo na existencia de ínfimos e supremos nas sumas superiores e inferiores, respectivamente).

iii) *Dificultades de argumentación,* debidas ó abusivo razoamento por condicións suficientes que oculta a discusión da casuística máis xeral e forzan a aceptación de información parcial como xeral.

iv) *Dificultades na aprendizaxe de técnicas específicas*, nas que se descoidan os aspectos metacognitivos que permitirían un control máis eficaz delas.

v) *Dificultades debidas ás propias estratexias de formalización dos conceptos*, en primeiro lugar pola introducción prematura e asignificativa de definicións que poden entrar en conflicto coas concepcións intuitivas que posúan os estudiantes; e en segundo lugar, polas habituais técnicas expositivas de demostración de proposicións complexas, que van nunha dirección que parece contraria ó fluxo dinámico do pensamento que permite concibilas e construílas.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

3.3.- Formulación do problema de investigación. Metodoloxía

3.2.1.- Formulación do problema

3.2.1.0. Introducción

A Integral definida (en sentido Riemann, que é o que se aborda no ensino secundario) preséntase e defínese nos libros de texto como unha área baixo unha curva, ou ben, como unha construcción teórica realizada para defini-la área. Isto condiciona totalmente o futuro desenvolvemento do tema, incorrendo os propios autores en incoherencias lóxicas cando tratan de resolver algún problema de aplicación a outras magnitudes, nas escasas veces en que isto se pretende.

Por outra parte, o proceso "constructivo" da integral recréase nas aulas tan fugazmente que o concepto queda xa non soamente limitado no seu dominio, senón tan etéreo que remata por perderse case por completo a pesar de que se recorden aspectos visuais da presentación e se sexa capaz de reproducir, rutineiramente, a definición.

Nese mesmo sentido sucede que o aspecto xeométrico do tema restrínxese a aqueles problemas de áreas baixo curvas directamente manexables, xeométricos *per se*, pero nos que non se produce xeometrización no senso de representación e discusión xeométrica dun problema non enunciado xeometricamente, trasladándoo a este plano como axuda á súa comprensión e resolución.

Envoltos nunha dinámica académica caracterizada pola impartición de disciplinas, se non totalmente estancas entre si, si presentadas con moi poucas conexións entre elas, os estudiantes ven dificultadas as posibilidades de exerce-lo control das súas propias aprendizaxes.

- A maioría dos estudiantes que cursan matemáticas en COU ou 2ª de bacharelato cursan tamén a disciplina de Física na que se emprega habitualmente a integración, chegando esta a servir de soporte conceptual ás novas magnitudes que se introducen e ás extensións das magnitudes físicas xa estudiadas nos cursos anteriores. Pero a pesar diso, teñen moitas dificultades á hora de interpretar un problema en termos do contexto físico no que se enuncia, o que constitúe un indicador da debilidade das aprendizaxes acerca da integración tanto dende a disciplina matemática como da física.

Por esta razón, ademais de pretender coñecer en qué medida os estudiantes desenvolveron as súas capacidades de interpretación xeométrica e física dos problemas, e cál é o carácter da súa comprensión sobre o concepto de integral, indagarase tamén sobre a percepción que eles teñen do seu propio coñecemento.

Unha parte importante do presente traballo consistirá nunha cuantificación detallada das respostas dos estudiantes a diferentes tipos de cuestións que se lles propoñen. Certamente non pretendemos poñe-lo acento nestes resultados en si mesmos, senón que nos interesan na medida en que nos informan *dun xeito cualitativo* do estado

da cuestión, ou sexa, se a problemática subxacente a cada tópico afecta a partes significativas do alumnado ou é unha cuestión marxinal.

3.2.1.1.- Obxectivos xerais

OG1: En primeiro lugar, fixamos como obxectivo xeral da investigación a *análise da comprensión do cálculo integral elemental para alumnos de nivel de COU, en función das dificultades para abordar situacións novidosas, e dos erros e obstáculos que se observan despois do proceso de instrucción estándar*.

OG2: Como obxectivo xeral paralelo, a investigación *propón liñas xerais para a elaboración de alternativas didácticas ó método deductivo tradicional de ensinanza.*

Perseguindo estes obxectivos, organizouse o proceso de investigación nas tres fases que se describen a continuación.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

3.2.1.2.- Fases da investigación

O primeiro obxectivo xeral descrito divídese, á súa vez, en diferentes obxectivos parciais.

Para poder analiza-lo significado deste obxecto matemático, que figura, con diferente nivel de afondamento, en 3º de BUP e COU, e nos correspondentes cursos de 1º e 2º dos novos bacharelatos, foi necesario elaborar un cuestionario que recollera as respostas dos alumnos da nosa mostra. En consecuencia, unha primeira fase corresponde ó seguinte obxectivo máis específico:

OE1: *Construír un cuestionario no que se reflicta o significado dos conceptos e resultados centrais do cálculo integral, que a comunidade de matemáticos considera curricularmente normativos para este nivel.*

A elaboración dun cuestionario que responda a estas expectativas necesita, a xuízo do investigador, de tres requisitos básicos:

i) Ser aceptado por unha mostra representativa de matemáticos profesionais e de profesores de matemáticas de secundaria, como elemento de indagación relevante para analiza-lo significado do cálculo integral no nivel de COU ou equivalente.

ii) Reflectir situacións-problema de conceptualización, contextualización de resultados teóricos e interpretación e transferencia de información relativa ó cálculo integral, procedente dos cadros alxébrico, algorítmico e xeométrico.

iii) Enmarcarse dentro dos aspectos curriculares normativamente establecidos para o correspondente nivel académico.

Posto que, a nivel curricular, estes contidos figuran legalmente establecidos polas administracións educativas, o obxectivo do cuestionario non é ampliar conceptos, teoremas ou campos de aplicación do cálculo integral, senón que persegue indagar, a través das respostas dos estudiantes, sobre a significación persoal da dita estructura conceptual, presentando, ó lado de exercicios e problemas estándar na ensinanza tradicional, situacións-problema que desenvolvan unha fenomenoloxía máis ampla e unha conceptualización máis profunda do cálculo integral elemental.

Para responder a este obxectivo parcial, considerouse relevante:

iv) O contraste, por medio das respostas e valoracións de licenciados en Matemáticas alumnos do CAP da Universidade de Santiago, do significado institucional do obxecto cálculo integral elemental, dende o punto de vista dos matemáticos profesionais e profesores de matemáticas, co significado persoal que o dito obxecto ten para a mostra escollida de estudiantes do CAP.

v) Realizar unha experiencia piloto cun grupo de estudiantes de 1º curso de universidade que puidesen representa-la heteroxeneidade de capacitación en matemáticas, para analizar a priori o nivel de dificultade dunha primeira versión do cuestionario: un colectivo que recibira instrucción en cálculo integral elemental durante o bacharelato e COU, para o que transcorrera, polo menos, un trimestre completo entre que lles dictasen instrucción e a realización da consulta.

Corresponden a esta fase:

- A revisión histórico-epistemolóxica que se describiu no capítulo 2º.
- As revisións das investigacións realizadas en torno á aprendizaxe do cálculo integral e dos libros de texto que se relatan no epígrafe "antecedentes" deste mesmo capítulo 3º.
- As consultas a unha mostra representativa de matemáticos profesionais e de profesores de matemáticas de secundaria.
- As respostas por un grupo do CAP ós problemas inicialmente seleccionados para configurar a partir deles o cuestionario final, e a análise científico-didáctica dos ditos problemas por outro dos grupos.
- A realización e corrección da experiencia piloto.

Como segundo obxectivo parcial, que determinaba unha segunda fase da investigación, fixámonos:

OE2: *Avalia-lo significado persoal do cálculo integral elemental no nivel de COU-2º de bacharelato, a través das respostas dadas ós ítems do cuestionario por unha mostra de estudiantes que acadasen o rendemento académico mínimo esixido neses cursos, como consecuencia dun proceso de instrucción baseado nun modelo de ensinanza expositivo-deductivo estándar.*

Para cumprilo levouse a cabo:

- Establecemento de categorías de resposta en cada item seleccionado, co obxecto de poder codifica-las respostas e facilita-lo seu tratamento informático.

- Elección da mostra de estudiantes.
- Traballo de campo consistente na realización das respostas ó cuestionario, complementado con entrevistas individuais e colectivas.
- Elaboración de pequenos cuestionarios complementarios tendentes a clarificar algunhas das cuestións, que foron respondidos por subcolectivos da mostra de estudiantes.
- Tratamento dos datos e obtención e análise de resultados.

A descrición e análise das sucesivas versións do cuestionario, así como a análise dos resultados da avaliación do significado do cálculo integral para a mostra elixida de alumnos abórdanse nos capítulos 4 e 5, respectivamente.

Na terceira fase abordaríase o segundo obxectivo xeral establecendo unhas liñas básicas que, en coherencia coas conclusións da investigación, deberán seguirse nas elaboracións de alternativas didácticas ó método deductivo tradicional de ensinanza. Expóñense no capítulo 7.

A continuación, baseándonos na Enxeñería Didáctica, a xeito de apéndice deste obxectivo, realizariamos unhas primeiras aproximacións a unha alternativa didáctica concreta: elabóranse fichas de traballo para determinados colectivos de alumnos e lévanse a cabo experiencias de aula, na medida en que sexa posible conxuga-la programación do seu centro coas novas propostas. Expóñense no apéndice 6.

3.2.2. Metodoloxía da investigación

Con carácter xeral, para o deseño, a preparación e a avaliación de cada unha das fases da investigación adoptámo-lo sentido que Shulman (1988) asigna ó concepto metodoloxía, como modo de enfoca-lo problema de investigación e buscar solucións,

tendo en conta o carácter de indagación sistemática e disciplinada que debe presidir todo proceso investigador.

En relación coa avaliación dos coñecementos matemáticos que explicitan as diferentes mostras de alumnos seleccionados para esta fase, entendemos (Romberg *et al.*, 1991) que máis importante que medi-lo nivel de datos -definicións, teoremas...- adquiridos polos alumnos dun determinado nivel, nalgunha parcela das matemáticas, é avalia-las súas capacidades para creación de coñecementos e os procesos que isto implica, necesitándose para iso tanto medidas cuantitativas como cualitativas.

Na nosa investigación combinamos ámbolos dous elementos de avaliación, polo que nos atopamos nun punto intermedio entre ámbolos dous paradigmas de investigación (Shulman, 1989).

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

3.2.2.1.- Poboacións e mostras

Nesta fase da investigación considerámo-las seguintes poboacións e mostras:

1.- Poboación de matemáticos profesionais, representados por unha mostra de 9 catedráticos e titulares de matemáticas de universidade: departamentos de Análise, Álxebra, Xeometría e Matemática Aplicada da Universidade de Santiago de Compostela.

2.- Poboación de profesores de matemáticas de secundaria, representados por unha mostra de 11 catedráticos e profesores de institutos de secundaria: departamentos didácticos de matemáticas do IES "Rosalía de Castro" e do IES das Fontiñas, de Santiago.

3.- Poboación de licenciados novos en matemáticas en período de preparación profesional para a docencia, representada por unha mostra de alumnos do CAP da Universidade de Santiago de Compostela:

- 58 licenciados resolven unha batería de problemas.
- 32 realizan a análise deles.

4.- Poboación de estudiantes de "ciencias" matriculados en 1º curso universitario da Universidade de Santiago antes de recibiren máis instrucción en cálculo integral que a correspondente ó nivel preuniversitario, que ía constituír, para os efectos de análise de datos, o grupo de referencia, representados por unha mostra de:

- 55 estudiantes de Físicas.
- 72 estudiantes de Farmacia.
- 19 estudiantes de Maxisterio (especialidade en Educación Musical).

que configuran o colectivo de referencia na investigación, máis:

- 43 alumnos de 1º curso da Facultade de Farmacia

para a realización dunha proba piloto e o establecemento de categorías de resposta.

5.- Poboación de estudiantes de COU e 2º de bacharelato, opción de "ciencias", que ía constituí-lo primeiro grupo de contraste, sobre concepcións inmediatamente posteriores ó período de instrucción, representados por unha mostra de:

- 33 alumnos do IES Xelmírez I (COU).
- 21 alumnos do IES Xelmírez II (COU).
- 25 alumnos do IES da Pontepedriña (2º bacharelato).

6.- Poboación de estudiantes da licenciatura de Matemáticas, que ía constituí-lo segundo grupo de contraste, sobre a permanencia das concepcións primeiras en "cohabitación" coas producidas por novas aprendizaxes, representados por unha mostra de 41 alumnos da universidade compostelá:

- 1 estudiante de 2º curso de licenciatura.
- 9 estudiantes de 3º curso de licenciatura.
- 19 estudiantes de 4º curso de licenciatura.
- 12 estudiantes de 5º curso de licenciatura.

8.- Poboación de estudiantes de COU e 2º de bacharelato, opción de "sociais", que ía constituí-lo terceiro grupo de contraste, sobre concepcións inmediatamente posteriores ó período de instrucción dende unha óptica menos tecnificada e máis contextualizada, representados por unha mostra de:

- 24 alumnos do IES Xelmírez I (COU).

- 17 alumnos do IES Eduardo Pondal (COU).
- 27 alumnos do IES da Pontepedriña (2º bacharelato).

As mostras foron obtidas de forma intencionada, aínda que representativa, dadas as dificultades que presentaba unha mostraxe probabilística coas suficientes garantías. Os colectivos seleccionados son homoxéneos en canto a idades e sexo, quedando así mesmo recollidos diferentes estratos sociais e hábitats (urbano e rural), diferentes centros de secundaria dos tres sistemas de escolarización coexistentes: público, privado e privado concertado, e de tódolos puntos xeográficos da comunidade galega (caso dos colectivos universitarios), ou representativos da diversidade de aptitudes e actitudes estudiantís (caso do COU-2º bacharelato), cun nivel variado de rendemento en matemáticas (dato achegado polas cualificacións obtidas polos estudiantes ben no curso anterior, COU ou 2º bacharelato: entre aprobado e sobresaliente en Matemáticas, e que cursaran tamén a materia de Física; ben no exame específico sobre o tema de integración nese mesmo curso, cursando a materia de Física, no caso dos de "ciencias" ou non, no caso dos de "sociais"). Seguindo a Ghiglione e Matalon (1989), considérase que a característica elixida ten unha homoxeneidade suficiente para poder obter conclusións fiables.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

3.2.2.2.- Variables

As principais variables de interese son de tipo cualitativo, xa que o fin principal da investigación é interpretativo (Kirk e Miller, 1986. Denzin e Lincoln, 1994). Interesámonos polos compoñentes cualitativos dos significados persoais que os alumnos da mostra asignan ó obxecto cálculo integral e ós sub-obxectos matemáticos derivados del. O estatístico empregado na análise cuantitativa permítenos complementar este estudio ó describir tendencias grupais: ó tratarse dunha avaliación descritiva de significados persoais, utilizámo-la porcentaxe como estimación dos valores na poboación.

Seguindo a terminoloxía de Moore (1995), empréganse os termos "explicativo" e "resposta", na vez de "independente" e "dependente", ó non ter neste caso un control experimental puro de cada ítem. Consecuentemente teriamos:

a) Variables explicativas:

Entendemos por tales os ítems de que consta cada cuestionario

- 19 ítems nos cuestionarios básicos.
- 5 ítems no cuestionario de reforzo cos alumnos de 1º de universidade.
- 1 ítem no cuestionario de reforzo cos estudiantes de matemáticas.

b) Variables resposta:

Denominamos así a aquelas que avaliamos na investigación, que corresponden ás categorías de resposta establecidas para cada item, e que se describen puntualmente no capítulo 5.

Tal e como describe Webb (1992), na avaliación debemos ter en conta as respostas obtidas, as condicións en que se formulan, a análise e a interpretación, así como o coñecemento que se avalía, as características do individuo ou grupo que se avalía e o propósito da avaliación.

3.2.2.3.- Hipóteses

Definimos como hipóteses as expectativas sobre o significado persoal do cálculo integral para os alumnos, que esperamos comprobar a través das respostas das mostras elixidas. Tal e como indica Fox (1981), a formulación destas hipóteses axuda a estructura-lo método e a técnica de recollida de datos, así como a súa análise estatística. Así mesmo permiten comprender de ónde parte o problema de investigación e o que se espera obter dela.

Aínda que cada profesor e cada "grupo clase" determinan en última instancia unha realidade educativa singular, entenderemos como *proceso formativo estándar* aquel que esencialmente se regule dentro dos parámetros xerais ós que se alude nos primeiros

parágrafos da introducción deste capítulo 3º, que se confirman e detallan na análise de libros de texto, sobre os que se reflexiona ó fío tamén de anteriores investigacións en torno á aprendizaxe da integración no epígrafe 3.1.3 (Conclusións), que se matizan na introdución ó epígrafe 3.2.1 (Formulación do problema), e sobre o que as entrevistas a alumnos e profesores -incluíndo preguntas dos cuestionarios de reforzo (capítulo 4º, epígrafe 5)- ratifican como dominante nos actos de instrucción acerca do cálculo integral.

A este respecto pretendemos constatar, en relación coa estructura conceptual obxecto da presente investigación, as seguintes hipóteses:

H1: *Os alumnos coa formación estándar de COU ou 2º de bacharelato presentan un baixo*[1] *nivel de conceptualización da integral como obxecto matemático que permite resolver problemas de medida, e que debe ser adaptado en función das características concretas do problema*.

H2: *Estes estudiantes mostran unha alta designificación do proceso estándar de construcción da integral por aproximación mediante sumas, non apoiándose nesas mesmas estratexias para resolver problemas.*

H3: *Os ditos alumnos manifestan unha importante debilidade metacognitiva acerca das técnicas de cálculo de primitivas*, *o que lles resta eficacia tanto na súa exercitación como fronte ás posibles aplicacións*.

H4: *Este colectivo de estudiantes ten grandes dificultades para diferencia-las condicións de existencia de integral definida e de primitiva nun intervalo, así como para discriminar condicións "suficientes" de "suficientes e necesarias".*

[1] Empregamos adxectivos como "baixo", "grande", "importante"... para sinala-lo grao de xeneralidade da problemática que se especifica en cada caso.

H5: *Estes alumnos teñen un rendemento medio moi baixo á hora de estableceren no cadro xeométrico a relación entre a gráfica dunha función e as das súas primitivas.*

H6: *Os ditos estudiantes carecen de criterios que lles permitan recoñecer en diferentes contextos cándo resulta pertinente o uso dunha integral, e qué procedemento se pode seguir.*

H7: *O colectivo estudiado ten deficiencias importantes na comprensión teórica dos resultados matemáticos que permiten aprecia-lo poder da integral como ferramenta matemática de gran transferencia teórico/práctica que permite trata-los problemas de variación.*

H8: *Estes alumnos teñen grandes dificultades para atoparen conexións entre diferentes resultados ou propiedades estudiadas, e interpretar aqueles e estas nun contexto xeométrico.*

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

3.2.3.4.- Instrumentos de recollida e análise de datos

Os datos recolléronse fundamentalmente a través duns cuestionarios, as construccións e contidos dos cales se describen no capítulo 4. O cuestionario é indicado para ser aplicado e valorado de forma uniforme nos distintos suxeitos, incluso cando se pase en días diferentes (Sachs, 1983), estando englobado dentro das técnicas obxectivas de recollida de datos (Scott, 1988; Thorndike, 1989).

Posto que a finalidade do cuestionario é obter datos a nivel profundo dos coñecementos dos alumnos, como método de recollida de datos, englóbase a medición (Thorndike, 1989). Neles pedímoslles ós suxeitos unhas tarefas a nivel consciente para xerar unha medida do seu coñecemento ou destreza (Audrey, 1989; Dane, 1990).

A construcción dun cuestionario é unha tarefa complexa, especialmente a redacción dos ítems. Dado que unha gran parte destes foron deseñados especialmente para esta investigación, consideramos necesario sometelo á validación de varios colectivos (matemáticos profesionais e profesores de matemáticas, licenciados en matemáticas alumnos do CAP) é a realización dunha proba piloto. A maioría dos ítems formulan preguntas abertas, nas que se demanda argumentación das solucións.

A análise de datos foi cualitativa e cuantitativa. As categorías da variable cualitativa obtivéronse mediante un proceso de comparación de respostas semellantes e de agrupación ou división de categorías cando se considerou conveniente, segundo é recomendado por Huberman e Miles (1984).

A recollida de datos completouse mediante entrevistas colectivas non normativas, nas que non se seguía ningún protocolo estándar, senón que se conducían a xeito de coloquio para favorece-las manifestacións espontáneas dos estudiantes.

O tratamento estatístico dos datos levouse a cabo co programa informático SPSS.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Capítulo 4

Elaboración do instrumento principal de avaliación

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

4.0.- Introducción

A continuación preséntanse os problemas recollidos, adaptados ou ideados expresamente durante o período que durou a investigación a partir dun inicial varrido de textos, ós que se foron engadindo modificacións ou novos problemas.

Os problemas foron, un a un, analizados dende unha perspectiva didáctica. Para non sobrecarga-la lectura, neste capítulo mostrarémo-las análises correspondentes unicamente ás cuestións que finalmente configuraron o "instrumento de avaliación", pasando o resto a constituí-lo 3º apéndice desta memoria.

Admitindo que toda clasificación é convencional, consideramos pertinente, á luz dos elementos máis significativos atopados na revisión histórico-epistemolóxica da integración, agrupa-los problemas nas catro categorías epistemolóxicas seguintes:

1.- Interpretación da integral como medida.

2.- Cálculo e representación de primitivas. Métodos de integración.

3.- Aplicacións a outros contextos.

4.- Propiedades e teoremas da integración.

Nun intento de vincula-lo noso estudio coa realidade docente profesional, consideramos pertinente cotexa-las nosas avaliacións cunha representación razoable da comunidade da educación matemática. Destas valoracións, completada con entrevistas sobre os mesmos cuestionarios mantidas con algúns dos profesores que colaboraron nesta fase, saíu a decisión de prescindir dalgúns dos problemas e de idear outros que cubrisen mellor determinados aspectos que entendiamos de interese; tamén pequenas correccións nos enunciados en aspectos puntuais que ós revisores non lles causaron contratempos, pero das que xentilmente nos advertiron porque quizais ós alumnos si llelos causasen.

Como complemento a esta consulta, o mesmo cuestionario foi analizado por licenciados en matemáticas alumnos do Curso de Aptitude Pedagóxica desempeñando roles de profesorado. Pareceunos especialmente pertinente porque as súas vivencias como estudiantes de COU estaban aínda próximas, e era este un bo momento para contemplalas retrospectivamente.

4.1.- Revisións externas dos problemas

Da batería inicial de problemas, dado que tiña moita amplitude, foron seleccionados 35 deles, co obxecto de realizar unha consulta ó profesorado, solicitándolles que os valorasen en cada un dos catro aspectos seguintes, sempre tendo en conta que se dirixirían a alumnado de COU e 2º de bacharelato:

a) Dificultade.

b) Interese dende o punto de vista formal.

c) Interese dende o punto de vista do coñecemento intuitivo.

d) Pertinencia neste nivel educativo.

Así mesmo proporcionáronselles unhas indicacións que resumían as nosas análises para os problemas respectivos (como xa indicamos, figuran completas no apéndice 3), co obxecto de deixa-lo máis claro posible as nosas intencións e que a colaboración nos resultase fructífera.

Recolléronse cubertos nove cuestionarios de universidade e once de institutos de secundaria:

- Universidade: Departamentos de Análise, Álxebra, Xeometría e Matemática Aplicada.
- Institutos de Secundaria: Departamentos Didácticos de Matemáticas do IES "Rosalía de Castro" e do IES das Fontiñas, de Santiago.

Como indicamos na introducción, complementouse esta consulta con alumnos do Curso de Aptitude Pedagóxica: responden trinta e dous licenciados en matemáticas traballando en grupos de entre tres e cinco membros, do curso 97-98.

Presentamos a continuación os problemas e as valoracións medias respectivas en cada un dos tres colectivos mencionados, que codificamos en tres tipos de cualificación:

B: baixo, entre 1 e 2´25

M: medio, entre 2´25 e 3´75

A: alto, entre 3´75 e 5

que xulgamos suficientes e funcionais para o noso propósito.

- A título de observación, podemos facer constar que non parece haber contraposición por colectivos en ningún problema, en ningunha das catro valoracións correspondentes: non se dan A con B, se non sempre A con M ou M con B. Sen embargo iso si sucedía en calquera dos tres colectivos se comparasémo-las valoracións individuais entre si (grupos no caso do CAP), o que pode constituír un indicador de diferentes concepcións suxacentes acerca da

natureza da matemática e dos compoñementes da actividade matemática, así como sobre o qué resulta máis formativo neste nivel.

Na numeración que segue a continuación o primeiro díxito indica a categoría epistemolóxica principal á cal asociámo-lo problema (aínda que frecuentemente comparten trazos de varias das categorías), e o segundo díxito o número de orde dentro dos que agrupamos nesa mesma categoría:

1.1.- Calcula a área comprendida entre a gráfica da curva *f(x) = cos x* e o eixo horizontal no intervalo $[0,\pi]$. Interpreta graficamente o resultado.

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	B	B	B
Interese dende o punto de vista formal	M	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	A
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	A

1.2.- Debuxa, a grandes trazos, a gráfica dunha función que exprese en cada punto a área baixo a curva *y = x² +1*, entre a orixe e o dito punto.

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	B	B	M
Interese dende o punto de vista formal	M	M	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	M	A
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

1.4.- A función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ toma tódolos seus valores positivos. ¿É correcto o seguinte cálculo?: $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = |-\frac{1}{x}|_{-1}^{1} = -1-1=-2$. De non selo propón un cálculo alternativo.

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	A	A	A

Interese dende o punto de vista formal	A	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	B	M

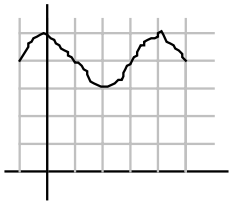
1.5.- As funcións *f, g* son continuas e positivas no intervalo [0,1], e a diferencia entre $\int_0^1 f(x)dx$ e $\int_0^1 g(x)dx$ é moi pequena. A partir deste dato, ¿podemos afirmar que *f* e *g* toman valores moi próximos en tódolos puntos dese intervalo? Xustifica a resposta.

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	M	M	A
Interese dende o punto de vista formal	M	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

1.6.- Se $\int_0^1 f(x)dx = 2$, e *f* é sempre positiva, entón ¿ $f(x) \le 2 \quad \forall x \in [0,1]$? Xustifica a resposta. ¿Que teorema ou resultado matemático se relaciona con este problema?

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	M	B	M
Interese dende o punto de vista formal	A	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

1.7.- ¿Como calcularías, coa maior aproximación que che sexa posible, a área baixo a curva do debuxo, da que descoñecémo-la fórmula?



Xustifica a resposta e realiza o cálculo que propós.

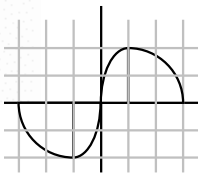
	Universidade	Secundaria	C.A.P.

Dificultade	B	B	M
Interese dende o punto de vista formal	B	M	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	A
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	A

1.8.- Se *f* e *g* son continuas en [a,b], con *f(x) = -g(x)* en todo o intervalo, ¿como son entre si as áreas comprendidas entre o eixo de abscisas e as gráficas das funcións entre *a* e *b*? ¿Como son os valores das respectivas integrais definidas en [a,b]?

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	B	B	M
Interese dende o punto de vista formal	A	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	A

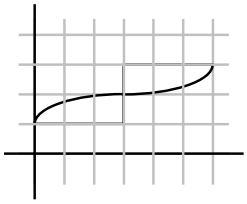
1.9.- ¿Como calcularía-la área limitada pola gráfica e o eixo horizontal no intervalo [-3, 3] se coñecese-la fórmula de *f* ?



	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	B	B	M
Interese dende o punto de vista formal	B	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	A
Pertinencia neste nivel educativo	A	M	M

1.10.- ¿Como calcularías, coa maior aproximación que che sexa posible, a área baixo a curva do debuxo, da que descoñecémo-la fórmula?

Xustifica a resposta e realiza o cálculo que propós.



	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	B	M	M

Interese dende o punto de vista formal	M	M	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	A
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	A

2.1.- Calcula a ecuación dunha curva que pasa polo punto P(1, 5) e ten como derivada, en calquera punto *x*, $3x^2 + 5x - 2$**.**

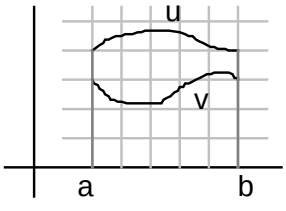
	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	B	B	M
Interese dende o punto de vista formal	A	M	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	M	M	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

2.2.- Determina a función f definida en (0, ∝), que ten como derivada segunda $f''(x) = \frac{6}{x^3}$ **e tal que f(1) = 0, f(2) = 1/2.**

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	M	M	M
Interese dende o punto de vista formal	M	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	B	M	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

2.3.- Sexan *u,v* as funcións da figura adxunta. Se $\int_a^b u' \cdot v = 1$**,**

¿que valor toma a expresión $\int_a^b u \cdot v'$**?**



	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	A	A	A
Interese dende o punto de vista formal	A	M	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	M	M	M

Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

2.9.-Calcula $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **(Consideramos unicamente os valores positivos da raíz).**

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	B	M	B
Interese dende o punto de vista formal	M	M	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	B	B	B
Pertinencia neste nivel educativo	M	M	A

2.10.- Calcula $\sqrt{1-x^2}\,dx$ **(Consideramos unicamente os valores positivos da raíz).**

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	A	A	M
Interese dende o punto de vista formal	A	M	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	B	B	B
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

2.11.- Calcula $\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$ **(Consideramos unicamente os valores positivos da raíz).**

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	A	A	A
Interese dende o punto de vista formal	A	M	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	B	B	B
Pertinencia neste nivel educativo	A	M	M

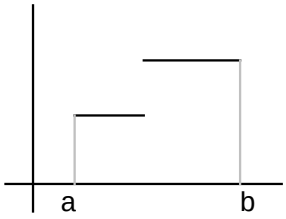
2.12.- Calcula $\frac{2x+1}{3x^2+3x-1}\,dx$ **.**

	Universidade	Secundaria	C.A.P.

Dificultade	B	B	M
Interese dende o punto de vista formal	M	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	B	M	B
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	A

2.14.- Debuxa, se existe, unha primitiva da función representada no gráfico, no intervalo [a, b].

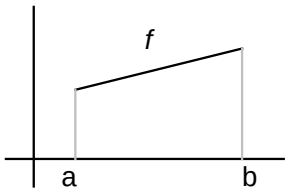
Xustifica a resposta que deas.



	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	A	A	A
Interese dende o punto de vista formal	M	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	A
Pertinencia neste nivel educativo	A	M	M

2.16.- Debuxa, se existe, unha primitiva de *f* no intervalo que se sinala no gráfico.

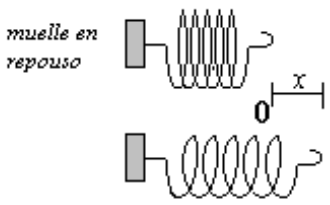
Xustifica a resposta.



	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	M	M	A
Interese dende o punto de vista formal	M	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	A
Pertinencia neste nivel educativo	A	M	A

3.1.- O traballo físico *T* realizado ó desprazar un corpo por unha forza constante *F*, que actúa na dirección do movemento, vén dado pola fórmula: $T = F \cdot e$, onde "*e*" é o espacio percorrido.

Pero a forza *F* que exerce un resorte elástico varía proporcionalmente á estirada *x*. No noso caso, segundo a fórmula $F(x) = \frac{1}{2}x$, onde $\frac{1}{2}$ é unha constante característica do resorte que se utiliza.



¿Como calcularía-lo traballo físico realizado polo resorte se foi alongado 5 cm, cando volta á posición inicial? Xustifica a resposta.

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	M	M	M
Interese dende o punto de vista formal	M	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	A
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

3.2.- (Recorda que a velocidade é a derivada do espacio respecto do tempo). Un ciclista desprázase a unha velocidade v(t) = 20 - 10t .

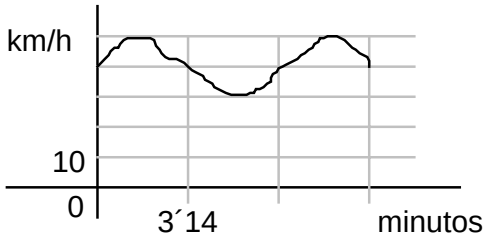
Calcula $\int_0^4 v(t)\,dt$ **e describe brevemente cómo foi o percorrido do ciclista.**

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	M	B	M
Interese dende o punto de vista formal	M	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	A

3.4.- Sóltase un corpo e cae cunha aceleración de 9´8 m/s^2, ¿que distancia percorre no 3º segundo? (entre t = 2 e t = 3).

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	M	M	M
Interese dende o punto de vista formal	M	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	A

3.6.- O gráfico mostra a velocidade dun ciclista nun circuíto urbano, que percorre en 9´42 minutos, tomando a saída en marcha.



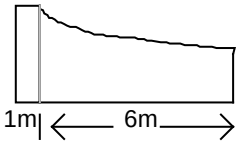
Pódese aproximar pola función $f(x) = 40 + 10\sin x$ **(considerando π = 3´14).**

Outro ciclista pretende percorrer todo o circuito no mesmo tempo, mantendo constante a súa velocidade ¿Cal debe ser esta? Xustifica xeometricamente o teu cálculo.

¿Que resultado matemático se relaciona con este problema?

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	A	A	A
Interese dende o punto de vista formal	A	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

3.7.- No ribazo dunha estrada quérese construír un muro que evite os derrubamentos de terra. Para iso é necesario facer un encofrado (revestimento) de madeira.



O perfil vén dado pola función $f(x) = 3 + \frac{1}{x^2}$**, para x ≥ 1 expresado en metros. ¿Canta madeira é necesario empregar?**

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	B	M	A
Interese dende o punto de vista formal	B	M	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

3.8.- Dada a función $f(x) = \frac{x^2}{4}$ **, calcula:**

a) A área do recinto que limita coa recta y = x.

b) O volume xerado ó xirar ese recinto en torno ó eixe OX.

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	A	M	A
Interese dende o punto de vista formal	A	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	M	M

3.9.- A taxa de crecemento da poboación dun país dende o ano 1980 vén dada pola fórmula $f(t) = 0'5.e^{0'01t}$, onde "t" é o tempo en anos trascorrido a partir desa data, e *f(t)* expresa millóns de persoas/ano.

¿Que poboación aproximada podemos esperar para o ano 2000, se en 1995 era de 37´5 millóns de persoas?

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	A	A	A
Interese dende o punto de vista formal	A	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

3.11.- Un automóbil de fórmula-1 queda sen propulsión por rotura do embrague. Estímase que a partir dese intre (t = 0) e ata que se para, a súa velocidade v, en m/s, virá dada pola expresión $v = 80 - \frac{5}{100}t^2$.

¿Chegará á meta se no momento da avaría estaba a 2100m dela?

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	A	A	M
Interese dende o punto de vista formal	A	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

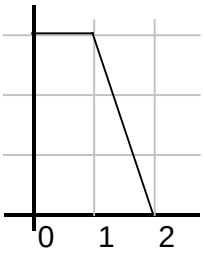
4.1.- Sabendo que para calquera *t*, $\int_0^t f(x)\,dx = 2^t - 1$, ¿de que función f se trata?

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	M	M	M
Interese dende o punto de vista formal	A	A	A
Interese dende o punto de vista intuitivo	B	M	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

4.2.- Escribe o enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	B	M	B
Interese dende o punto de vista formal	A	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	B	M	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	A

4.3.- Sendo f a función do debuxo, definida no intervalo [0, 2].

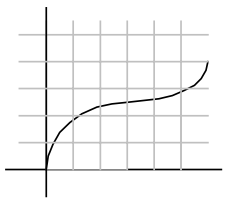


a) ¿Existe $\int_0^2 f(x)dx$? Xustifica a resposta.

b) ¿Pódese calcula-la área entre a gráfica desa función e o eixo horizontal, nese mesmo intervalo, por fórmulas de figuras coñecidas? ¿Como?

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	B	M	M
Interese dende o punto de vista formal	A	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	M	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	A

4.5.- Na gráfica está representada unha primitiva de f. Debuxa outra primitiva de f. Xustifica a resposta.



	Universidade	Secundaria	C.A.P.

Dificultade	B	M	B
Interese dende o punto de vista formal	M	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	A
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	A

4.6.- Sexan *f*, *g* dúas funcións positivas e integrables no intervalo [3, 5], moi próximas entre si, de xeito que $|f(x) - g(x)| \leq 0'1 \quad \forall x \in [3, 5]$.

Dada a súa complicación, non sabemos cómo achar unha primitiva de *f*, ¿que erro máximo se cometería ó substituír $\int_3^5 f(x)dx$ **por** $\int_3^5 g(x)dx$ **? Xustifica a resposta.**

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	A	M	A
Interese dende o punto de vista formal	A	M	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	M	A	A
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

4.7.- Representa a función $f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \neq 3 \\ 2 & se\ x = 3 \end{cases}$ **no intervalo [2, 4]. ¿Existe a función área nese intervalo:** $A(x) = \int_2^x f(t)dt$ **? Xustifica a resposta.**

En caso afirmativo indica algunha propiedade importante da función *A*.

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	M	A	A
Interese dende o punto de vista formal	M	M	A
Interese dende o punto de vista intuitivo	M	M	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	M	M

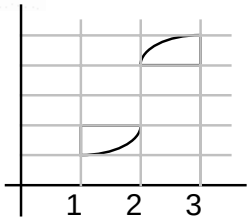
4.10.- ¿Pode unha función *f* definida no intervalo [1, 2] ter dúas primitivas *H* e *G* tal que *H(1)=4, H(2)=5* e *G(1)=2, G(2)=2*? Xustifica a resposta.

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	B	M	M
Interese dende o punto de vista formal	A	A	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	M	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	A

4.11.- ¿Cal é a derivada de $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para $x \in [a, b]$, se a función *f* é continua?

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	M	M	M
Interese dende o punto de vista formal	A	A	A
Interese dende o punto de vista intuitivo	B	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	A	A	M

4.14.- A gráfica mostra a velocidade dunha partícula en función do tempo.



a) ¿Cal foi a súa velocidade media? Xustifica a resposta.

b) ¿Que espacio percorreu no intervalo [1, 3]?

c) Interpreta fisicamente o movemento.

	Universidade	Secundaria	C.A.P.
Dificultade	A	A	A
Interese dende o punto de vista formal	M	M	M
Interese dende o punto de vista intuitivo	A	A	M
Pertinencia neste nivel educativo	M	A	M

4.2.- Análise didáctica dos problemas que conforman o instrumento principal e categorías de resposta correspondentes a eles

O instrumento principal de avaliación configurouse finalmente con 15 problemas elixidos entre a extensa batería que se mostra no apéndice 3º, despois das súas análise, clasificación e contraste externo. Incluíase tamén unha cuestión xeral acerca do significado persoal da integración, que se complementou con outras tres cuestións coas que intentabamos coñecer cáles son as imaxes mentais máis significativas coas que o alumno/a representa globalmente o concepto.

Para elabora-las categorías de resposta propuxéronselle os problemas a un grupo de 43 alumnos de 1º curso da Facultade de Farmacia da Universidade de Santiago, con posterioridade a que un grupo de 58 licenciados en matemáticas, alumnos do CAP, respondera a un cuestionario previo que contiña algúns deses mesmos problemas e outros de natureza semellante.

- Despois de analiza-las contestacións clasificámolas en función do marco conceptual do noso estudio.
- Os modelos correspondentes fixémolos cunha abondosa amplitude de detalles co obxecto de favorece-la identificación de cada resposta individual dentro da gran diversidade que se poñía de manifesto, pero agrupámolos nuns tipos básicos de maneira que nos facilitasen o seu tratamento.

Para simplifica-la presentación e non ter que repeti-las cuestións, despois de cada enunciado figura en primeiro lugar a análise didáctica e a continuación as categorías de resposta establecidas.

<u>Interpretación da integral como medida</u>

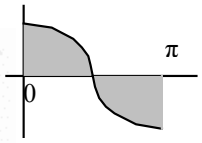
1.1.- Calcula a área comprendida entre a gráfica da curva *f(x) = cos x* e o eixo horizontal no intervalo $[0,\pi]$.

Análise didáctica

Abarca a integral definida como medida dunha área, o signo da integral e o uso directo da regra de Barrow.

Pensamos que o enunciado suxerirá o cálculo dunha integral definida. Tanto a función como as súas primitivas son elementais e sinxelas, e sobradamente coñecidas, polo que non esperamos dificultades nese senso.

a) Un dominio ou recoñecemento do problema conduciríanos a busca-los puntos de corte co eixo horizontal. Un bo recurso de metodoloxía de traballo sería facer un esquema xeométrico.



O traballo sistemático co valor absoluto, ou alternativamente usalo soamente no segundo subintervalo ou, aínda, presenta-la expresión como "resta", indicaría unha consciencia da dicotomía área/integral que se nos presenta cando aquela está total ou parcialmente baixo o eixo de abscisas:

$$\left|\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx\right| + \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx\right| = |sin|_0^{\pi/2} + |sin|_{\pi/2}^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx + \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx\right| \quad ; \quad \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx$$

b) Cabe tamén un tipo de resposta correcta que obvia o problema do signo, que pode xurdir facilmente a partir do cadro xeométrico: $2\cdot\int_0^{\pi/2} \cos x dx$.

c) Se nos precipitasemos poderiamos ir sen máis ó cálculo da integral:

$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = [sinx]_0^{\pi} = sin\pi - sin0 = 0 - 0 = 0$$

Neste caso, o valor final 0 debera "invitarnos" a unha revisión da solución aportada.

Categorías de resposta

__ Diferencian os intervalos
- __ controlan o signo da integral (__correcto __erróneo A=0 __ outro)
- __ non achegan solución numérica nin indicación ó signo das integrais
- __ compensan graficamente obtendo A = 0
- __ resultado correcto sen facer explícita a cuestión relativa ó signo
- __ non controlan os signos (¿solución mecánica?)

__ Empregan un único intervalo de integración
- __ obteñen 0 como valor (__ non continúan __ área negativa)
- __ obteñen 1 ou outro resultado positivo
- __ obteñen -1 e cambian a +1
- __ non aportan solución numérica (__ intentan controla-lo signo)
- __ dan outro valor negativo

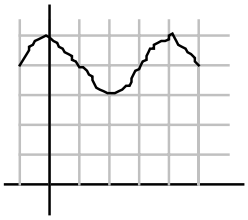
__ Preséntano por integración
- __ non o rematan
- __ con erros que obvian o problema do signo

__ Fan soamente a gráfica
- __ correcta
- __ errada

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

1.7.- ¿Como calcularías, coa maior aproximación que che sexa posible, a área baixo a curva do debuxo, da que descoñecémo-la fórmula? Xustifica a resposta e realiza o cálculo que propós.



Análise didáctica

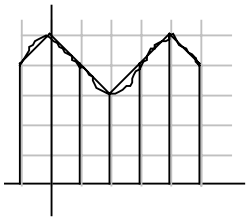
Trátase de explorar algunhas ideas, e incluso técnicas, de integración aproximada: rectángulos, trapecios, Simpson, ou outra curva coñecida.

a) A gráfica recorda unha función circular, concretamente $4+\cos x$, pero as unidades deberan disuadir dese intento de aproximación ($x = 1 \neq \pi/2$). De tódolos xeitos a posibilidade déixase aberta, pois manifestaríase a

dispoñibilidade a substituír unha función descoñecida por outra coñecida próxima a ela.

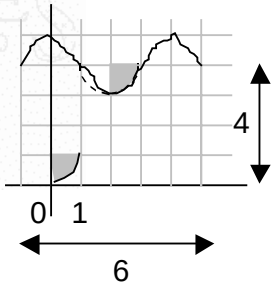
b) Un intento primario, pero correcto e coherente coa introducción usual da integral definida, sería unha aproximación por rectángulos. Unha serie de aproximacións buscando a converxencia indicaría unha asimilación máis profunda.

c) A aproximación por trapecios sería sinxela se fose xa coñecida. Noutro caso indicaría unha disposición ó uso do cadro xeométrico como axuda para pensar.



d) A utilización do método de Simpson pode vir suxerida pola figura "parabólica" do arco central. De producirse sen ter sido coñecida con anterioridade revelaría un grao de profundidade importante respecto do uso do cadro xeométrico.

Abondaría, neste caso, con avalia-la zona sombreada, que podería ser trasladada á orixe:



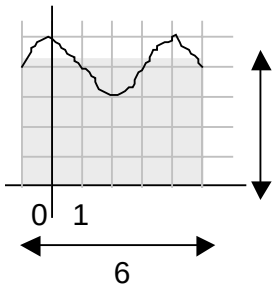
Como para $x = 1$ é $y = 1$, tomámo-la parábola

$$y = x^2 \quad \rightarrow \quad 1 - \int_0^1 x^2\,dx = 1 - \left|\frac{1}{3}x^3\right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$A \approx 6 \cdot 4 + 2 \cdot {}^{2}\!/_{3} = {}^{76}\!/_{3}$$

e) Un recurso primario, que tamén podería indicar unha boa intuición do teorema da media, consistiría nunha compensación de áreas "a ollo", construíndo un rectángulo.

Unha cuestión de máis calado sería a de propoñerse busca-la "altura media" que dá lugar ó dito rectángulo.



f) Hai outros recursos primarios, aínda máis elementais, como contar cadros, estimando naqueles que non caben enteiros baixo a gráfica.

Categorías de resposta

__ Aproximan:

__ Con estratexias "primarias"

__ estimando por cadradiños e/ou compensando
__ por un único recinto/compensando
__ mixta

__ Con estratexias "inducidas"
__ aluden implicitamente a particións
__ explicitamente por rectángulos
__ por Σ Sup e Σ Inf.
__ con Σ Sup ou Σ Inf.
__ media dun rectángulo superior e outro inferior
__ intentan utilizar outra función

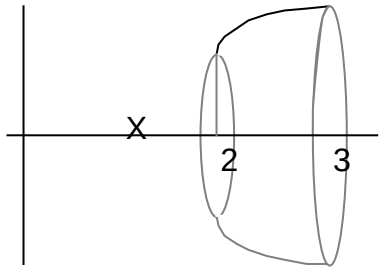
__ Presentan o problema por integración
__ en todo o intervalo
__ dividen en subintervalos
__ en dous subintervalos (-1, 0) e (0, 5)
__ noutros subintervalos
__ non indican extremos de integración ou son inadecuados
__ refírense á integral, sen chegar a escribila

__ Intentan obte-la ecuación

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

1.12.- O corpo da figura obtívose ó xirar en torno ó eixo X o tramo da curva $y = 6x - x^2$ entre os puntos de abscisas 2 e 3.



Explica algunha idea sobre cómo nos poderiamos aproximar ó seu volume.

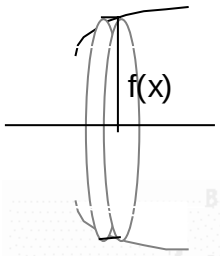
Se podes, calcúlao con exactitude. Xustifica por qué o método que segues para resolvelo é correcto.

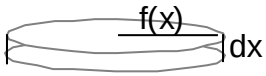
Análise didáctica

a) Se resolveron e recordan, aínda que sexa minimamente, algún problema de volume de revolución, non deberían ter dificultade en resolver este, xa que a información verbal e gráfica é completa. Se o problema fose coñecido, a

necesidade de xustifica-lo método empregado mostraríano-lo tipo de concepción da integral definida.

b) No caso de ser un problema novo a división da superficie en rectángulos, utilizada para introduci-la integral definida, podería suxeri-la división do corpo en toradas case cilíndricas e, por analoxía, intentar construí-la integral como suma dos cilindros infinitésimos:





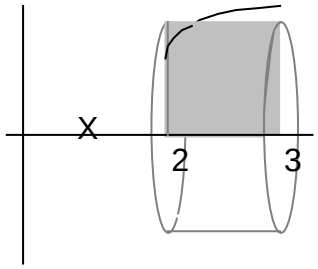
$$dV = \pi \cdot f(x)^2 \cdot dx$$

$$V = \int_2^3 \pi(6x - x^2)^2\,dx = \int_2^3 \pi(36x^2 - 12x^3 + x^4)dx = \pi\left[12x^3 - 3x^4 + \tfrac{1}{5}x^5\right]_2^3 = 75'2\pi$$

Isto indicaría unha capacidade de transferencia desexable, en consonancia cunha boa conceptualización da construcción da integral como un proceso de aproximación converxente.

c) É posible que se mostren intuicións do teorema do valor medio:

- Buscar un cilindro intermedio que, a ollo (pois busca-lo seu raio sería un inconveniente serio), permita aproxima-lo volume.
- Sen embargo, no caso de face-la cuadratura da área por un rectángulo e xirala, ademais do erro de aproximación, habería un erro conceptual, xa que o volume de rotación "non se conserva".



d) Outros intentos de aproximación poderían vir a través de figuras de aspecto máis parecido, como un tronco de cono, aínda que probablemente terían esquecido como determina-lo seu volume e non se sentisen con forzas para deducilo.

e) A descomposición ou recheo en cubos unidade sería unha extratexia primaria, pero agora a súa aplicación non é fácil, polo que posiblemente non se manifesten intentos desta natureza, a pesar de que si poidan pensarse.

Categorías de resposta

__ Aproximan
- __ tronco cono
- __ media dos cilindros exterior e interior
- __ cilindro de raio medio
- __ por cubos unidade (faino ou indícao)
- __ suma de cilindros ou troncos de cono
- __ outras

__ Recorren directamente á integral
- __ empregan a fórmula do volume de revolución
  - __ desenvólvena ben __ con erros
- __ calculan (ou indican) a área do recinto plano e logo non rematan
- __ calculan a área e logo indican que se debe calcular o volume (V = A·h, ...)
- __ toman o dobre ou o cadrado da integral que se corresponde á área
- __ toman mesmo a integral que se corresponde á área
- __ toman a integral do cadrado da función
- __ presenta unha integral dobre
- __ soamente indican que se fai por integrais
- __ empregan a fórmula do volume para calcular unha área

__ Buscan fórmulas directas
- __ chega a calcula-las áreas dos dous círculos
- __ outras

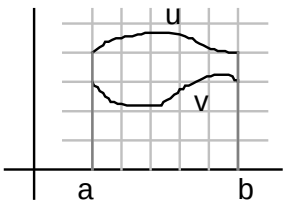
__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

Cálculo e representación de primitivas. Métodos de integración

2.3.- Sexan *u,v* as funcións da figura adxunta. Se $\int_a^b u \cdot dv = 1$ **,**

¿que valor toma a expresión $\int_a^b v \cdot du$ **? Xustifícao.**



Análise didáctica

O enunciado alude nítida e expresamente á integración por partes, utilizando a simboloxía máis común.

Nesta ocasión non tratamos de valora-la capacidade de utilización do método, senón de interpretalo: non sabemos cómo integrar $v \cdot du$, e intentámolo por medio de $u \cdot dv$, xa que isto último resulta coñecido.

$$\int_a^b v \cdot du = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot dv = u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a) - 1$$

Unha visión xeral da gráfica garántenos que os productos son iguais, xa que $u(b) = u(a)$ e $v(b) = v(a)$, aínda que tamén se lle poderían atribuír valores concretos e realiza-los cálculos, a partir dunha lectura puntual da gráfica. De aí:

$$\int_a^b v \cdot du = 0 - 1 = -1$$

Categorías de resposta

__ Abórdana como unha integración por partes
- __ resolven correctamente
- __ poñen os extremos de integración nos tres termos da expresión, pero non chegan a avaliar $[u \cdot v]_a^b$
- __ poñen os extremos de integración nas dúas integrais que aparecen no enunciado, pero non no producto $u \cdot v$
- __ escriben correctamente a expresión pero sen extremos de integración
- __ escribe incorrectamente a expresión

__ Afirman que o valor é –1 (ou 1, ou outro número)
- __ sen ningunha argumentación
- __ argumentación errada

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

2.8.- Calcula $\int x \cos x \, dx$ **.**

Análise didáctica

Exercicio de cálculo de primitivas: integración por partes.

Unha compoñente esencial deste método reside na toma de conciencia de que ó considerar dúas funcións, a función elixida para derivar debe dar un resultado máis simple, mentres que a función que se integra non debe dar lugar a un resultado máis complexo (unicamente que nos conduza a unha función coñecida de antemán, cousa que raramente sucedería).

Como xa nos referiamos na cuestión anterior, non se trata da aprender unha técnica *per se*, senón de adquirir un recurso para afrontar unha integración problemática: non sabemos cómo integrar $u \cdot dv$, e intentámolo por medio de $v \cdot du$, cando isto último resulte máis sinxelo.

$$\left.\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ v = \sin x \leftarrow dv = \cos x dx \end{array}\right\} \rightarrow x\cos x dx = x\sin x - \sin x dx = x\sin x + \cos x + cte.$$

Certamente este método pode ser ensaiado aínda que os obxectivos de simplificación non se consigan, o cal se facería de non contar con outros recursos para a obtención da función primitiva.

- Nese sentido un indicador da simple automatización sería a elección inadecuada das funcións que xogarán os roles de *u* e *v*, complicando máis o problema, se é que non se produce unha rectificación do camiño emprendido.

O feito de que *x* figure en primeiro lugar pode inducir a que sexa esta función a que xogue o papel de *u* (o cal é o conveniente), e non saberemos se houbo ou non unha elección consciente. Intentaremos coñecer este aspecto a través das entrevistas.

Categorías de resposta

__ Enfocan o problema como unha integración por partes
  __ Realizan ben o problema
  __ Equivócanse nun signo ó operaren

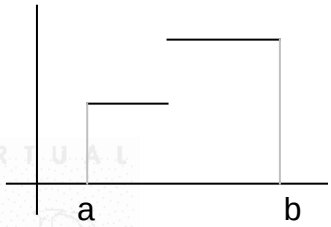
__ Elixen inadecuadamente as funcións *u*, *v*
__ Presentan incorrectamente a integración por partes
__ Outros erros

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

2.14.- Debuxa, se existe, unha primitiva da función representada no gráfico, no intervalo [a, b].

Xustifica a resposta que deas.



BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Análise didáctica

O primeiro en dilucidar é a existencia de primitiva, cuestión que pode non estar clara neste caso por non ser continua a función, e apreciarse claramente o salto.

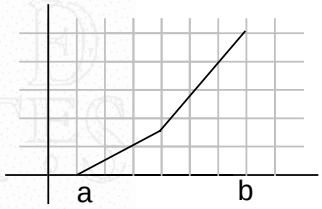
A continuación preséntase unha cuestión importante: pode existi-la integral (facilmente imaxinable neste caso a través da área) pero non haber primitiva. De feito isto é o que sucede, pero non por non ser continua, senón polo tipo de descontinuidade (existen os dous límites laterais na función do gráfico, logo non pode se-la derivada de ningunha función; tamén o teorema de Darboux nos permitiría chegar á mesma conclusión, xa que se fose unha función derivada tería que acadar tódolos valores intermedios entre os que corresponden ós extremos).

Non esperamos, sen embargo, que esta discusión se vexa reflectida nas respostas, xa que mentres na secundaria se discute a existencia de integral, non se discute a de primitiva (ou sexa, non se propoñen problemas de cálculo de primitivas nos cales haxa que determinar se tal primitiva existe ou non e, no seu caso, se existiría en certos dominios). Quizais tal discusión sexa, efectivamente, moi difícil, pero iso non xustifica o silencio absoluto en torno a ela, máxime cando induce a pensar erroneamente: alomenos debera deixarse advertido.

- Pensamos, sen embargo, que ó non ser explícita para os estudiantes a dicotomía integral/primitiva á que nos estamos a referir, pode producirse unha asociación entre as dúas ideas e, nesta tesitura, darse o erro lóxico de valida-la proposición contraria ($\neg p \quad \neg q$: non é continua, logo non ten primitiva) en lugar da contrarrecíproca ($\neg q \quad \neg p$: non ten primitiva, logo non é continua).

Cremos que o problema se presentará na busca de primitiva en cada un dos anacos nos que se define a función, para o que prevemos tres posicionamentos diferentes: xeométrico, analítico e mixto, o que pasamos a pormenorizar:

- Recordando o teorema fundamental, unha perspectiva xeométrica poderíanos servir para constatar que en cada tramo a área aumenta sempre igual (ou sempre co mesmo ritmo, se queremos precisa-la expresión), xa que "a liña"[1] que se engade é sempre igual de longa.



  Logo a primitiva (área) debe ser recta en cada tramo, e máis inclinada no segundo que no primeiro.

- Unha visión puramente analítica sería máis simple, sempre que se identificase a función cunhas constantes en cada tramo, pois daquela as súas primitivas habían de ser polinomios de 1º grao.
  - Unha dificultade importante que podería xurdir aquí é que hai que elixir convenientemente as constantes de integración para cada tramo, para que a nova función represente a área baixo a gráfica da función inicial.
- Unha perspectiva mixta podería consistir en contempla-la función dada como a derivada da función buscada e, polo tanto, a medida da súa "pendente" en cada punto, e sendo constante en cada tramo, a función buscada é sempre igual de "inclinada" en cada anaco.

[1] Empregarémo-lo termo "liña", intencionadamente entrecomillado, para referirnos a un elemento diferencial de área, de altura *f(x)* e base *dx*.

Un aspecto que compre ter en conta é a asignación do valor inicial 0 á área, xa que a función f non é nula no punto a.

Categorías de resposta

__ Representan correctamente unha primitiva para cada tramo, sen busca-las fórmulas
- __ Asignan valor inicial 0
  - __ asociado á área
  - __ sen xustificar
- __ Non asignan valor inicial 0

__ Súmanlle unha constante á propia función do gráfico

__ Por tramos, pero incorrectamente
- __ Non reflicten dous ritmos de crecemento
  - __ Asignan valor inicial 0
    - __ asociado á área
    - __ sen xustificar
  - __ Non asignan valor inicial 0
- __ Outros erros (__ Fana descontinua)

__ Afirman que non ten primitiva/integral nese intervalo
- __ Porque a función non é continua
- __ Porque a función non é derivable
- __ Porque non é continua nin derivable
- __ Sen explicación

__ Aluden explicitamente á diferencia entre primitiva e integral

__ Buscan, ou intentan, a fórmula de f (__ con método __ sen método)

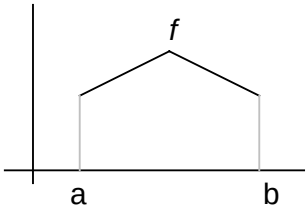
__ Afirman que ten primitiva pero non a debuxan

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

2.15.- Debuxa, se existe, unha primitiva de f no intervalo que se sinala no gráfico.

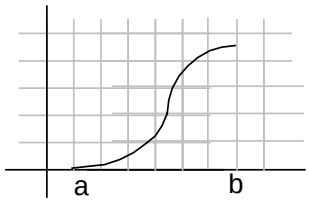
Xustifica a resposta.



Análise didáctica

Recordando o teorema fundamental, unha perspectiva xeométrica poderíanos servir para constatar que en ámbolos dous tramos a área aumenta, pero mentres no primeiro faino cada vez máis (ou cada vez máis rápido, se queremos precisa-la expresión), no segundo é cada vez máis lenta:

- A "liña" que se engade é cada vez máis longa no primeiro tramo, e cada vez máis curta no segundo. Logo a primitiva (área) debe ter dous tramos curvos, convexo o primeiro e cóncavo o segundo.



É doada a representación mental dos dous arcos de parábola, aínda que a decisión de unilos conscientemente mediante unha inflexión require unha nítida concepción da integración, difícil de posuír sen unha representación axeitada no cadro xeométrico.

Así mesmo, a total simetría da función inicial respecto do punto anguloso fai que a área correspondente ós subintervalos tomados á esquerda e dereita do punto anguloso teñan o mesmo valor, polo que a función área será simétrica respecto do seu punto de inflexión. (E en xeral calquera outra primitiva que empreguemos).

Un aspecto que compre ter en conta é a asignación do valor inicial 0 a área, xa que a función *f* non é nula no punto *a*.

Unha visión puramente analítica sería máis simple, sempre que se identificase a función con dous tramos polinómicos de 1º grao, pois daquela as súas primitivas habían de selo de 2º.

- Xa nos viñamos referindo á dificultade importante que podería xurdir aquí: hai que elixir convenientemente as constantes de integración para cada tramo, para que a nova función represente a área baixo a gráfica inicial, ou, en xeral, determina-la relación entre as ditas constantes se queremos que sexa unha primitiva.

Unha perspectiva mixta podería consistir en contemplar f como a derivada da función buscada e, polo tanto, a medida da súa "pendente" en cada punto; ó ser f cada vez maior no primeiro tramo, a función buscada debe ser cada vez máis "inclinada", e viceversa.

Un problema que pode xurdir, e que será interesante observar, é cómo inflúe na opinión do alumnado o feito de que a función para integrar non sexa derivable nun punto: ¿condicionarán a iso a existencia de primitiva?, ¿condicionarán a iso a posible derivabilidade da primitiva, no caso de admiti-la súa existencia?

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Categorías de resposta

__ Representan correctamente unha función primitiva
- __ Xustifican a concavidade/convexidade
- __ Xustifican a inflexión (derivabilidade da primitiva)
- __ Asignan valor inicial 0
  - __ asociado á área __ sen xustificar
- __ Non asignan valor inicial 0

__ Súmanlle unha constante á propia función f

__ Incorrectamente
- __ Non reflicten a concavidade/convexidade
- __ Non reflicten a inflexión (derivabilidade da primitiva)
- __ Outros erros (debúxana descontinua)
  - __ Asignan valor inicial 0
    - __ asociado á área __ sen xustificar
  - __ Non asignan valor inicial 0

__ Afirman que non ten primitiva nese intervalo
- __ porque a función non é continua
- __ porque a función non é derivable
- __ porque a función ten un punto anguloso
- __ porque está definida a anacos
- __ porque non é continua nin derivable

__ Buscan, ou intentan, a fórmula de f (__ con método __ sen método)

__ Afirman que ten primitiva pero non a debuxan

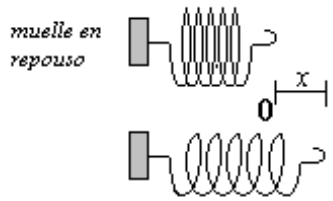
__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

Aplicacións a outros contextos

3.1.- O traballo físico *T* realizado ó desprazar un corpo por unha forza constante *F*, que actúa na dirección do movemento, vén dado pola fórmula: $T = F \cdot e$, onde "*e*" é o espacio percorrido.

Pero a forza *F* que exerce un resorte elástico varía proporcionalmente á estirada *x*. No noso caso, segundo a fórmula $F(x) = \frac{1}{2}x$, onde $\frac{1}{2}$ é unha constante característica do resorte que se utiliza.



¿Como calcularía-lo traballo físico realizado polo resorte se foi alongado 5 cm, cando volta á posición inicial? Xustifica a resposta.

Análise didáctica

Neste problema subxace a idea básica da integración: saberiamos resolvelo se a forza fose constante (o propio enunciado indica cómo, ademais de tratarse dun coñecemento básico cando se chegou a este nivel educativo); *pero* advírtesenos que non é constante.

1) Nun intervalo moi pequeno poderiamos considerar que a forza *F* fose constante (xa que tería moi pouco marxe para cambiar[2]), e así pasariámonos á situación coñecida e aplicariámo-la fórmula que se nos dá: $T = F \cdot e$.

2) A suma dos resultados obtidos para cada intervalo nos que dividiriámo-los 5 centímetros proporcionaríanos unha aproximación.

3) A aproximación é susceptible de mellorarse tanto como se desexe, tomando intervalos máis finos (e cada vez en maior número).

[2] Alomenos no problema que estamos tratando; tamén na xeneralidade dos problemas que se abordan nos niveis de iniciación, nos que as funcións son continuas (ou continuas a anacos) e aínda uniformemente continuas agás no estudio das integrais impropias, que non sempre se realiza. Formalmente esta intuición correspóndese coa noción de oscilación.

Reflecti-lo anterior como unha suma de productos $f(x)\cdot dx$, interpretariámolo como un indicador dunha boa concepción da fenomenoloxía da integración.

4) No caso límite de intervalos infinitesimais, a suma dos (infinitos) resultados debera proporcionárno-lo cálculo exacto.

5) Isto último é precisamente a integral definida:

$$\int_5^0 F(x)dx = \int_5^0 \tfrac{1}{2}x dx = \left[\tfrac{1}{4}x^2\right]_5^0 = -\frac{25}{4}$$

De recorrer ó cadro xeométrico, o debuxo desta situación corresponderíase exactamente co debuxo do problema da área, co que lles foi introducido o tema.

Como unha vantaxe para o resolutor da opción de "ciencias" cabe sinalar que tería tamén a materia de Física, na que, como unha das magnitudes máis familiares está o Traballo, o cal, precisamente, estudian como unha integral.

A sinxeleza da función que se emprega garántenos que non será precisamente o temor a non poder calcular unha primitiva o que poida disuadilos de intentar resolve-lo problema mediante unha integral.

Por outra parte, na pregunta anterior do cuestionario que recolle este problema faise mención expresa a unha función primitiva, e na primeira á área baixo a gráfica.

Podemos sinalar como un posible contratempo o signo negativo, que se relaciona coa orde na que coloquémo-los extremos de integración, pero isto soamente se observaría despois de ter resolto o problema.

Categorías de resposta

__ Responden por integración
- __ Establecen ben a función e os límites de integración
- __ Establecen ben a función, pero mal os límites de integración
- __ Establecen mal a función e ben os límites de integración
- __ Establecen mal a función e mal os límites de integración

__ Afirman que non se pode (por non se-la forza constante)

__ Utilizan a fórmula para o caso dunha forza constante
- __ Non se manifesta dúbida
- __ Modifican a fórmula nalgún aspecto
- __ Ven problema no signo
- __ Ven problema nas unidades
- __ Discuten se hai ou non traballo ó volver á posición inicial
- __ Discuten se debe considerarse a lonxitude do resorte
- __ Diferencian dous procesos: estirada e compresión

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

3.2.- (Recorda que a velocidade é a derivada do espacio respecto do tempo). Un ciclista desprázase a unha velocidade v(t) = 20 - 10t .

Calcula $\int_0^4 v(t)\,dt$ **e describe brevemente cómo foi o percorrido do ciclista.**

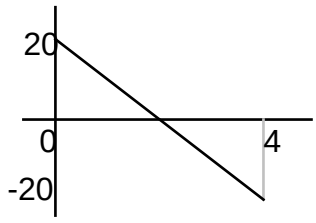
Análise didáctica

Neste problema enúnciase explicitamente unha integral e recórdase, indirectamente por alusión á derivada, qué magnitudes relaciona. Cuestións, por outra parte, todas elas xa coñecidas neste nivel académico.

O cálculo non debera supoñer dificultade, e espérase que o resolutor interprete no cadro físico un resultado tan común como o de retornar ó lugar de partida:

$$\int_0^4 (20 - 10t)dt = \left[20t - 5t^2\right]_0^4 = 0$$

Pódese precisar máis, indicando que vai decelerando ata deterse, e que o retorno é un movemento inverso, ata recupera-la velocidade inicial. Isto vémolo máis factible se recorren ó cadro xeométrico.



A figura mostra a existencia de dous intervalos "inversos", nos que a integral ten o mesmo valor absoluto (mesma área) e signo contrario, tendo así paralelismo co problema 1.1.

- Obter como resultado 0 e interpretar que o ciclista non se moveu, indicaría que non se transfire a este novo contexto a idea anterior (integral/área/signo), intensamente practicada nas aulas.
- Por outra parte indicaría tamén, dado que a idea de que non se movese se opón expresamente á función velocidade que proporciona o enunciado, unha actitude de designificación das fórmulas, que pode ser consecuencia do absoluto dominio das prácticas algorítmicas, a execución correcta das cales constitúe *per s*e o éxito escolar, despreocupándose dos significados asociados.

Categorías de resposta

__ Calculan correctamente a integral.
- __ Dan unha descrición apropiada do percorrido do ciclista
  - __ Establecendo os intervalos
  - __ Sen establecelos (circuito pechado)
  - __ Recorren á interpretación xeométrica
- __ Din que volveu ó punto de partida ou non se moveu
- __ Afirman que non se moveu
- __ Que andou 20 e logo outros 20
- __ Que a velocidade foi constante en todo o traxecto
- __ Non dan explicación
- __ Outras

Identifican a integral:
- __ coa velocidade
- __ coa aceleración

__ Teñen erros no cálculo ou déixano sen rematar
- __ Non utilizan límites de integración

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

3.10.- Nun laboratorio estase a facer un cultivo de bacterias nun medio agresivo; estas están reproducíndose aleatoriamente de xeito case continuo.

Experimentalmente estableceuse que a taxa de crecemento nun instante determinado vén dada pola fórmula $f(t) = 200 \cdot e^{0'1t}$, onde t é o tempo en días transcorrido dende o inicio do experimento, e *f(t)* expresa bacterias/día.

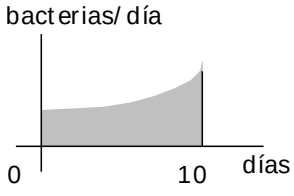
¿Que poboación aproximada podemos esperar para o décimo día, se ó inicia-lo experimento había 370 bacterias? (Toma $e \approx 2'7$).

Análise didáctica

O problema que se presenta aquí é o de recoñece-la integral definida como a medida, entre dous puntos dados, do incremento dunha magnitude a partir da súa "velocidade", taxa puntual de variación ou estado de cambio: o incremento total nun intervalo será a suma dos incrementos ou variacións diferenciais (situación equivalente a recoñecer que os problemas de "tanxencia" e "cuadratura" son inversos, aínda que non pretendemos que isto se faga explícito neste momento).

a) A representación do problema nos cadros xeométrico e físico pode resultar fructífera:

   - A imaxe visual pode suxerir, por similitude cos problemas de espacio-velocidade, que a medida da área sexa tamén a medida do número total de bacterias.



   - As analoxías estructurais cos problemas físicos pode levar a unha elemental simplificación, o que os alumnos seguramente terán practicado como "ecuacións de dimensións", xa dende 2º de BUP.

$$\frac{bacterias}{día} \cdot días = bacterias$$

b) Débese ter claro que unha integral definida proporciona un valor entre dous puntos dados, non un valor total. O contexto do problema debera evitar confusións neste aspecto.

   - Ademais detállase a pregunta sobre "qué poboación haberá", orientando a acción cara ó cálculo do incremento dunha magnitude nun intervalo, para despois falar do valor total da magnitude:

$$F_0^{10} = \int_0^{10} f(x)\cdot dx = \int_0^{10} 200\cdot e^{0'1x}\cdot dx = \left[2000\cdot e^{0'1x} + k\right]_0^{10} \approx 3437$$

- Ó proporcionar como dato que a poboación inicial era de 370 bacterias e preguntar pola poboación ó cabo de dez días, non teriamos máis que sumarlle 370 ó incremento calculado e, certamente o "aforro" da constante de integración non provocaría ningunha confusión:

$$3437 + 370 = 3807 \text{ bacterias.}$$

- Pero é posible que os alumnos busquen antes unha primitiva, presentándoa como a integral indefinida. Entón pensamos en dúas maneiras de proceder sutilmente distintas, porque nelas o uso ou non da constante vai ser decisorio:

  1) Omiti-la constante de integración, producíndose o erro:

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int 200e^{0'1x}\cdot dx = 2000e^{0'1x}$$

$$F(10) = 2000e^{0'1\cdot 10} \approx 5437 \rightarrow 5437 + 370 = 5807$$

  2) Determina-la constante de integración a partir do valor inicial, o que permite chegar á resposta correcta:

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int 200e^{0'1x}\cdot dx = 2000e^{0'1x} + k$$

$$F(0) = 2000e^{0'1\cdot 0} + k = 2000 + k = 370$$

$$k = -1630 \qquad F(10) = 2000e^{0'1\cdot 10} - 1630 = 3807$$

c) Toma-la función do enunciado como función poboación indicaría unha deficiente concepción da relación fundamental derivación/integración, pois expresamente fálase dunha taxa de variación instantánea.

   Ademais explicítase que a dita función expresa bacteria/día, o que nos sitúa, en principio, na fenomenoloxía da integración: bacterias/día · día = bacterias.

d) Outra posible actuación errónea consistiría en considerar fragmentos de 1 unidade de tempo (a que se menciona neste enunciado é o día), e calcula-los correspondentes valores de f para 1, 2, 3, ..., 10 (implicitamente supón calcular

unhas taxas de variación media, diariamente constantes), pero non como unha aproximación, senón na convicción de que esa é a resposta correcta.

- Faise unha indicación explícita ó carácter continuo por se iso puidese previr sobre a posible consideración de fragmentos de 1 unidade (días).

e) Sen embargo poderíase concluír cun cálculo explicitamente aproximado (correspondente ós valores de f para 1, 2, 3, ..., 10) non vinculado á integral ou, non realizando necesariamente o dito cálculo, propoñe-la integral como vía de solución do problema.

f) Quizais a función para integrar resulte pouco cómoda polos decimais dado que, posiblemente por unha pretensión implícita de abrevia-los cálculos, ese tipo de números ten habitualmente moi pouca presencia en problemas que non están expresamente dirixidos á práctica con eles.

Categorías de resposta

__ Traballan coa taxa de variación explícita ou implicitamente
  __ Achan unha función primitiva e logo determinan a constante
    __ Non determinan a constante
  __ Presentan a integral pero non resolven
  __ Calculan as taxas "diarias" e aplícanas día a día: *370 + f(1) + f(2)+ ... + f(10)*
  __ Aplican a mesma taxa tódolos días (uns *f(1)* e outros *f(10)*): *370 + 10·f( )*
  __ Outros cálculos, errados, coa taxa de variación

__ Calculan *f(10)* células/día, pero non continúan

__ Toman *f(t)* como a función poboación.

__ Regra de tres sobre o dato *das 370* bacterias

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

Propiedades e teoremas de integración

4.1.- Sabendo que para calquera *t*, $\int_0^t f(x)\,dx = 2^t - 1$, ¿de que función *f* se trata?

Análise didáctica

a) Posiblemente a expresión matemática máis repetida no estudio da integración a nivel de COU sexa a que se corresponde á regra de Barrow, que se presenta cun formato do tipo $\int_0^t f(x)dx = F(t) - F(0)$.

Trátase de confronta-lo resolutor cunha expresión na que aquela subxace, pedíndolle un pequeno esforzo de reconstrucción. Un recurso ou procedemento básico que debemos promover, encamíñanos á solución: ¿en que situacións nos temos atopado con expresións deste tipo?

$$\int_0^t f(x)dx = 2^t - 1 \quad \rightarrow \quad \int_0^t f(x)dx = 2^t - 2^0 \qquad F(x) = 2^x + cte.$$

A seguir debe facer uso do teorema fundamental, "léndoo" en sentido inverso ó habitual: f é unha derivada de F.

$$f(x) = F'(x) = 2^x \cdot \ln 2$$

b) Os dous pasos anteriores poderían acometerse nunha soa vez:

$$f(t) = \left(\int_0^t f(x)dx \right)' = (2^t - 1)' = 2^t \ln 2$$

o que require tamén a lectura inversa do teorema fundamental, pero implica o ser capaces de "pensar" a fórmula $\int_0^t f(x)dx$ como unha función e utilizala como a súa expresión analítica, e non como un mecanismo de "transformación en".

Categorías de resposta

__ Responden reconstruíndo a regra de Barrow
- __ F(x) correcta
  - __ f(x) ben
  - __ f(x) mal
  - __ non poñen f(x)
- __ F(x) sen a constante de integración
  - __ f(x) ben

__ f(x) mal
__ non poñen f(x)
__ F(x) incorrecta
__ f(x) acorde a ela
__ f(x) non acorde a ela
__ non poñen f(x)

__ Responden aplicando o teorema fundamental implicitamente
__ explicitamente
__ correctamente
__ con erros

__ Integran o segundo membro da igualdade

__ Intentos desenfocados

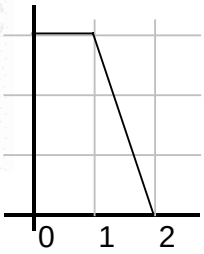
__ Sen resposta

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

4.3.- Sendo f a función do debuxo, definida no intervalo [0, 2].

a) ¿Existe $\int_0^2 f(x)dx$? Xustifica a resposta.

b) ¿Pódese calcula-la área entre a gráfica desa función e o eixo horizontal, nese mesmo intervalo, por fórmulas de figuras coñecidas? ¿Como?



Análise didáctica

Preséntase un punto anguloso de maneira que a función non sexa derivable no intervalo, e intentamos observar cómo o interpretan en termos de integrabilidade.

Unha resposta que esperamos é: "si existe a integral, pois a función é continua".

Aínda que poderiamos te-la resposta contraria: "non, pois non é continua", o que indicaría unha confusa concepción das ideas de continuidade e derivabilidade, así como unha asociación máis forte da que sería correcta entre continuidade e integración.

- Asociación que pode vir dada pola coincidencia de ámbalas dúas propiedades nas prácticas educativas, xa que se estudia que as funcións continuas son integrables, pero non se estudia o que sucede no caso de non ser continua.

- Pero tamén pode estar denotando o erro lóxico de valida-la proposición contraria ($\neg p \quad \neg q$) en lugar da contrarrecíproca ($\neg q \quad \neg p$).

A resposta consciente: "non existe integral pois non é derivable" poñería de manifesto a confusión entre os procesos de derivación e integración, que se lles presentan como inversos na introducción do tema.

O cadro xeométrico evidenciaría a existencia dunha área. Para incidir máis nisto último e despexar todo tipo de dúbidas, propónselles que pensen se é posible obte-la área por figuras coñecidas (ben trapecio, ben rectángulo e triángulo), o que supón unha afirmación implícita da súa existencia.

- A comparación das respostas ós apartados a) e b) mostraríano-lo grao de coherencia das súas concepcións, xa que a integral foi estudiada como unha área e resulta visualmente obvio que baixo esta gráfica se pecha unha área.

Categorías de resposta

__ Afirman que existe a integral
- __ área por rectángulos e triángulos
- __ non se pode
- __ sen resposta
- __ integran por subintervalos

Especifican:

non é cont.__	*non* é deriv. __
def. a trozos __	outros __
é cont.__	é deriv. __

__ Din que non existe a integral
- __ área por rectángulos e triángulos
- __ non se pode
- __ sen resposta
- __ integran por subintervalos

__ Non responden a a)
- __ área por rectángulos e triángulos
- __ non se pode
- __ sen resposta
- __ integran por subintervalos

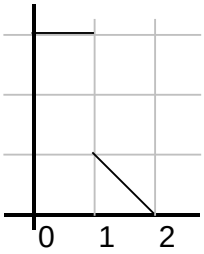
__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

4.4.- Sendo f a función do debuxo, definida no intervalo [0, 2].

a) ¿Existe $\int_0^2 f(x)dx$? Xustifica a resposta.

b) ¿Pódese calcula-la área entre a gráfica desa función e o eixo horizontal, nese mesmo intervalo, por fórmulas de figuras coñecidas? ¿Como?



Análise didáctica

Aumentando agora o nivel de dificultade, preséntase unha descontinuidade, perfectamente advertida.

"Non, pois non é continua", séguenos a parecer unha resposta posible, agora menos "grave" que a anterior, xa que o estudio da integración está habitualmente asociado á continuidade. Como comentabamos na cuestión anterior:

- A asociación que pode vir dada pola coincidencia de ámbalas dúas propiedades nas prácticas educativas, xa que se estudia que as funcións continuas son integrables, pero non se estudia o que sucede no caso de non seren continuas.
- Pero tamén pode estar denotando o erro lóxico de valida-la proposición contraria ($\neg p \quad \neg q$) en lugar da contrarrecíproca ($\neg q \quad \neg p$).

Igual ca no anterior, o cadro xeométrico evidenciaría a existencia dunha área, e a segunda pregunta confirmaríao implicitamente. Sen embargo agora o "recinto" non está pechado, o que esixe maior atención pero non aumenta a dificultade, xa que baixo a gráfica son perfectamente perceptibles as dúas rexións planas respectivas.

- E tamén agora a comparación das respostas ós respectivos apartados a) e b) mostraríano-las súas concepcións.

Categorías de resposta

__ Afirman que existe a integral
- __ área por rectángulos e triángulos
- __ non se pode
- __ sen resposta

Especifican:

non é cont.__	*non* é deriv. __
def. a trozos __ é cont.__	outros __ é deriv. __

__ integran por subintervalos

__ Din que non existe a integral
- __ área por rectángulos e triángulos
- __ non se pode
- __ sen resposta
- __ integran por subintervalos

__ Non responden a a)
- __ área por rectángulos e triángulos
- __ non se pode
- __ sen resposta
- __ integran por subintervalos

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

4.13.- O teorema fundamental do cálculo integral afirma que se f é unha función continua nun intervalo [a, b], a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é unha primitiva de f no dito intervalo.

Sexa *c* un punto entre *a* e *b*, definimos $G(x) = \int_c^x f(t)dt$ $\forall x \in$ [c, b] , ¿que relación ten con *F(x)* ? ¿Que representan ou expresan *F(x)* e *G(x)* ?

Análise didáctica

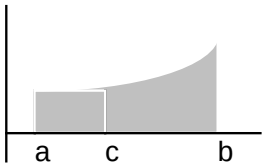
Aínda coñecendo con exactitude o enunciado do teorema fundamental e utilizando habitualmente a propiedade aditiva da integración, non está clara a capacidade para pensar noutras funcións primitivas baixo o prisma directo da integral, sen recorrer a unha expresión alxébrico-analítica da función primitiva "matriz", entendendo por esta a que se refire ó intervalo que explicitamente se menciona nos enunciados:

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é unha primitiva de f no intervalo [a, b]

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt$$

Unha vez máis o cadro xeométrico pode resultar clarificador:

$G(x) = \int_c^x f(t)dt$ é tamén unha primitiva de *f*, agora no intervalo [*c,b*]. Pero respecto de *F(x)*, habería xa un valor previo acumulado: $\int_a^c f(t)dt$, do que *G* "non se ocupa".



O enunciado debera suxerir que se trata doutra primitiva, xa que se emprega dito termo e a expresión de *G* é moi parecida á de *F*. Unha afirmación neste sentido que non vaia seguida de alomenos unha indagación, podería estar indicándonos que a súa concepción da aditividade limítase a intervalos preestablecidos, carecendo da versatilidade necesaria como para aplicala en situacións xerais de variación que son, esencialmente, das que se ocupa o cálculo.

Categorías de resposta

__ Responden que se trata doutra función primitiva

__ Escribe expresamente $F(x) = G(x) + \int_a^c f(t)dt$

__ F(x) e G(x) as áreas respectivas (ou outra magnitude)
__ Soamente indican para F(x)
__ Outras

__ Explican que se diferencian nunha constante, sen concretala
__ F(x) e G(x) as áreas respectivas (ou outra magnitude)
__ Soamente indican para F(x)
__ Outras

__ Non precisan máis
__ F(x) e G(x) as áreas respectivas (ou outra magnitude)
__ Soamente indican para F(x)
__ Outras

__ G(x) = F(x) no intervalo [c, b]

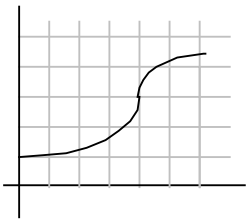
__ Non mencionan que *G* é tamén unha primitiva de f no intervalo [c, b] e responden que representan as áreas respectivas.

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

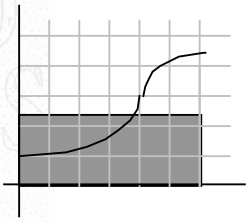
4.15.- Escribe o enunciado do Teorema do Valor Medio do cálculo integral.

¿En que punto alcanza o valor medio a función do debuxo? Xustifica a resposta.



Análise didáctica

Unha vez comprobado se recordan ou non o enunciado, tratamos de comprobar se a representación mental que poidan pusuír del lles permite facer unha avaliación gráfica da situación, simplemente por compensación de áreas.



En coherencia coas prácticas educativas que identifican integrais e áreas, debera esperarse que intenten responder á segunda cuestión situándose no cadro xeométrico, tanto máis canto o propio enunciado proporciona un gráfico e unha trama que insinúan a posibilidade de estimar áreas de recintos sobre o debuxo.

Categorías de resposta

__ Enunciado correcto (formal ou intuitivo, para continuas ou sen especificar)
- __ Buscan o punto
  - __ compensando áreas
  - __ inténtano con algunha fórmula
  - __ outros
- __ Non continúan

__ Enunciado erróneo ou sen enunciado
- __ Calculan a altura media
- __ Buscan a compensación das áreas

__ TVM do cálculo diferencial (correcto ou erróneo)

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

Cuestións relativas á comprensión global

Ó obxecto de poder coñecer se o alumno posuía unha idea global do tema do Cálculo Integral, e en qué consistía, decidimos sondear esta cuestión formulándolles unhas breves preguntas elixidas entre as que seguen:

5.0.- ¿Que significa para ti que unha función sexa integrable nun intervalo?

Categorías de resposta

__ Aluden ó proceso de aproximación mediante sumas (explicitando límite, sup/inf)

__ Refírense explicitamente á área (que a hai, que a pecha ou que se pode calcular)
- __ Unicamente se refiren á área
- __ Continua
- __ Derivable
- __ Continua e derivable
- __ Definida ou que existe
- __ Que ten primitiva
- __ Continua e primitiva
- __ Descontinua nun número finito de puntos

__ Refírense a que sexa integrable en cada punto, podendo ademais indicar:
- __ Continua
- __ Derivable
- __ Continua e derivable

__ Que teña primitiva, explícita ou implicitamente
- __ Sen máis condicións
- __ Continua __ Derivable __ Cont. e deriv.

__ Dan outras características posibles
- __ Continua
- __ Derivable
- __ Continua e derivable
- __ Existe e é derivable
- __ Está definida
- __ Definida e continua

__ Acoutada

__ Integrable nos extremos

__ Intentos desenfocados ou expresión redundante

__ Sen resposta

5.1.- Define $\int_a^b f$.

Categorías de resposta

__ Aluden ó proceso de aproximación mediante sumas (explicitando límite, sup/inf)

__ Área e Barrow

__ Área (__ indicando outras aplicacións)
- __ Continua
- __ Derivable
- __ Continua e derivable
- __ Outros

__ Barrow
- __ Continua
- __ Derivable
- __ Continua e derivable
- __ Outros

__ Área e primitiva

__ Primitiva
- __ Continua
- __ Derivable
- __ Continua e derivable
- __ Outros

__ Intentos desenfocados ou expresión redundante

__ Sen resposta

5.2.- ¿Qué características debe ter un problema para que poida resolverse por integración?

Categorías de resposta

__ Aluden ó calculo dunha magnitude, coñecida unha "densidade" ou "taxa de variación" ou unha derivada

__ Refírense explicitamente á área (que a hai, que a pecha ou que se pode calcular)
- __ Unicamente se refiren á área
- __ Continua (__ número finito de descontinuidades)
- __ Derivable
- __ Continua e derivable
- __ Definida ou que existe
- __ Que ten primitiva
- __ Continua e primitiva

__ Refírense a que haxa integrable en cada punto, podendo ademais indicar:
- __ Continua __ Derivable __ Continua e derivable

__ Que teña primitiva, explícita ou implicitamente
- __ Sen máis condicións
- __ Continua __ Derivable __ Cont. e deriv.

__ Dan outras características posibles duna hipotética función
- __ Continua (__ número finito de descontinuidades)
- __ Derivable
- __ Continua e derivable
- __ Existe e é derivable
- __ Está definida
- __ Definida e continua
- __ Acoutada

__ Intentos desenfocados ou expresión redundante

__ Sen resposta

5.3.- ¿Qué tipo de problemas se poden resolver por integración?

Categorías de resposta

__ Derivación, variación de magnitudes, ecuacións diferenciais

__ Medida

__ Refírense explicitamente á área (que a hai, que a pecha ou que se pode calcular)
- __ Unicamente se refiren á área
- __ Movemento (e, v, a, t)

__ Traballo, enerxía
__ Estatística/Probabilidade
__ Movemento e traballo
__ Movemento e probabilidade
__ Volume
__ Volumes e problemas de física
__ Derivadas

__ Refírense a que haxa integrable

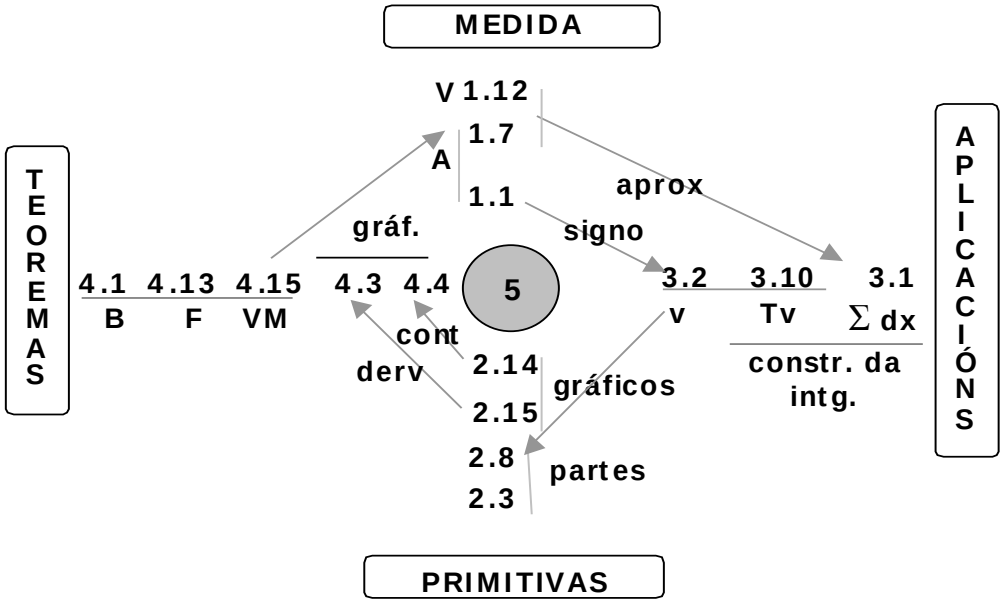
__ Sen menciona-las áreas
__ Movemento

__ Intentos desenfocados ou expresión redundante

__ Sen resposta

4.3.- Estructura interna do instrumento principal

O seguinte mapa móstranos as relacións que establecemos entre eses 15 problemas seleccionados. Nel, o primeiro díxito de cada cuestión indica a categoría epistemolóxica principal á cal asociámo-lo problema (aínda que frecuentemente comparten riscos de varias das categorías), que figura indicada no rótulo correspondente, e o segundo díxito o número de orde dentro dos que agrupamos nesa mesma categoría, con función unicamente identificativa.



B - regra de Barrow	V – volume	v – velocidade
F – teorema fundamental	A - área	Tv – taxa de variación
VM – teorema do valor medio		

i) A cuestión do signo da área/integral do problema 1.1 explícase mutuamente co resultado nulo no percorrido do problema 3.2: un recinto plano que ten unha extensión perceptible, e un movemento de ida e volta..

ii) Os exercicios 1.7 (área) e 1.12 (volume) trataban expresamente a idea da aproximación, que estaba implícita na cuestión 3.1 (traballo físico).

iii) Os problemas 4.3 e 4.4 preséntase dende o cadro xeométrico, igual que o 2.14 e o 2.15, para discuti-la existencia de integral definida, nos primeiros, e primitiva, nos segundos.
   - No 4.3 e no 2.15 tratábase a non derivabilidade nun punto.
   - No 4.4 e no 2.14 a descontinuidade nun punto.

iv) O 2.3 e o 2.8 acometen a integración por partes: nun primeiro caso como relación que se utiliza para obter un resultado, proporcionando as expresións usuais do método, e no segundo como un resultado *per se*, un cálculo de primitivas.

v) Nos ítems 3.2 e 2.8 preséntanse explicitamente integrais, definida e indefinida, respectivamente.

vi) O 3.1 e 3.10 sitúanos na tesitura de ter que construí-la integral, ben como suma de elementos diferenciais, ben como inversión do cálculo dunha taxa de variación instantánea.

vii) O problema 4.15 relaciónase directamente co 1.7 no sentido de que pode proporcionar un método para obter unha aproximación á área a través dun valor medio estimado. Analogamente sucedería no 1.12, pero neste caso esixiría unha visión xeral da problemática, máis alá das áreas.

viii) As cuestións 4.1 e 4.15 requiren un coñecemento teórico expreso (regra de Barrow ou th. fundamental, teorema fundamental e teorema do valor medio,

respectivamente), e suxiren reinterpretacións dos mesmos: analítica no primeiro caso e xeométrica no segundo.

ix) O problema 4.13 proporciona o eneunciado do teorema fundamental para indagar acerca da propiedade aditiva da integral, tanto analítica como xeometricamente.

x) Finalmente, o centro estaría ocupado polas preguntas sobre a percepción global, que denotamos como categoría 5: 5.0, 5.1, 5.2 e 5.3.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

4.4.- Cuestionarios centrais

A necesidade de limita-lo número de preguntas formuladas, tanto porque está suficientemente acreditado que o cansazo inflúe no rendemento, como porque nos horarios habituais dos institutos os períodos lectivos son de 50 minutos, levounos a combina-las cuestións propostas en grupos de 8 exercicios, destinando 5 minutos a cada un, o que nos deixaba aínda uns minutos iniciais para facer a presentación.

Cada problema figuraría nunha folla e os alumnos eran advertidos de que non volvesen atrás, porque desexabamos que as preguntas fosen respondidas coa maior independencia posible, e vixiabamos esta cuestión que tiña realmente importancia. De feito, a orde dentro de cada cuestionario obedecía a evitar no posible que unhas preguntas suxerisen cómo enfoca-las respostas a outras.

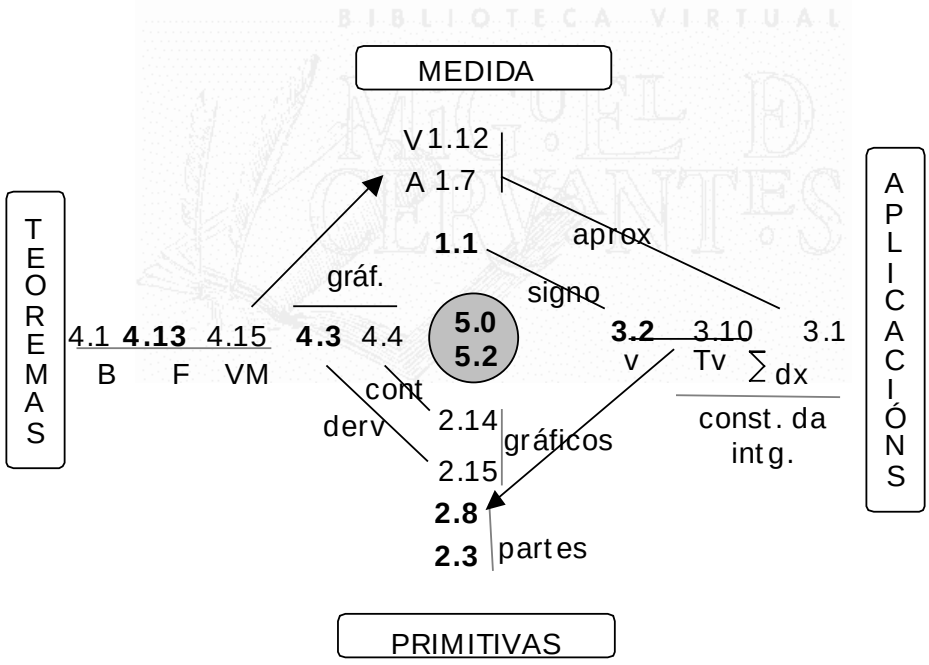
Desta maneira elaboramos tres cuestionarios distintos, pero con varios problemas en común, repetindo aqueles que nos parecían máis pertinentes, con lixeiras variacións na orde en que se propoñían. Con isto disuadiámolos de copiaren, aínda que por mante-lo clima de cooperación permitíamos bisbar un pouco disimuladamente. En todo caso os resultados nun clima máis estricto, se nel fose posible o compromiso

sincero dos estudiantes, tenderían a empeorar, confirmando aínda máis o realismo das nosas preocupacións, se fose o caso.

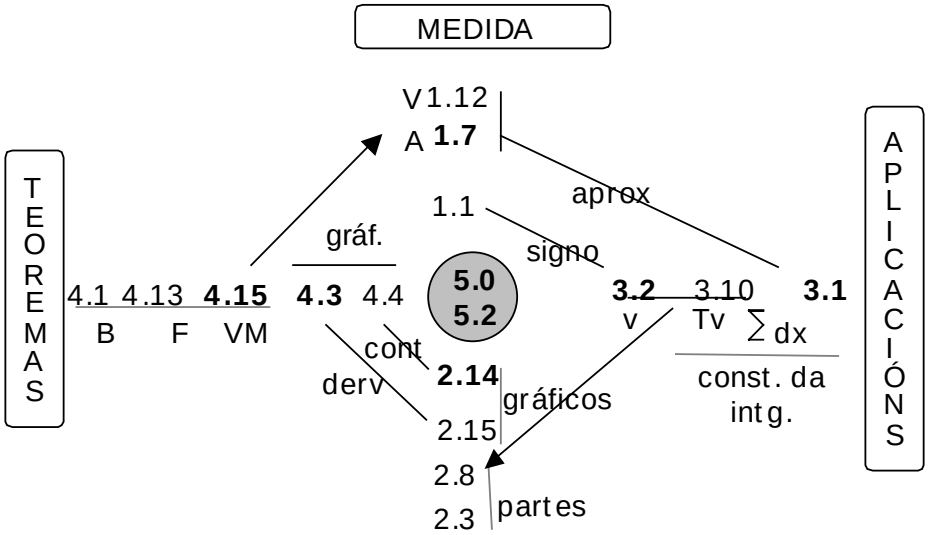
Cun criterio de compensación, pero sempre na idea de que eran tódalas cuestións en conxunto as que nos propoñiamos estudiar, establecémo-los tres cuestionarios definitivos de maneira que gardasen un equilibrio interno:

(En negra figuran os problemas que configuraban cada un dos cuestionarios)

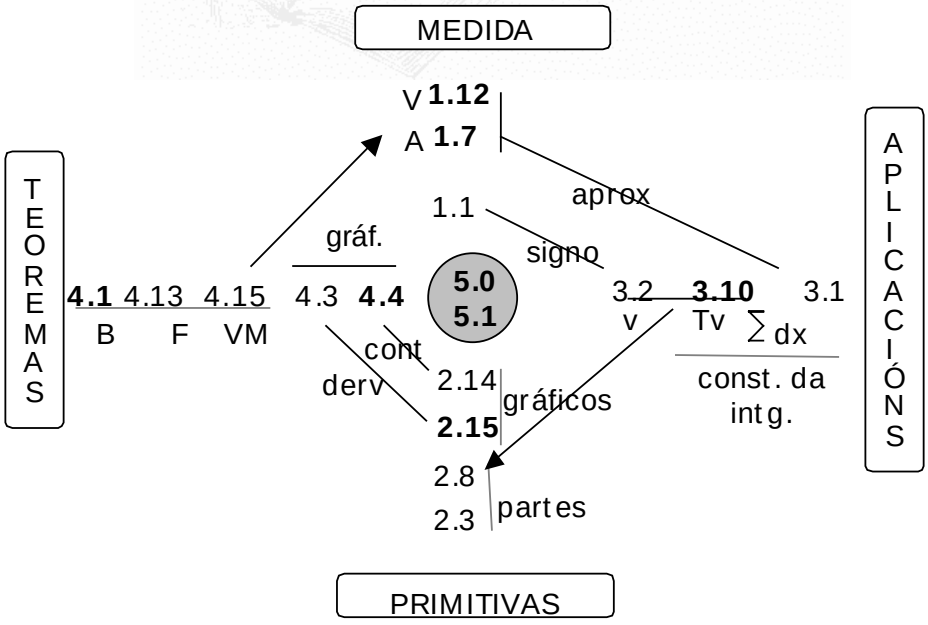
CUESTIONARIO **A**



CUESTIONARIO **B**



CUESTIONARIO **C**



En cada cuestión preguntariámoslle ó resolutor *se comprendía ou cría comprende-lo enunciado* e, tamén, *se se trababa dun tipo de problema novo para el* ou, alomenos, se era así como o percibía. En última instancia, servirianos para comprobar se

o estudiante que non respondía ó problema, chegara ou non a le-lo enunciado. Mostramos cun exemplo o formato definitivo que adquiriron:

3.2.- (Recorda que a velocidade é a derivada do espacio respecto do tempo). Un ciclista desprázase a unha velocidade v(t) = 20 - 10t .

Calcula $\int_0^4 v(t)\,dt$. Describe e xustifica brevemente cómo foi o percorrido do ciclista.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

CONSIDERACIÓNS SOBRE O PROBLEMA:

	SI ou NON
CREO ENTENDE-LO ENUNCIADO	
É UN TIPO DE PROBLEMA NOVO PARA MIN	

4.5.- Cuestionarios de reforzo

As valoracións provisionais dos resultados que iamos obtendo leváronnos á decisión de presentar tamén outras cuestións máis específicas, dirixidas a indagar sobre algúns aspectos puntuais ou dúbidas que nos ían xurdíndo.

Consideramos apropiado facelo elixindo submostras cunhas características convenientes. Concretamente isto traduciuse no estudio con alumnado de 1º Físicas e da licenciatura de Matemáticas, porque maioritariamente terían alto rendemento en

ámbalas dúas disciplinas, o que os situaría nunha posición de vantaxe respecto das cuestións que estábamos manexando.

Aprovéitase tamén para sondear sobre algúns aspectos metodolóxicos da instrucción recibida na súa formación académica en secundaria.

Cos estudiantes de 1º Físicas

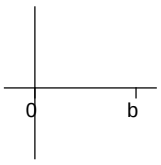
Pasáronselle-los cuestionarios comúns ó primeiro do curso, á primeira hora, de maneira que non ía haber interferencia coas aprendizaxes do mundo universitario, que estaban aínda por vir. Unha vez corrixidos, á semana seguinte volvimos cos cuestionarios complementarios cos que pretendiamos ampliar información sobre algunhas das cuestións xa presentadas.

Expoñemos a seguir os respectivos cuestionarios de reforzo indicando a relación dos novos exercicios cos anteriores: o dobre número inicial correspóndese á notación da batería xeral de problemas, e a letra R indica que se trata dun reforzo, precisando cun número á dereita no caso de haber varios complementos para unha mesma cuestión.

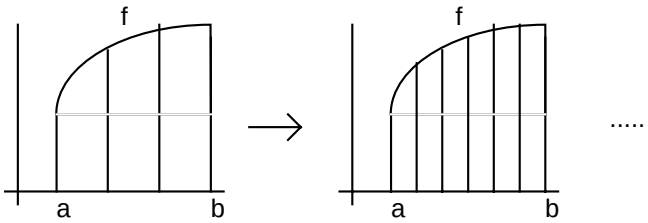
CUESTIONARIO A

1.1 R-2.- Debuxa, a grandes riscos, unha función á que corresponda área nula baixo a súa gráfica no intervalo [0, b].

Xustifícao brevemente.



1.7 R.- Habitualmente en C.O.U. e 2º de bacharelato dáse unha explicación sobre o concepto de integral definida baseándose en aproximar unha área baixo unha curva mediante rectángulos, cada vez máis "finos"; do estilo que se mostra na figura.



a) ¿Recordas se foi máis ou menos así no teu caso? _____ (si ou non)
De non ser así, ¿poderíasnos indicar brevemente cómo foi?

b) Ademais da explicación do profesor/a, ¿tivestes que realizar algún problema concreto onde iades calculando e sumando as áreas dos rectángulos? _____ .

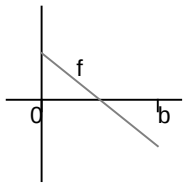
2.8 R.- Frecuentemente $x\cos x\,dx$ resólvese por partes; ¿por que cres que se fai así, e non directamente?

4.4 – 4.8 R.- Referíndonos sempre a un intervalo [a, b], admitindo como certo que "se *f* é unha función continua, entón ten primitivas", ¿cales das seguintes afirmacións considerarías tamén válidas?:

_____ "hai funcións continuas que non teñen primitivas"
_____ "se *f* é unha función que non ten primitivas, *f* non é continua"
_____ "se *f* é unha función que ten primitivas, *f* é continua"
_____ "se *f* non é continua, entón non ten primitivas"

CUESTIONARIO B

1.1 R-1.- ¿Canto vale a área correspondente á función **f**, entre a súa gráfica e o eixo horizontal, no intervalo [0, b] ?
Xustificao brevemente.



3.1 R.- Habitualmente, nos libros de texto de Física de C.O.U. e 2º de bacharelato o traballo físico realizado ó desprazar un corpo entre dous puntos A e B, exprésase mediante unha integral do estilo desta: $\int_A^B \overline{F}\cdot\overline{de}$, onde "*F*" representa a forza e "*e*" o espacio.

Se a forza se aplica na dirección do movemento, entón sería: $\int_A^B F \cdot de$.

¿Recordas se foi máis ou menos así no teu caso? _____ .

3.9 R.- Nun laboratorio estase a facer un cultivo de bacterias nun medio agresivo; estas están reproducíndose aleatoriamente de xeito case continuo.

Experimentalmente estableceuse que a taxa de crecemento nun instante determinado vén dada pola fórmula $f(t) = 2t$, onde t é o tempo en días transcorrido dende o inicio do experimento, e $f(t)$ expresa bacterias/día.

A función que expresa a cantidade de bacterias do cultivo segundo o tempo é unha primitiva de f.

¿Que cantidade de bacterias teriámo-lo décimo día, se ó inicia-lo experimento había 370?

ANÁLISE DOS PROBLEMAS E CATEGORÍAS DE RESPOSTA

Enunciamos en primeiro lugar o problema orixinal, engadindo unhas notas recordatorias sobre a intencionalidade dos investigadores; logo continuamos co reforzo, que analizamos someramente (xa que moito do que poderiamos dicir figura xa na análise didáctica do problema orixinal que o suscita), para a continuación enumera-las categorías de resposta asociadas.

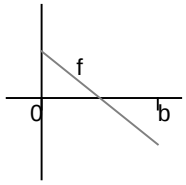
1.1.- Calcula a área comprendida entre a gráfica da curva *f(x) = cos x* e o eixo horizontal no intervalo $[0, \pi]$. Interpreta o resultado graficamente.

Unha das intencións era poder apreciar se os estudiantes diferencian entre área nula e integral nula.

Neste problema tiñan que debuxa-la gráfica, o cal estaba sendo fonte de erros que logo interferían co obxectivo que nos tiñamos proposto.

1.1 R-1.- ¿Canto vale a área correspondente á función **f**, entre a súa gráfica e o eixo horizontal, no intervalo [0, b] ?

Xustificao brevemente.



A pesar de que unha das advertencias máis repetidas nas aulas é a de considera-lo valor absoluto da integral cando a área está "por debaixo" e de que, esencialmente, toda a problemática estudiada do cálculo de áreas céntrase precisamente na determinación das sub-rexións, apreciabamos bastante confusión entre os dous conceptos: área e integral.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DELIBES

Categorías de resposta

__ Responden correctamente
- __ Indican o signo da integral
- __ Fan o dobre da integral relativa ó primeiro subintervalo
- __ Suman os triángulos sen aludir á integral

__ Aluden ó signo pero toman o valor absoluto da integral en todo o intevalo

__ Integran no intervalo

__ Suma das integrais nos dous subintervalos

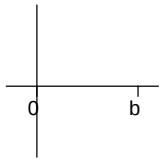
__ Explican que $A = 0$ por haber tanta baixo o eixe como sobre del

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

1.1 R-2.- Debuxa, a grandes riscos, unha función á que corresponda área nula baixo a súa gráfica no intervalo [0, b].

Xustificao brevemente.



Tentábamos profundar agora sobre a percepción que os estudiantes puidesen ter dunha "rexión" plana de área nula; quizais houbese tamén aquí unha carencia importante, unha falla duna representación mental axeitada.

Categorías de resposta

__ Ben debuxada
  __ Indicando $y = 0$ ou $f(x) = 0$
  __ Indican erroneamente $x = 0$
  __ Debuxada sobre o eixo vertical

__ Fai marcas "indecisas" sobre o eixo horizontal

__ Compara rexións atribuíndolles signos opostos

__ Debuxan funcións "irregulares" no intervalo
  __ Sen definir en algún/s punto/s
  __ Con descontinuidades

__ Non debuxa e aclara que non se pode

__ Debuxa unha función constante distinta de $y = 0$

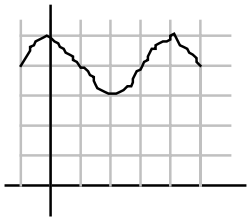
__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

1.7.- ¿Como calcularías, coa maior aproximación que che sexa posible, a área baixo a curva do debuxo, da que descoñecémo-la fórmula?.

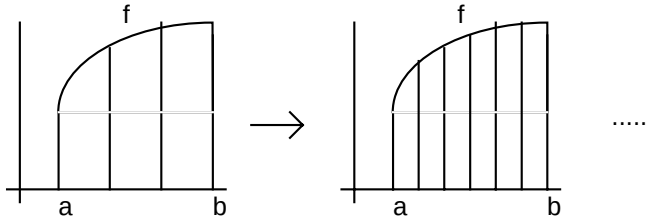
Xustifica a resposta e realiza o cálculo que propós.



O problema respondía explícitamente á introducción ortodoxa da integral: determinar unha área baixo unha gráfica. Sen embargo a penas había iniciativas de aproximación por rectángulos.

Era necesario coñecer se ese recordo permanecía, e saber algo máis acerca de cómo se relacionaron con esta situación, ata qué punto foron involucrados nela.

1.7 R.- Habitualmente en C.O.U. e 2º de bacharelato dáse unha explicación sobre o concepto de integral definida baseándose en aproximar unha área baixo unha curva mediante rectángulos, cada vez máis "finos"; do estilo que se mostra na figura.



a) ¿Recordas se foi máis ou menos así no teu caso? _____ (si ou non)
De non ser así, ¿poderíasnos indicar brevemente cómo foi?

b) Ademais da explicación do profesor/a, ¿tivestes que realizar algún problema concreto onde iades calculando e sumando as áreas dos rectángulos? _____ .

2.8.- Calcula $x\cos x\,dx$ **.**

Neste problema, ademais de valorar se manexan e recordan a integración por partes, pretendiamos coñece-los aspectos metagnotivos que aplicaban nela.

Moitas respostas non aclaraban nada sobre os motivos que as guiaron, e outras veces deixábannos dúbidas ó respecto.

2.8 R.- Frecuentemente $x\cos x\,dx$ resólvese por partes; ¿por que cres que se fai así, e non directamente?

Agora podíase poñer de manifesto se as execucións eran puramente mecánicas (correctas ou non), ou se obedecían a unha necesidade consciente de tranforma-la función que se ía integrar noutra/s que non representasen tanta dificultade.

Categorías de resposta

__ Indican expresamente a necesidade de transformala en integrais directas

__ Simplemente responden que por non ser directa (redundante coa pregunta)

__ Non se pode facer doutra maneira

__ É máis fácil

__ Porque non aparece a derivada dunha función ($f'(x)\cdot f(x)$)

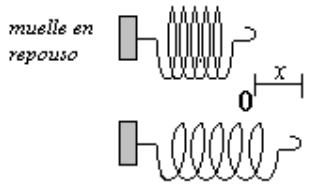
__ Porque hai dúas funcións

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

3.1.- O traballo físico *T* realizado ó desprazar un corpo por unha forza constante *F*, que actúa na dirección do movemento, vén dado pola fórmula: $T = F \cdot e$, onde "*e*" é o espacio percorrido.

Pero a forza *F* que exerce un resorte elástico varía proporcionalmente á estirada *x*. No noso caso, segundo a fórmula $F(x) = \frac{1}{2}x$, onde $\frac{1}{2}$ é unha constante característica do resorte que se utiliza.



¿Como calcularía-lo traballo físico realizado polo resorte se foi alongado 5 cm, cando volta á posición inicial? Xustifica a resposta.

A pesar de que a fórmula $T = F\cdot e$ era ordinariamente coñecida por todos, e que o cambio esencial na física de COU e 2º de bacharelato consiste precisamente no tratamento das magnitudes mediante a integración (de feito xa en 3º BUP/1º bacharelato se comeza a producir), moi poucos estudiantes establecía este tipo de vínculo. Era necesario saber se ese recordo permanecía.

3.1 R.- Habitualmente nos libros de texto de Física o traballo físico realizado ó desprazar un corpo entre dous puntos A e B, exprésase mediante unha integral do estilo desta: $\int_A^B \overline{F} \cdot \overline{de}$, onde "*F*" representa a forza e "*e*" o espacio.

Se a forza se aplica na dirección do movemento, entón podería porse como: $\int_A^B F \cdot de$.

¿Recordas se foi máis ou menos así no teu caso? _____ .

3.9.- Nun laboratorio estase a facer un cultivo de bacterias nun medio agresivo; estas están reproducíndose aleatoriamente de xeito case continuo.

Experimentalmente estableceuse que a taxa de crecemento nun instante determinado vén dada pola fórmula $f(t) = 200 \cdot e^{0'1t}$, onde t é o tempo en días transcorrido dende o inicio do experimento, e *f(t)* expresa bacterias/día.

¿Que poboación aproximada podemos esperar para o décimo día, se ó inicia-lo experimento había 370 bacterias? (Toma *e ≈2´7*).

A pesar de que a taxa de variación instantánea se vincula á derivada, e de que o cálculo de primitivas se prodiga para a obtención de funcións primitivas a partir das súas derivadas, o problema parecía ter unha gran dificultade.

Decidimos simplifica-la fórmula radicalmente por se aquela estivese engadindo maiores dificultades ó problema, e tamén aludir expresamente á primitiva no enunciado.

3.9 R.- Nun laboratorio estase a facer un cultivo de bacterias nun medio agresivo; estas están reproducíndose aleatoriamente de xeito case continuo.

Experimentalmente estableceuse que a taxa de crecemento nun instante determinado vén dada pola fórmula $f(t) = 2t$, onde t é o tempo en días transcorrido dende o inicio do experimento, e $f(t)$ expresa bacterias/día.

A función que expresa a cantidade de bacterias do cultivo segundo o tempo é unha primitiva de f.

¿Que cantidade de bacterias teriámo-lo décimo día, se ó inicia-lo experimento había 370?

Categorías de resposta

__ Ben resolto
- __ Usan a integral definida e suman 370
- __ Usan a indefinida e determinan a constante en F(0)
- __ Non hai referencia á constante, e logo suman 370

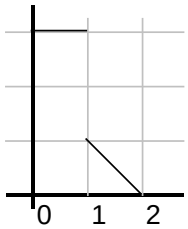
__ Toman o intervalo [1,10]
- __ Integral definida
- __ Integral indefinida

__ Traballan coa integral pero sen criterio perceptible
__ Toman *f(t)* como a función poboación

__ Intentos desenfocados

__ Sen resposta

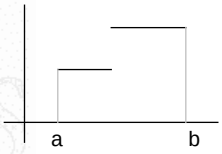
4.4.- Sendo f a función do debuxo, definida no intervalo [0, 2].



a) ¿Existe $\int_0^2 f(x)dx$? Xustifica a resposta.

b) ¿Pódese calcula-la área entre a gráfica desa función e o eixo horizontal, nese intervalo, por fórmulas de figuras coñecidas?

4.8.- Debuxa, se existe, unha primitiva de f no intervalo que se sinala no gráfico.



Nas respostas a estes problemas a descontinuidade presentábase como unha negativa decisoria á existencia de integral.

Na práctica escolar estúdianse funcións descontinuas e calcúlanse límites laterais e asíntotas verticais no seu caso, pero a penas se fan referencias a isto cando se estudia o tema da integración.

Pero mentres que o requisito de ser continua lles garante a integral, os alumnos parece que asumen tamén como correcta a situación recíproca, non diferenciando "ser suficiente" de "ser necesario".

4.4 – 4.8 R.- Referíndonos sempre a un intervalo [a, b], admitindo como certo que "se f é unha función continua, entón ten primitivas", ¿cales das seguintes afirmacións considerarías tamén válidas?:

_____ "hai funcións continuas que non teñen primitivas"
_____ "se f é unha función que non ten primitivas, f non é continua"
_____ "se f é unha función que ten primitivas, f é continua"
_____ "se f non é continua, entón non ten primitivas"

Formúlanse entón a negación e as proposicións contrarrecíproca, recíproca, e contraria, para observa-las relacións lóxicas que os estudiantes establecen entre elas.

Categorías de resposta

__ Ben as catro

__ Admitindo correctamente a contrarrecíproca e non a recíproca
- __ Admiten a negación
- __ Admiten a contraria
- __ Admiten a negación e a contraria

__ Admitindo a contrarrecíproca, pero tamén a recíproca
- __ Admiten a negación
- __ Admiten a contraria
- __ Admiten a negación e a contraria

__ Non admitindo a contrarrecíproca e si a recíproca
- __ Admiten a negación
- __ Admiten a contraria
- __ Admiten a negación e a contraria

__ Non admitindo a contrarecíproca nin a recíproca
- __ Admiten a negación
- __ Admiten a contraria
- __ Admiten a negación e a contraria

__ Intentos desenfocados

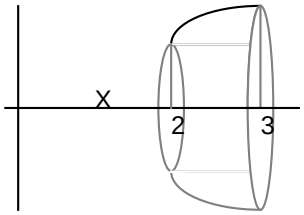
__ Sen resposta

Cos estudiantes da licenciatura de Matemáticas

Os cuestionarios comúns pasáronselles na clase de Didáctica da Matemática en Secundaria, a comezos do 2º cuadrimestre. Despois, durante catro sesións de aula fóronse discutindo un a un os problemas que os conformaban.

Así, esta posterior cuestión de reforzo viña referenciada pola reflexión conxunta alumnos-profesor acerca do problema 1.12, do cal recordámo-lo enunciado:

1.12.- O corpo da figura obtívose ó xirar en torno ó eixo X o tramo da curva $y = 6x - x^2$ entre os puntos de abscisas 2 e 3.



Explica algunha idea sobre cómo nos poderiamos aproximar ó seu volume.

Se podes, calcúlao con exactitude, e xustifica o método que segues.

A idea esencial que se pretendía con el era a de recreación do proceso de integración *particionando* o corpo en "cilindros diferenciais".

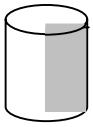
Unha vez discutido isto durante a clase, témo-la dúbida de se ó ir facendo cada vez máis finas as particións, a súa intuición os levará a asumir, erroneamente, que os elementos diferenciais de volume son superficies circulares, no sentido dos indivisibles de Cavalieri, ou se manterán na idea de que os elementos diferencias de volume son á súa vez volumes, idea que se coñece na literatura especializada como "homoxeneidade das magnitudes" (Scheneider-Gilot, M., 1988).

Por outra parte queriamos tamén coñece-lo grao de significatividade que os estudiantes lle atribúen ó termo *dx* baixo unha expresión integral común.

CUESTIÓN :

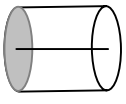
1.12R.- Nunha clase de COU, en pleno estudio do cálculo integral, propúxoselles ós alumnos que obtivesen a fórmula do volume dun cilindro, sen darlles ningunha orientación previa.

Uns estudiantes optaron por empregar como "elementos infinitesimais" as seccións rectangulares obtidas ó corta-lo cilindro lonxitudinalmente segundo a altura:



$$\int_0^{2\pi r} h \cdot r \cdot dx$$

Outros empregaron como "elementos infinitesimais" as seccións circulares obtidas ó cortar o cilindro transversalmente á altura:

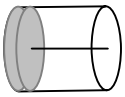


$$\int_0^{h} \pi r^2 \cdot dx$$

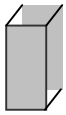
Completa o cálculo por ámbolosdous métodos, e comenta a actividade xustificando as túas apreciacións.

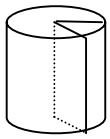
Análise do problema

Efectivamente a significación do termo *dx* fai que o segundo grupo, aínda partindo dunha intuición errada, obteña o resultado correcto, pois $\pi r^2 \cdot dx$ expresa o volume dun cilindro diferencial de base *r* e altura *dx*.

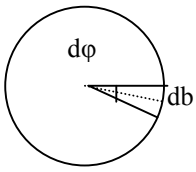


No primeiro grupo, $hr \cdot dx$ expresa o volume dun ortoedro diferencial de grosor *dx*; mentres que seguindo o sentido de xiro os elementos diferencias deberan ser "cuñas".





- Neste caso o correcto sería empregar como variable o ángulo de xiro:



$$db = d\varphi \cdot r \rightarrow dB = \frac{db \cdot r}{2} = \frac{r^2}{2} \cdot d\varphi$$

$$dV = h \cdot dB = \frac{r^2 h}{2} \cdot d\varphi \rightarrow V = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 h}{2} \cdot d\varphi$$

Unha circunstancia que semella ser esencial é que o problema dá lugar, mediante cálculos triviais, a unha contradicción, o que obriga a buscar unha explicación que, incluso, pode traer consigo que algúns estudiantes superen o obstáculo epistemolóxico nese mesmo momento, máxime cando este problema formaba parte do exame da materia.

Categorías de resposta

__ Os dous grupos de alumnos cometen o mesmo erro: os elementos diferencias de volume non son superficies, senón volumes.

__ O 1º grupo está errado (dando suxerencias relevantes):
- __ Están calculando o volume dun paralepípedo de $2\pi r$ de longo
  - __ Propoñen a alternativa correcta
  - __ Propoñen unha alternativa errada
  - __ Non propoñen alternativa
- __ A partición do cilindro debera ser en "cuñas"
  - __ Desenvolven a alternativa
  - __ Non desenvolven a alternativa
- __ Con ortoedros non se "enche" o cilindro (sen propoñer alternativa)

__ O 1º grupo está errado (sen suxerencias relevantes)

__ No primeiro grupo *dx* é curvo, mentres que no segundo é recto
__ Hai dúas circunferencias, por iso sae o dobre
__ Conta o eixo dúas veces
__ Outras explicacións erradas

__ Os dous son correctos: non se percata da diferencia dos resultados

__ O 1º é o correcto: erro no recordo da fórmula

__ Explicación redundante, sen aportación; ou sen explicación

__ Sen resposta

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Capítulo 5

Resultados da investigación

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

5.0.- Introducción

En primeiro lugar expoñeremos cómo se organizou a análise de datos, en función dos diferentes colectivos mostrais que analizamos.

A continuación faremos unhas indicacións acerca das incidencias na recollida de datos, para seguir cun test comparativo do colectivo mostral de referencia co colectivo mostral xenuinamente propio do nivel formativo que se estudiaba nesta investigación.

Logo virá a exposición e valoración de resultados, precedida por unha reflexión acerca dos criterios avaliación que consideramos pertinentes utilizar.

Para cada unha das cuestións que figuraban, tanto no instrumentro principal como nos de reforzo, presentaremos:

- Unha táboa de resultados e un gráfico de sectores referido ó colectivo que se elixiu como referencia.
- Unha táboa resumo comparativa dos colectivos mostrais implicados (ata a cuestión 5.0 os catro, e a partir de aí indícase en cada caso).
- As correspondentes valoracións, primeiro as relativas ó colectivo de referencia e, comparando con elas, as dos outros colectivos, complementando os datos recollidos a través de cuestionarios escritos coas achegas das entrevistas e do traballo de aula. Nos problemas 3.1 e 3.2 engadiremos tamén unhas notas sobre as respostas dadas por un grupo de licenciados en matemáticas.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

5.1.- Estructuración da mostra

Indicámo-la composición dos colectivos mostrais así como con qué tipo de instrumentos se recolleron os seus datos:

i) Grupo de referencia: estudiantes de "ciencias" de 1º curso de carreira.
   - Cuestionarios establecidos.
   - Cuestionario de reforzo nunha submostra.

   Formado por estudiantes de catro grupos de 1º curso de Físicas, Farmacia (dous grupos) e Maxisterio, procedentes de tódolos puntos de Galicia que cursaran o ano anterior COU ou 2º de bacharelato pola opción de ciencias.

   A proba con eles realizábase os primeiros días do curso, de maneira que "academicamente" a súa formación se correspondera coa dos estudiantes de COU ou 2º de bacharelato.

   O tempo transcorrido era un parámetro que nos interesaría contemplar, xa que favorecería mellor a observación sobre *a pegada* que a instrucción recibida deixaba neles (téñase en conta que nos estariamos a referir a estudiantes que accederan á universidade: aprobar todo COU-2º Bach. e supera-la selectividade).

ii) Grupo de contraste sobre conceptualizacións inmediatas ó período de instrucción: alumnos de COU e 2º de bacharelato, opción de "ciencias".

- Cuestionarios establecidos.
- Entrevistas individuais e colectivas.
- Traballo de aula cun grupo (3 sesións).

Formado por alumnos de tres grupos de COU e un de 2º de bacharelato de tres institutos de Santiago de Compostela: Xelmírez I (dous grupos), Xelmírez II e Pontepedriña (diferentes ós dous institutos anteriores que colaboraran na análise dos problemas, de maneira que o profesorado non coñecese o tipo de cuestións que se presentaban).

A proba realizábase nos días inmediatamente seguintes ó exame correspondente ós temas de integración.

Dentro deste grupo, aínda detallarémo-los resultados considerando unicamente aqueles estudiantes que obtiveron alomenos un 4 de cualificación no exame relativo ás integrais. Referiremos a eles como "aprobados".

iii) Grupo de contraste sobre a permanencia das concepcións primeiras en "cohabitación" coas producidas por novas aprendizaxes: estudiantes da licenciatura de Matemáticas.

- Cuestionarios establecidos.
- Traballo de aula (4 sesións).
- Cuestión de reforzo.

Estudiantes de matemáticas que cursan a materia "Didáctica da Matemática en Secundaria": 1 de 2º curso da licenciatura, 9 de 3º, 19 de 4º e 12 de 5º.

A proba realizábase durante o segundo cuadrimestre.

iv) Grupo de contraste sobre concepcións realizadas dende unha instrucción menos tecnificada e máis contextualizada: estudiantes de COU e 2º de bacharelato, opción de "sociais".

- Cuestionarios establecidos.

Alumnos de dous grupos de COU e un de 2º de bacharelato, de tres institutos de Santiago de Compostela: Xelmírez I, Eduardo Pondal e Pontepedriña (diferentes

tamén ós dous institutos anteriores que colaboraran na análise dos problemas, de maneira que o profesorado non coñecese o tipo de cuestións que se presentaban).

A proba realizábase nos días inmediatamente seguintes ó exame correspondente ós temas de integración.

Depuración da mostra

Na idea de non introducir sesgos que puidesen desvirtua-los resultados:

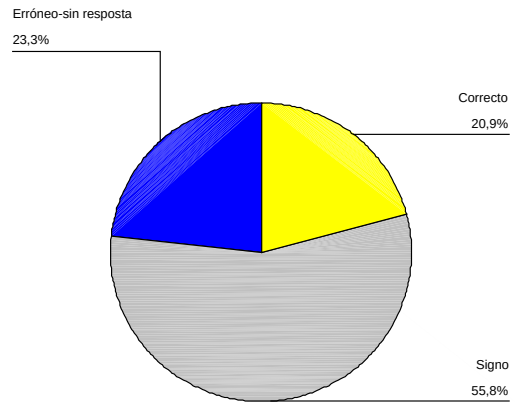
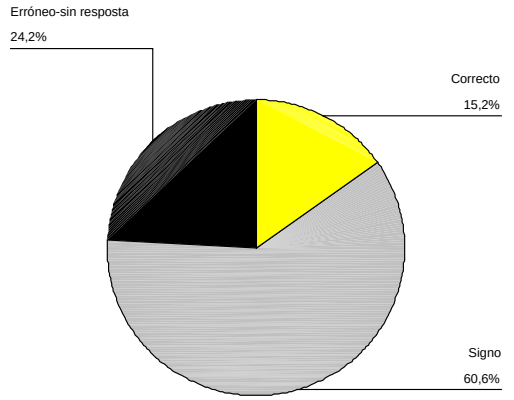
- Eliminánronse aqueles cuestionarios nos que non apreciamos sinceridade nas respostas, xa que saltaban páxinas, e naquelas nas que respondían a penas barruntaban ideas comprensibles para os correctores.
- Dentro de cada cuestión, non computamos aquelas que, por estaren situadas na parte final do cuestionario respectivo, aparecen totalmente en "branco", isto é: sen resposta pero tampouco sen ningunha referencia acerca da comprensión do enunciado nin da novidade do problema.

Test de comparación dos colectivos

Necesitabamos valorar ata qué punto o esquecemento podería disuadirnos de contar co alumnado de 1º curso universitario, polo que empregamos dúas das cuestións, de estilo máis común (máis directamente relacionadas coa instrucción recibida), a xeito de test de control, comparando este colectivo co de COU-2º de Bacharelato.

Se as respostas a estas cuestións validasen a mostra, como sucedeu, entón poderiamos observar qué concepcións son as que teñen maior arraigo e cáles menos e, contrastando cuestión a cuestión co colectivo COU-2º Bacharelato, intentariamos observar en cáles das ditas concepcións había variacións significativas debido a este periodo vacacional e en cáles non, segundo fose o caso.

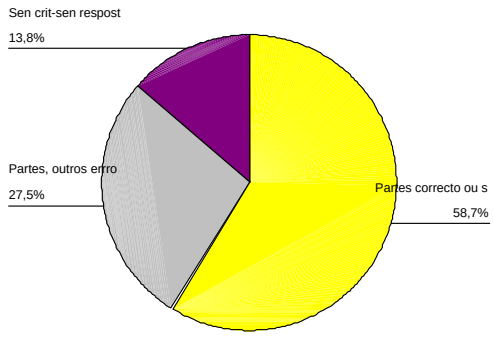
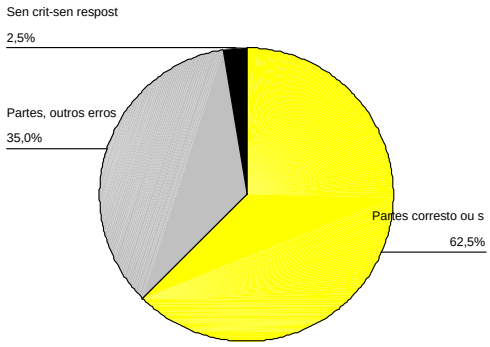
Cuestión 1.1: Calcula a área comprendida entre a gráfica da curva *f(x) = cos x* e o eixo horizontal no intervalo $[0, \pi]$. Interpreta o resultado graficamente.	**1º Universidade**	**COU-2ºBach.**	
		Total	**Aprobados**
Resposta correcta	20,9	15´2	22,7
Problema co signo	55,8	60´6	59,1
Errónea ou sen resposta	23,3	24´2	18,2
Total	100,0	100,0	100,0

1º Universidade	**COU-2ºBacharelato**
	

Nesta primeira das cuestións percíbese que o rendemento do colectivo de 1º de universidade:

- É algo mellor que o dos alumnos de COU-2º Bach.:
    - A favor dos de 1º de universidade está o feito de que foron "filtrados" no curso anterior e na selectividade.
    - Na súa contra, a distancia temporal instrucción-resposta.
- É algo peor que o dos "aprobados":
    - Desaparece o factor favorable, ó estar estoutros tamén "filtrados" respecto da proba, ó ter alomenos un 4 no exame de integrais.

Cuestión 2.8: Calcula $\int x \cos x \, dx$.	**1º Universidade**	**COU-2ºBach.**	
		Total	**Aprobados**
Ben por partes (correcto ou erro nun signo)	58,7	62,5	64,3
Por partes con outros erros	27,5	35,0	35,7
Sen criterio ou sen resposta	13,8	2,5	0,0
Total	100,0	100,0	100,0

Universidade	**COU-2ºBacharelato**
	

Nesta segunda cuestión o rendemento do colectivo de 1º de universidade empeora sensiblemente respecto ós alumnos de COU, diferencia que se agranda ó ter en conta unicamente os aprobados, sen chegar en calquera caso a ser tan grande como para desbarata-lo noso plan.

- Ademais, curiosamente esta é a cuestión máis algorítmica, o dominio técnico da cal non temos intención de avaliar.
- Pola contra, como mostramos máis adiante, na análise pormenorizada que corresponde a este problema, no aspecto metacognitivo, que é o que nos interesa, a relación de resultados invértese.

As oscilacións non son significativas: aplicado un test de significatividade (χ-cuadrado[1]) seríanos posible mante-la hipótese de que o rendemento (tipo de resposta dada) é independente do colectivo considerado. De tódolos xeitos imos manternos no caso máis desfavorable para nós, comparando o rendemento por colectivos.

5.2.- Resultados e valoracións por cuestións

Os resultados que se expoñen a continuación corresponden ó grupo *de referencia*. Nas valoracións inclúense elementos comparativos cos grupos de contraste mencionados.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Recordamos que hai unha pregunta xeral, acerca do significado persoal da integración, que se lles formula a tódolos enquisados. As outras cuestións aplícanse sobre segmentos aleatorios da mostra, indicándose puntualmente o número total que corresponde computar en cada caso.

Tódalas porcentaxes que se reflicten neste capítulo refírense ó número total de estudiantes da mostra final ós que se lles formula a pregunta e que chegan a le-lo seu enunciado, indicando que o comprenderon; ou en todo caso, incluíndo aqueles outros que sen facer tal indicación, ou aínda facendo a contraria, dan unha resposta o suficientemente aceptable como para pensar que esencialmente si entenderon o dito enunciado.

---

[1] Calculando para a cuestión 1.1 o χ^2 de Pearson temos un valor de 0´504578, e as táboas de Fisher &Yates para df= 2 e para un nivel de significación do 0´01 proporciónannos un valor crítico de 9´21, moi distante do que nos levaría a rexeita-la hipótese nula de que o rendemento obtido é independiente do colectivo considerado. Tampouco ó 0´1 de significatividade poderíamos rexeitala (valor crítico 4´60), e aínda tampouco ó 0´70 (valor crítico 0´71) dada a gran similitude das porcentaxes observadas. No caso da cuestión 2.8 , χ^2 =3´9375, tampouco sería acadado sequera ó 0´1.

Acerca dos criterios de valoración

O nacemento e inicial desenvolvemento da teoría de conxuntos, nas últimas décadas do século XIX, viña rodeado de polémica, reserva e confusión. A Unión de Matemáticos Alemáns comisiona a Schönflies para escribir un informe sobre a dita teoría, que rematou de facer no ano 1900. Sobre isto di Thomas Hawkins (1984):

> "Na sección sobre a medida fai constar que se desenvolveran varias teorías e que, como sempre sucede coas definicións en matemáticas, tamén as definicións de medida eran en certo sentido subxectivas, e terían que ser xulgadas polo grao no que as súas consecuencias se adaptasen ós obxectivos perseguidos coa súa introducción". (En Grattan-Guinness, ed., pax 232).

A última frase desta cita, que reflicte un importante episodio na historia recente da matemática, dános un interesante criterio para avalia-los usos educativos vixentes, no noso caso referidos ó cálculo integral, dende unha perspectiva *intrínseca*: a coherencia entre as formas de aprendizaxe que "conseguen" os estudiantes como consecuencia dunhas determinadas prácticas de ensinanza, e os obxectivos que se perseguían con elas.

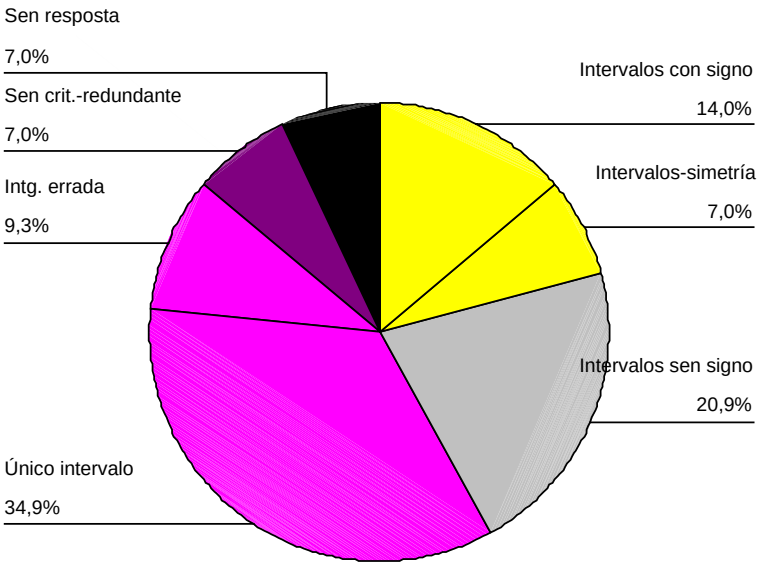
O dito criterio é alleo ás convicción s e consideracións persoais do avaliador, así como ó marco conceptual dende o cal este pretende extrae-las súas conclusións, que darían lugar ó que chamariamos avaliación *interpretativa*.

Para contribuír á reflexión do profesorado dende a súa propia práctica, intentaremos conxugar ámbalas dúas perspectivas: intrínseca e interpretativa.

No que segue, identificámo-lo grupo de referencia como 1º-Un., os estudiantes de COU-2º Bach. da opción de ciencias como COU-c, os de matemáticas como Mat. e os de COU-2º Bach. da opción de sociais, como Sociais.

1.1.- Calcula a área comprendida entre a gráfica da curva *f(x) = cos x* e o eixo horizontal no intervalo $[0, \pi]$. Interpreta o resultado graficamente.

1.1	Frecuencia	%	% acumulada
Integral por intervalos; controlan o signo	6	14,0	14,0
Integrais; correcto por simetría	3	7,0	20,9
Dous intervalos sen control do signo	9	20,9	41,9
Único intervalo	15	34,9	76,7
Integración errada/sen rematar	4	9,3	86,0
Sen criterio- redundante	3	7,0	93,0
Non responden	3	7,0	100,0
Total	43	100,0	



1.1 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Integral por intervalos; controlan o signo	14,0	12,1	50,0	4,3
Integrais; correcto por simetría	7,0	3,0	12,5	
Dous intervalos sen control do signo	20,9	3,0	25,0	
Único intervalo	34,9	57,6	12,5	39,1
Integración errada/sen rematar	9,3	18,2		21,8
Fan soamente a gráfica				26,1
Sen criterio- redundante	7,0	6,1		
Non responden	7,0			8,7

Valoracións

Colectivo de referencia:

O 86% tratan o problema por integración. Do restante 14% a metade non responde e a outra metade non chega a perfilar unha intención clara de cómo calcula-la área en cuestión.

- Soamente o 14% aluden expresamente ó signo, intentando controlalo.
- Poderiamos aínda supoñer que os que resolven polo dobre dun semi-intervalo teñen a precaución debida ó signo, situándonos entón nun 21%.

Resultaría, entón, que soamente unha quinta parte manteñen a coherencia entre os cálculos e unha posible medida da área, a pesar de ser este un asunto puntual que se trata con reiteración no cálculo de áreas por integración.

En total, foron o 42% os que trataron a cuestión por subintervalos, pero entre eles o 11´6% deron como resultado A=0 ou un valor negativo (7% e 4´6%, respectivamente).

- Aínda pode ser máis preocupante a actitude daqueles que lle atribúen valor 0 a unha área dun xeito totalmente asignificativo, xa que debuxan a función delimitando claramente un recinto de extensión non nula.
- Outra quinta parte toma os intervalos rutineiramente, xa que isto non os leva a ningunha decisión. Isto pon de manifesto que recordan que se facía así, pero non o sentido de facelo.

A maioría parece non ter unha conciencia clara da necesidade de coñecer qué rexións están sobre o eixe de abscisas e qué outras baixo el, xa que isto vai determina-lo signo da integral, podendo motivar que as nosas pretensións de medi-la área non se vexan satisfeitas.

- De feito xa un 55´8% presentan e resolven correctamente a integral pero non tratan a cuestión do signo, incoherentemente coa tarefa de medir unha área.

- A división en intervalos opera como un tic adquirido, do cal moitos recordan que había que facelo así, pero esquecen a finalidade.

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

- A porcentaxe de respostas correctas é moi baixa, próxima tamén á quinta parte (do 15% no total, ó 23% nos aprobados), o que nos indica que as dificultades poden situarse no momento da instrucción.
- A porcentaxe dos que presentando e resolvendo correctamente a integral non solventan a cuestión do signo é moi semellante (60´6% no total e 59% nos aprobados), pero agora a penas se manifestan as actitudes rutineiras, pois neste segmento, case todos empregan un único intervalo.
- Tamén son próximas as porcentaxes dos que asignan valor 0 á área ou un valor negativo (6% en cada caso).

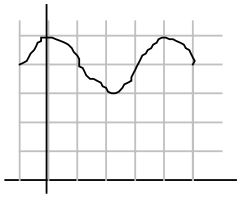
No alumnado da licenciatura de matemáticas:

- As cousas son notablemente mellores, xa que perto dos dous tercios responden correctamente. Pero non deixa de resultar rechamante que aínda *un tercio* do alumnado non se decate da razón pola cal é necesario coñecer qué rexións están sobre o eixe de abscisas e qué outras baixo el, en relación coa integral coa cal pretendemos medi-la área.
- Aínda máis preocupante, porque pode indica-la permanencia de actitudes dogmáticas, é o feito de que unha cuarta parte deles procedan rutineiramente por subintervalos, sen que iso inflúa nos cálculos.

Entre o alumnado de "sociais":

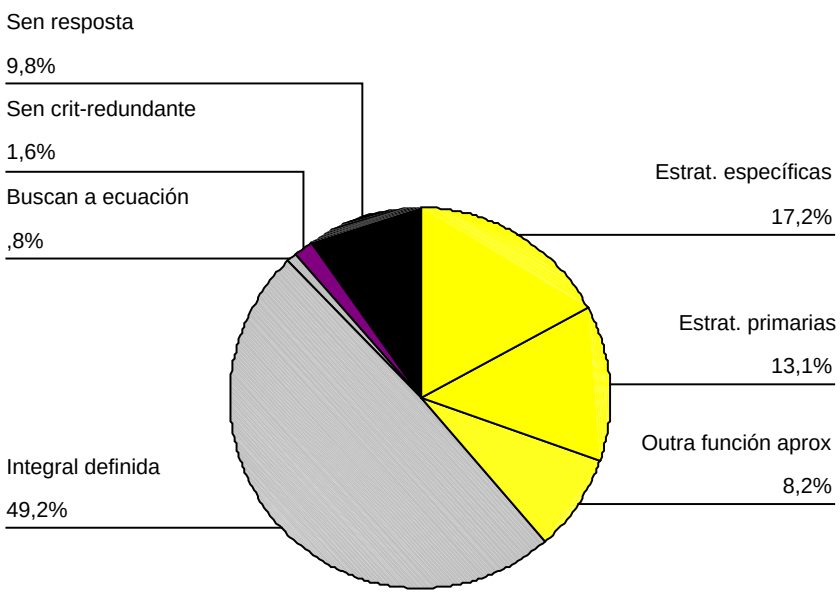
- A porcentaxe de respostas correctas foi moi baixa, do 4´3%.
- A porcentaxe dos que presentando e resolvendo correctamente a integral non solventan a cuestión do signo foi do 39´1%; todos empregan un único intervalo.
- Asignan valor 0 á área o 21´7%.

1.7.- ¿Como calcularías, coa maior aproximación que che sexa posible, a área baixo a curva do debuxo, da que descoñecémo-la fórmula?



Xustifica a resposta e realiza o cálculo que propós.

1.7	Frecuencia	%	% acumulada
Estratexias específicas	21	17,2	17,2
Estratexias primarias	16	13,1	30,3
Outra función aproximada	10	8,2	38,5
Integral definida xenérica	60	49,2	87,7
Buscan a ecuación	1	,8	88,5
Sen criterio- redundante	2	1,6	90,2
Non responden	12	9,8	100,0
Total	122	100,0	



1.7 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Estratexias específicas	17,2	5,5	44,0	11,2
Estratexias primarias	13,1	27,3	48,0	13,3
Outra función aproximada	8,2	1,8	4,0	4,4
Integral definida xenérica	49,2	41,8	4,0	26,7
Buscan a ecuación	,8	3,6		20,0
Sen criterio- redundante	1,6	1,8		2,2
Non responden	9,8	18,2		22,2

Valoracións

Colectivo de referencia:

Coa distinción entre estratexias primarias e estratexias específicas tratamos de apreciar ata qué punto o estudio da integración pode inducir ós estudiantes a tomar uns camiños ou outros de resolución:

- Entre as "primarias" consideramos contar cadrados e estimar cando non son completos, tomar un rectángulo aproximado, ou mestura-las ideas anteriores.
- Entre as específicas contemplámo-lo establecemento de particións no intervalo ([-*1,5*], neste caso) e tomar rectángulos con base nel, calculando unha suma inferior e estimando nas partes non completas, ou anologamente tomando unha suma superior, ou incluso sen estimación facer unha media de ámbalas dúas.
    - Outras posibles nas que pensaramos, como aproximación por trapecios ou por arcos de parábola (Simpson), non se produciron.

Dentro das estratexias inducidas estaría tamén aquela consistente en substituí-la función do debuxo por outra aproximada, presentando entón a integral. Considerámola un tipo de resposta con entidade propia.

- A feitura familiar da gráfica, que recorda as funcións trigonométricas, anima ó intento.

En total, pouco máis dun tercio asume a tarefa de aproximar, a pesar de que, recalcando o sentido da tarefa, se enuncia no problema "coa maior aproximación que che sexa posible".

Un 50% presenta a integral da función f, coa cal obterían o resultado exacto se a coñecesen.

- Soamente 1 alumno dese amplo colectivo busca a ecuación da función, para poder facelo.
- Pero, a pesar de que de que a función é descoñecida, non intentan ningún tipo de aproximación. Ou sexa, case a metade escriben a integral conscientes de que non poden resolvela, sen recorrer a outras estratexias alternativas.

A esa metade habería que engadirlle ese 11´4 % que responde sen criterio ou non responde, para valora-la gravidade da cuestión que manifesta un "bloqueo" procedemental, xa que case dous tercios non son capaces de reaccionar e utilizar sequera procesos primarios.

- Particularmente neste aspecto cognitivo si que non ten influencia o período de tempo transcorrido dende o estudio da integración ata o momento da proba. Ademais o 50%, entre os que sofren o "bloqueo", si que recorda expresamente a integral asociada a área baixo a gráfica.

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

- Seguen sendo en torno a un tercio os que asumen a tarefa de aproximar, algo menos ca antes na totalidade (34´5%), e un pouco mellor nos aprobados (41´5%).
- Case son tantos coma antes os que presentan a integral da función f, coa cal obterían o resultado exacto se a coñecesen (45´4%), mellorando algo nos aprobados (41´5%).
    - Son agora 2 alumnos dese amplo colectivo quen buscan a ecuación da función, relacionándoa coa función seno. (Curiosamente son alumnos con menos de 4).

- Engadiriamos agora un 20 % (18´7% nos aprobados) que responde sen criterio ou non responde, para roldar de novo os dous tercios do estudiantado nos que se manifesta o "bloqueo" procedemental que comentabamos.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

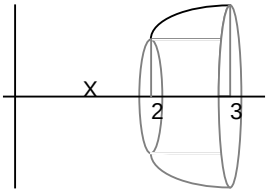
- O problema de aproximar parece resolto (96%). O estudio explícito da aproximación en materias de cálculo numérico puido ser determinante.
  - Unicamente é o 4% quen presenta a integral da función f, coa cal obterían o resultado exacto se a coñecesen.

Entre o alumnado de "sociais":

- Asumen a tarefa de aproximar, o 28´9%.
- Presentan a integral da función f, coa cal obterían o resultado exacto se a coñecesen, o 46´7%.
  - Pero son agora 9 (o 20%) alumnos dese amplo colectivo os que buscan a ecuación da función, relacionándoa coa función seno ou por medio de polinómicas.
  - O 26´7% restante non intentan nada.
- Engadiríamos agora un 24´4% que responde sen criterio ou non responde. Mellora, aínda sendo grave, para supera-la metade, nos que se manifesta o "bloqueo" procedemental que comentabamos.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

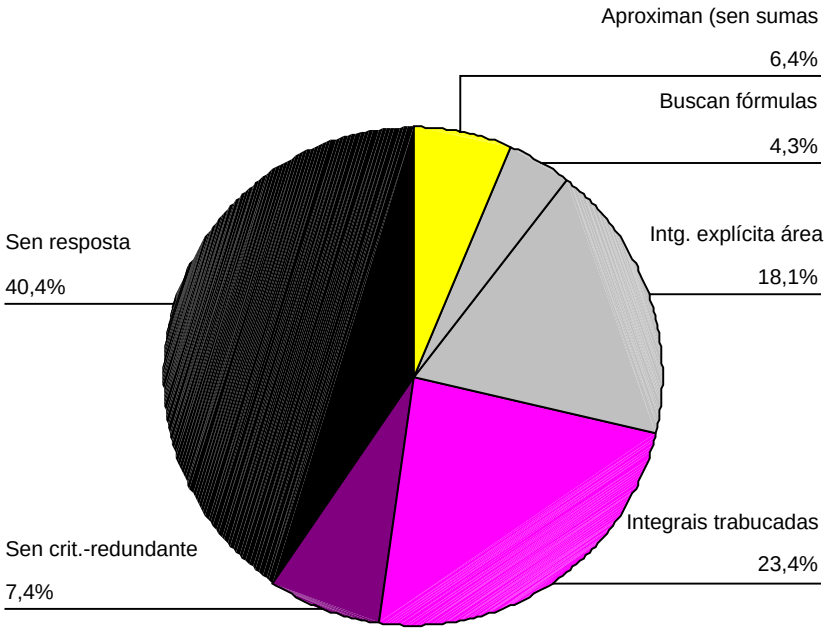
1.12.- O corpo da figura obtívose ó xirar en torno ó eixo X o tramo da curva $y = 6x - x^2$ entre os puntos de abscisas 2 e 3.



Explica algunha idea sobre cómo nos poderiamos aproximar ó seu volume. Se podes, calcúlao con exactitude.

Xustifica por qué o método que segues para resolvelo é correcto.

1.12	Frecuencia	%	% acumulada
Aproximan (non por sumas)	6	6,4	6,4
Buscan algunha fórmula	4	4,3	10,6
Integral- intg. da área explicitamente	17	18,1	28,7
Integrais trabucadas	22	23,4	52,1
Sen criterio- redundante	7	7,4	59,6
Non responden	38	40,4	100,0
Total	94	100,0	



1.12 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Aproximan (non por sumas)	6,4	14,3		5,0
Fórmula do volume		14,3	10,0	
Buscan algunha fórmula	4,3	7,1		10,0
Integral dobre			80,0	
Integral- intg. da área explicitamente	18,1	10,7		25,0
Integrais trabucadas	23,4	35,7	10,0	15,0
Sen criterio- redundante	7,4			5,0
Non responden	40,4	17,9		40,0

Valoracións

Colectivo de referencia

Soamente o 6´4% afronta o problema da aproximación (tronco cono, cilindro/s, cubos unidade, ...), aínda que en ningún caso se alude a particións.

- Se ben agora se trata dun volume e non dunha área, resulta rechamante a escasa transferencia a esta nova situación (no anterior problema a porcentaxe de aproximación á área era do 38´5%).

Un 4´3% busca algunha fórmula que lle permita chegar directamente ó volume, pero ningún estudiante escribe a fórmula que corresponde ó volume de revolución.

O 41´5% utiliza integrais sen chegar á resposta:

- Un 18% indica que se fai por integrais ou calcula a área expresamente, sen continuar.
- O 23% responden atribuíndolle ó volume integrais que non lle corresponden (incluso, e sobre todo, utilizan a da área, o seu dobre, o seu cadrado ...).

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

A melloría é importante xa que son un 14´3% (13´6% nos aprobados) os que afrontan o problema da aproximación (tronco cono, cilindro/s, cubos unidade ...), aínda que tampouco en ningún caso se alude a particións.

- A opinión que podemos dar sobre a transferencia a esta nova situación ten que basearse na ausencia de resposta á primeira parte da cuestión, pois outro 14´3% emprega a fórmula do volume, co cal obviarían o problema da aproximación (todos eles dos "aprobados", o que representaría o 18%).
- Un 7% busca, sen éxito, algunha fórmula que lle permita chegar directamente ó volume (4´5% entre os aprobados).
- Unha porcentaxe semellante (46´4%; e case a mesma ca antes, 40´9%, nos aprobados) utiliza integrais sen chegar á resposta:
  - Un 11% indica que se fai por integrais ou calcula a área expresamente, sen continuar (13´6% nos aprobados).
  - Mentres que son o 35´7% os que responden con integrais que non se corresponden ó volume (incluso, e sobre todo, utilizan a da área, o seu dobre, o seu cadrado ...), e o 27´3% nos aprobados.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

- Soamente o 10% dos estudiantes emprega a fórmula do volume.
- O 80% presentan unha integral dobre, como se houbese unha función de dúas variables ($\Re^2 \to \Re$) e pretendesemos calcula-lo volume do conxunto de ordenadas correspondentes a ela en determinado dominio.
  - Nestes hai un 10% que remata por obte-la expresión da área e un 30% a do dobre da área, facilmente recoñecibles por se-la función do enunciado unha polinómica moi simple. A pesar diso, calculan e dan o valor resultante como resposta ó volume.
- Esa actuación maioritaria obedecía ó estudio do cálculo en dúas variables, o que nos ocultaba as concepcións anteriores que queriamos analizar. Nas sesións de aula puidemos constatar que as dificultades de transferencia permanecían, xa que ó demandarlles expresamente un

proceso de aproximacións sucesivas, á maioría non se lles ocorría ningunha estratexia para inicialo.

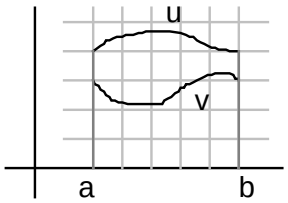
Entre o alumnado de "sociais":

Afrontan o problema da aproximación o 5%, aínda que tampouco en ningún caso se alude a particións.

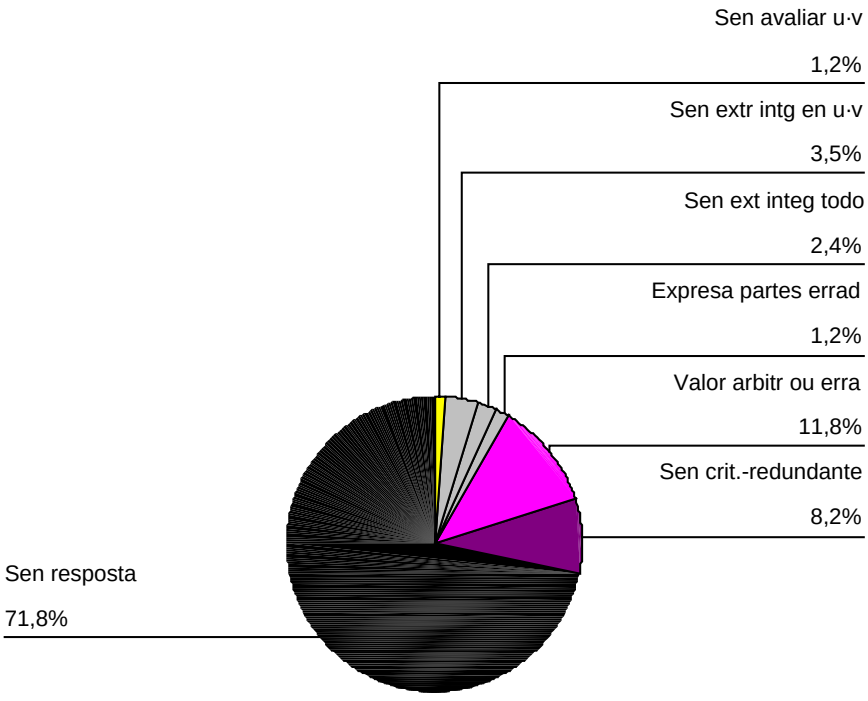
- Un 10% busca algunha fórmula que lle permita chegar directamente ó volume.
- Unha porcentaxe próxima ós outros colectivos, 40%, utiliza integrais sen chegar á resposta: un 25% indica que se fai por integrais ou calcula a área expresamente, sen continuar.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

2.3.- Sexan u,v as funcións da figura adxunta. Se $\int_a^b u \cdot dv = 1$, ¿que valor toma a expresión $\int_a^b v \cdot du$? Xustificao.



2.3	Frecuencia	%	% acumulada
Por partes, sen avaliar $u \cdot v$	1	1,2	1,2
Por partes, sen extremos de intg. en $u \cdot v$	3	3,5	4,7
Por partes, todo sen extremos de intg.	2	2,4	7,1
Por partes, expresión incorrecta	1	1,2	8,2
Valor arbitrario ou errado	10	11,8	20,0
Sen criterio- redundante	7	8,2	28,2
Non responden	61	71,8	100,0
Total	85	100,0	



2.3 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Por partes, resolta correctamente			18,8	
Por partes, sen avaliar $u\cdot v$	1,2	3,0	37,5	
Por partes, sen extremos de intg. en $u\cdot v$	3,5	6,1		4,4
Por partes, todo sen extremos de intg.	2,4	3,0		4,4
Por partes, expresión incorrecta	1,2	6,1	6,3	
Valor arbitrario ou errado	11,8	30,3	18,8	21,7
Sen criterio- redundante	8,2	24,2	6,3	13,0
Non responden	71,8	27,3	12,5	56,5

Valoracións

Colectivo de referencia

Soamente o 8´2% resolven o problema por medio da integración "por partes", a pesar de que este é o único contexto no que se lles presentan as expresións do enunciado. (Suprimíronse da mostra correspondente a esta cuestión aqueles alumnos que empregan a notación, menos frecuente, $f'\cdot g$, $g\cdot f'$).

Esta baixa porcentaxe indica que o método de integración por partes é concebido como unha técnica *per se*, e non como un recurso para afrontar unha integración problemática: non sabemos cómo integrar $v\cdot du$, e intentámolo por medio de $u\cdot dv$, se isto último resulta coñecido.

Avaliar $u\cdot v$ entre os extremos do intervalo require unha simple lectura da gráfica, aínda que podería representar un problema particular dada a falta de hábito, como se constatou nas entrevistas. Nas respostas ó cuestionario non tivo relevancia xa que soamente un alumno/a chegou a escribi-los extremos correspondentes a este producto de funcións.

- Pero o feito de que 6 dos 7 alumnos que si utilizaron a integración por partes non completasen a expresión desta, incluíndo os extremos de integración en $u\cdot v$, é consecuente coa escasez ou nulidade de situacións nas que os métodos de integración son aplicados á integración definida, a pesar de ser bastante extensa a súa práctica.

O 11´8% asigna un valor arbitrario sen xustificación ningunha, ou estiman as áreas baixo *u*, *v*, ou *u* e *v*, para propoñer un valor a partir destes.

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

- Bastantes máis, o 18´2% (coincide nos aprobados) resolven o problema por medio da integración "por partes", pero segue a ser unha porcentaxe alarmantemente baixa xa que este é o único contexto no que se lles presentan as expresións do enunciado.
- Tamén agora só 1 alumno escribe a expresión completa cos correspondientes límites de integración (curiosamente non pertence ós "aprobados"), e tampouco el chega a avaliar $u \cdot v$.
- O 30% asigna un valor arbitrario sen xustificación ningunha, ou estiman as áreas baixo *u*, *v*, ou *u* e *v*, para propoñer un valor a partir destes (23% nos aprobados).

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

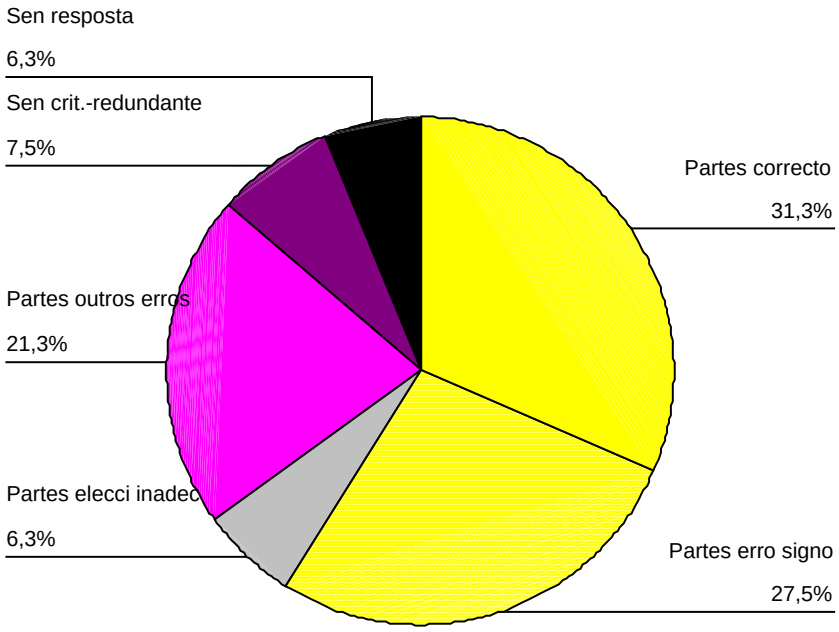
- Agora temos xa o 62´5% de estudiantes que tratan o problema por medio da integración "por partes".
  - O 56´3% escribe a expresión completa cos correspondentes límites de integración, pero unicamente o 18´8% o resolve correctamente, avaliando $u \cdot v$.
- Non deixa de ser preocupante que aínda un tercio non consegue relacionalo, dadas as coincidencias simbólicas na representación.

Entre o alumnado de "sociais":

- O 8´7% acometen o problema por medio da integración "por partes".
- Ningún alumno escribe a expresión completa cos correspondentes límites de integración.
- O 21´7% asigna un valor arbitrario sen xustificación algunha, ou estiman as áreas baixo *u*, *v*, ou *u* e *v*, para propoñer un valor a partir destas.

2.8.- Calcula $\int x \cos x \, dx$.

2.8	Frecuencia	%	% acumulada
Por partes, solución correcta	25	31,3	31,3
Por partes, erro nun signo	22	27,5	58,8
Por partes, elección inadecuada	5	6,3	65,0
Por partes, outros erros	17	21,3	86,3
Sen criterio- redundante	6	7,5	93,8
Non responden	5	6,3	100,0
Total	80	100,0	



2.8 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Por partes, solución correcta	31,3	50,0	93,8	26,1
Por partes, erro nun signo	27,5	12,5		39,1
Por partes, elección inadecuada	6,3	10,0		8,7
Por partes, outros erros	21,3	25,0	6,2	21,7
Sen criterio- redundante	7,5	2,5		17,4
Non responden	6,3			13,0

Valoracións

Colectivo de referencia

O 86´3% acomete o problema como unha integración por partes, a pesar de que non hai agora nada explícito no enunciado que o suxira.

- A explicación atopámola, sen dúbida, na práctica reiterada deste método para o cálculo de primitivas.

Este resultado choca frontalmente con que soamente un 8% recorrese á integración por partes no exercicio 2.3, inmediatamente anterior no cuestionario (trátase dos mesmos estudiantes), cando si estaban explícitas as expresións que identificaban o método.

A porcentaxe detectada de estudiantes que elixen inadecuadamente as funcións non é alta (6´3%) pero de tódalas formas parece importante. Neste caso coincide que a primeira elección á cal invita o exercicio é a correcta.

Máis preocupante ía resulta-lo segmento "outros erros" (21´3%), xa que nel maiormente se presentaba incorrectamente a integral por partes.

Continuamos nas entrevistas de COU a indagación:

- A maioría dos entrevistados, incluso tendo éxito na resolución do problema, non tiñan unha intención consciente, senón que probaban a ver se saía. Ou sexa, non buscaban intencionadamente unha simplificación, senón un cambio por outra integral indefinida que "debera saír".
- Maioritariamente recordaban o da "derivada do producto", pero recoñecían que non pensaban para nada niso á hora de afronta-la integal por partes, a pesar de que agora, ó demandárllelo expresamente, si recordaban que se lles explicara xustificándoo desta maneira.
  - Revela esta situación outra carencia actitudinal moi estendida: ó non estaren seguros de "cómo era", non intentan reconstruí-las ideas, senón que se conforman con arriscar memorísticamente.

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

Sobe ó 97´5% a porcentaxe dos que tratan o problema como unha integración por partes (o 100% entre os aprobados), a pesar de que non hai agora nada explícito no enunciado que o suxira, mentres que soamente un 18% recorrese á integración por partes no exercicio 2.3 (coinde nos aprobados).

A porcentaxe detectada de estudiantes que elixen inadecuadamente as funcións é sen embargo máis alta (10%), e sobe entre os aprobados a un 14´3%.

- O segmento "outros erros", no cal maiormente se presenta incorrectamente a integral por partes é aínda maior (25%), equiparándose no caso dos aprobados (21´4%).

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

Como era presumible, o 100% acometen o problema como unha integración por partes, fronte ó 62´5% que o facía no exercicio 2.3.

- Unicamente un estudiante se equivoca ó presenta-la expresión.

Entre o alumnado de "sociais":

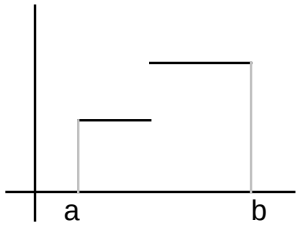
Son o 70´6% os que tratan o problema como unha integración por partes.

A porcentaxe detectada de estudiantes que elixen inadecuadamente as funcións é do 8´8%.

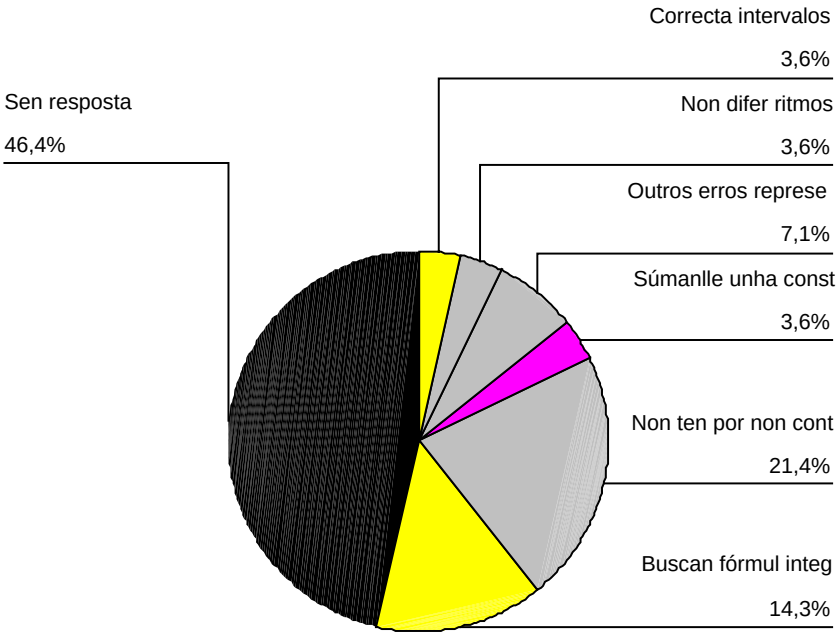
- O segmento "outros erros", no cal maiormente se presenta incorrectamente a integral por partes é do 21´7%.

2.14.- Debuxa, se existe, unha primitiva da función representada no gráfico, no intervalo [a, b].

Xustifica a resposta que deas.



2.14	Frecuencia	%	% acumulada
Gráfica correcta por intervalos	1	3,6	3,6
Non diferencian ritmos de crecemento	1	3,6	7,1
Outros erros de representación	2	7,1	14,3
Súmanlle unha cte. á propia función	1	3,6	17,9
Que non ten por non ser continua - derivable	6	21,4	39,3
Buscan as fórmulas para integrar	4	14,3	53,6
Sen criterio- redundante			
Non responden	13	46,4	100,0
Total	28	100,0	



2.14 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Gráfica correcta por intervalos	3,6		13,3	
Non diferencian ritmos de crecemento	3,6	7,7		
Outros erros de representación	7,1	7,7		4,0
Afirman que ten primitiva pero non a debuxan			6,7	
Súmanlle unha cte. á propia función	3,6	3,8		4,0
Que non ten por non ser continua - derivable	21,4	26,9	40,0	16,0
Afirman que non ten , sen explicación			13,3	
Buscan as fórmulas para integrar	14,3		26,7	
Sen criterio- redundante		7,7		4,0
Non responden	46,4	46,2		72,0

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Valoracións

Colectivo de referencia

O 21´4% afirma que non ten primitiva xa que a función non é continua.

- Sen embargo non percibimos nos libros de texto, nin nos comentarios dos profesores, nin nas entrevistas o contido desta proposición, polo que pensamos que se pode tratar, na maioría dos casos, dunha suplantación da proposición "se é continua ten primitiva", (que si se inclúe no enunciado do teorema fundamental) pola súa contraria. Indagamos sobre isto nun cuestionario complementario ó que nos referiremos posteriormente.

- Nas entrevistas puidemos comprobar que os desconcertaba a idea de que algunhas funcións "correntes" non tivesen primitiva (elemental ou combinación de elementais, tal como eles a concebían), a pesar de ser continuas. E, reciprocamente, amosaban incredulidade ante a posibilidade de que houbese funcións non continuas que si tivesen primitiva.

- Tamén desconcertaba a moitos dos estudiantes a proposta de que debuxasen a "función integral" á cal se refería o teorema fundamental e, unha vez debuxada, varios creron que daquela si tiña primitiva, sen reparar no problema do punto anguloso que mostraba.

O 32´2% asume a tarefa de realizar unha representación gráfica das primitivas correspondentes a cada tramo.

- Entre estes alumnos, soamente 1 reflicte diferentes ritmos de crecemento en cada tramo, sen necesidade de obter previamente as fórmulas.
- A situación observada é indicativa de que a "función integral" (ou "función área" para os exemplos que manexan), non está conceptualizada como soporte xeométrico dunha primitiva, a pesar de ser iso unha das cousas que "aprenden" a demostrar.

A posible confusión coa idea de que as primitivas se diferencian nunha constante, pode ocasionar que se lle sume unha constante á propia función.

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

O 26´9% (máis aínda entre os aprobados: o 31´6%) afirma que non ten primitiva por non se-la función continua ou por non ser derivable (19´2% e 7´7%, respectivamente; estes últimos dos aprobados).

- Esta tendencia a "empeorar" cara ós aprobados, fainos pensar de novo na posible suplantación da proposición "se é continua ten primitiva", que se inclúe no enunciado do teorema fundamental, xa que son máis os alumnos "capaces de pensar" nunha causa deste tipo.
- Soamente o 19´2 % (sobe ó 26´3% nos aprobados) asume a tarefa de realizar unha representación gráfica das primitivas correspondentes a cada tramo.
- Ningún estudiante reflicte diferentes ritmos de crecemento en cada tramo, sen necesidade de obter previamente as fórmulas.
- Outro alumno (dos aprobados) súmalle unha constante á propia función.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

O 40% afirma que non ten primitiva por non se-la función continua. Esta alta porcentaxe confirma a tendencia á alza desta errónea crenza, que parece aumentar paralelamente co nivel de formación en matemáticas. (En realidade, se

calculamos sobre os que son capaces de dar unha resposta, as porcentaxes seméllanse moito nos tres colectivos).

O 46´7% asume a tarefa de realizar unha representación gráfica das primitivas correspondentes a cada tramo.

- Pero soamente o 13´3% destes estudiantes reflicte diferentes ritmos de crecemento en cada tramo, sen necesidade de obter previamente as fórmulas.

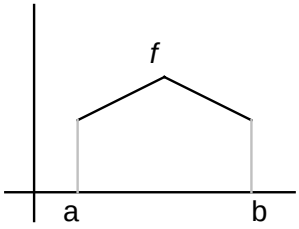
Entre o alumnado de "sociais":

O 16% afirma que non ten primitiva por non se-la función continua ou por non ser derivable (respectivamente, 12% e 4%).

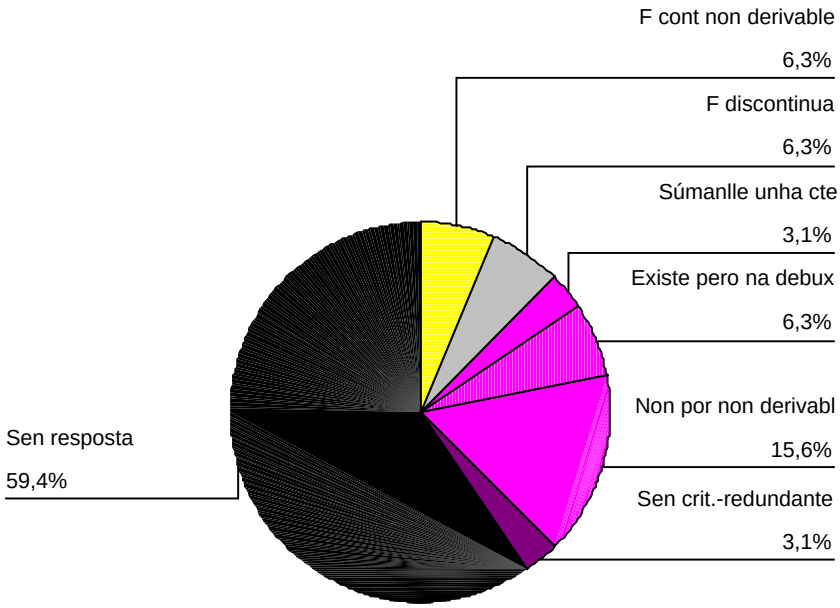
- Este dato parece tamén confirma-la tendencia referida: ós que menos formación matemática se lles presupón, menos cometen o erro.
- Soamente o 8 % asume a tarefa de realizar unha representación gráfica das primitivas correspondentes a cada tramo.
- Ningún estudiante reflicte diferentes ritmos de crecemento en cada tramo.
- Outro alumno súmalle unha constante á propia función.

2.15.- Debuxa, se existe, unha primitiva de f no intervalo que se sinala no gráfico.

Xustifica a resposta.



2.15	Frecuencia	%	% acumulado
Primitiva continua pero non derivable	2	6,3	6,3
Primitiva descontinua	2	6,3	12,5
Súmanlle unha constante a f	1	3,1	15,6
Din que existe pero non a debuxan	5	6,3	21,9
Non ten primitiva por non ser derivable	2	15,6	37,5
Buscan fórmulas para integrar	0	0,0	37,5
Sen criterio- redundante	1	3,1	40,6
Non responden	19	59,4	100,0
Total	47	100,0	



2.15 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Correctamente representada			33,3	
Primitiva continua pero non derivable	6,3		11,1	
Primitiva discontinua	6,3			
Súmanlle unha constante a f	3,1	9,1		
Din que existe pero non a debuxan	6,3	9,1	11,1	
Non ten primitiva por non ser derivable	15,6	22,7	33,3	18,7
Buscan fórmulas para integrar	0,0	4,5	11,1	
Sen criterio- redundante	3,1	4,5		
Non responden	59,4	50,0		81,3

Valoracións

Colectivo de referencia

A vinculación continuidade/primitiva pode te-lo seu reflexo na derivabilidade, pois xa aparecera no problema anterior (nos "aprobados" un 10´5%) e agora, que non hai problema coa continuidade, maniféstase aquí cun 15´6%.

- Isto pon de manifesto a confusión sobre cómo as dúas ideas continuidade/derivabilidade se vinculan coa integración: a función que é continua é derivada da primitiva, pero non é ela mesma a que se deriva.

Escasamente un 16% asume a tarefa de realizar unha representación gráfica das primitivas correspondentes a cada tramo.

- Entre estes alumnos, soamente 2 reflicten concavidade/convexidade en cada tramo, sen necesidade de obter previamente as fórmulas.
- A situación observada é indicativa de que a "función integral" (ou "función área" para os exemplos que manexan), non está conceptualizada como soporte xeométrico dunha primitiva, a pesar de ser iso unha das cousas que "aprenden" a demostrar.

A posible confusión coa idea de que dúas primitivas se diferencian nunha constante, pode inducir a que se lle sume unha constante á propia función.

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

Respecto da vinculación continuidade/primitiva e do posible reflexo na derivabilidade, agora son o 22´7% (20% nos aprobados).

O 13´6% asume a tarefa de realizar unha representación gráfica das primitivas correspondentes a cada tramo. (Coincidente entre os aprobados).

- Ningún reflicte concavidade/convexidade en cada tramo, sen necesidade de obter previamente as fórmulas.
- Houbo outros dous casos, un deles entre os aprobados nos que se lle suma unha constante á propia función.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

Un tercio deste alumnado representa correctamente unha primitiva, sen necesidade de recorrer a obte-las fórmulas.

Respecto da vinculación continuidade/primitiva e posible reflexo na derivabilidade, agora son o 33´3%, o que parece situarnos nunha tesitura paralela á da continuidade: maniféstase máis a errónea conceptualización cantos máis alumnos hai en condicións de empregar un criterio desta natureza. (Como sucede na custión 2.14, as porcentaxes serían parellas de calculalas sobre os estudiantes que dan algunha resposta).

O 55´5% asume a tarefa de realizar unha representación gráfica das primitivas correspondentes a cada tramo.

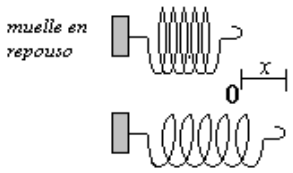
Entre o alumnado de "sociais":

Respecto da vinculación continuidade/primitiva e do posible reflexo na derivabilidade, agora son o 18´7%.

Pero agora ningún estudiante asume a tarefa de realizar unha representación gráfica das primitivas correspondentes a cada tramo.

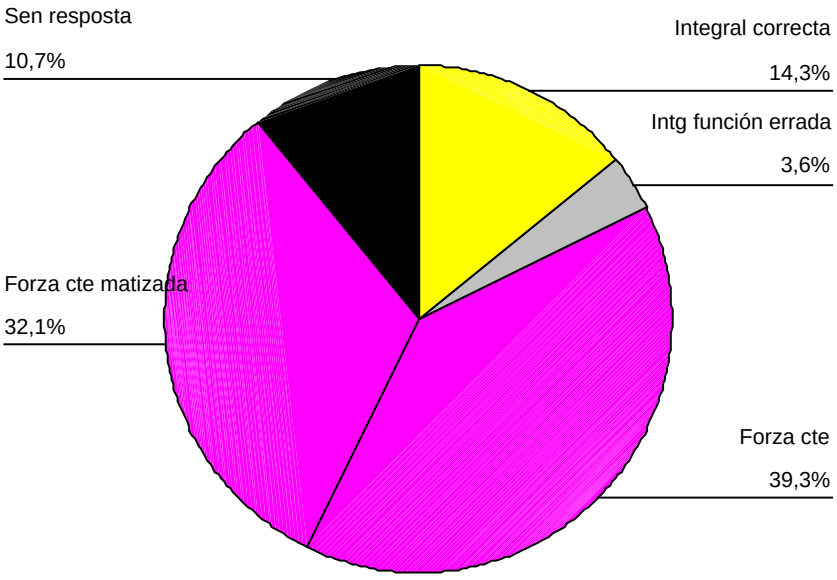
3.1.- O traballo físico *T* realizado ó desprazar un corpo por unha forza constante *F*, que actúa na dirección do movemento, vén dado pola fórmula: $T = F \cdot e$, onde "*e*" é o espacio percorrido.

Pero a forza *F* que exerce un resorte elástico varía proporcionalmente á estirada *x*. No noso caso, segundo a fórmula $F(x) = \frac{1}{2}x$, onde $\frac{1}{2}$ é unha constante característica do resorte que se utiliza.



¿Como calcularía-lo traballo físico realizado polo resorte se foi alongado 5 cm, cando volta á posición inicial? Xustifica a resposta.

3.1	Frecuencia	%	% acumulada
Integración, solución correcta	4	14,3	14,3
Integración, *f(x)* · *x* como función	1	3,6	17,9
Igual que forza constante, sen dúbidas	11	39,3	57,1
Forza constante, con matices	9	32,1	89,3
Sen criterio- redundante	0	0,0	89,3
Non responden	3	10,7	100,0
Total	28	100,0	



3.1 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Integración, solución correcta	14,3	7,7	6,7	4,0
Presentan unha ecuación diferencial			6,7	
Integración, $f(x) \cdot x$ como función	3,6	7,7		
Igual que forza constante, sen dúbidas	39,3	57,7	26,7	68,0
Forza constante, con matices	32,1	7,7	60,0	12,0
Sen criterio- redundante	0,0	3,8		4,0
Non responden	10,7	15,4		12,0

Valoracións

Colectivo de referencia

A fórmula do traballo mediante unha integral era xa coñecida pola disciplina de Física, e a pesar diso soamente o 17´9% afrontan o problema por medio dunha integral. A falta de formación explícita no ámbito da fenomenoloxía da integración parece cobrarse un excesivo tributo.

- Nas entrevistas e no cuestionario de reforzo non soamente ratificamos que si era coñecido o traballo como unha integral da función forza respecto do espacio, senón que comprobamos que ademais estaban seguros diso.

A situación é aínda máis preocupante se temos en conta:

- Que ningún dos estudiantes que resolve correctamente o problema, o xustifica.
- Que entre esta *escasa quinta parte*, aínda un estudiante utiliza mal a función, xa que toma $f(x)\cdot x$ e engade rutineiramente un *dx* sen ningunha atribución de significado, cando este é precisamente o "pequeno" intervalo de espacio que consideramos.

É sorprendente que haxa un 71´4% que empreguen a fórmula para unha forza constante, cando precisamente no enunciado se advirte que ese non é o caso, circunstancia que precisamente orixina o problema que se pretende resolver.

- Deles, son un 39´3% os que non manifesta ningún tipo de dúbida.
- O 32´1% restante discute cuestións accidentais (que se hai dous procesos: estirada e compresión, que se o signo, que se ó regresar á posición inicial non hai traballo, que se as unidades non son as axeitadas ...).

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

Soamente o 15´4% afrontan o problema por medio dunha integral, todos do colectivo "aprobados". Considerando unicamente estes, aínda seguiriamos roldando esa quinta parte: 21´1%).

- Tampouco ningún dos estudiantes que resolve correctamente o problema, o xustifica.
- A metade destes aínda utiliza mal a función, xa que toma $f(x)\cdot x$.

O 65´4% emprega a fórmula para unha forza constante (63´1% entre os aprobados).

- Deles, o 57´7% (52´6% nos aprobados) non manifesta dúbida.
- O 7´7% (10´5% nos aprobados) discute as mesmas cuestións accidentais: que se dous procesos; que se o signo, que se ó regresar non hai traballo, que se as unidades ...

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

Soamente o 13´4% afrontan o problema por integración, directamente ou por medio dunha ecuación diferencial. O recordo sobre o traballo como magnitude física estaba moito máis afastado, pero iso non pode xustificar que o restante 86´7% emprega a fórmula para unha forza constante, aínda que certamente móstranse máis agudos.

- Agora son moitos menos, o 26´7%, os que non manifesta ningún tipo de dúbida, mentres o 60% discute as cuestións accidentais referidas.

NOTA: Engadimos aquí os resultados obtidos anteriormente con 58 alumnos do CAP, licenciados en matemáticas:

- Soamente o 20´7% afrontan o problema por integración, e aínda o 3´5% emprega mal a función (integran $x \cdot f(x)$).
- O 37´2% non manifesta ningún tipo de dúbida no uso da fórmula para o caso de se-la forza constante.
- Mentres, o 38´1% discute as cuestións accidentais referidas.

Entre o alumnado de "sociais":

Soamente un alumno afronta o problema por medio dunha integral.

O 80% emprega a fórmula para unha forza constante.

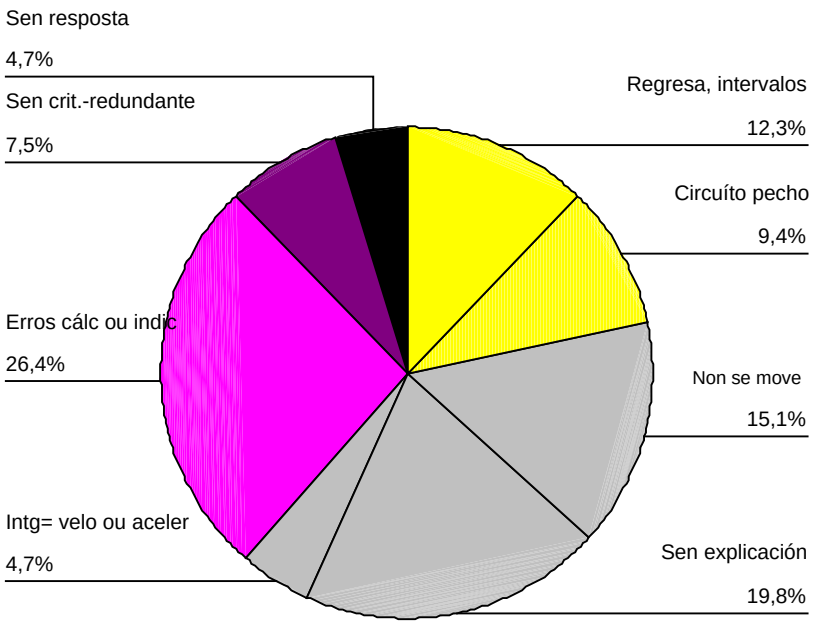
- Deles o 68% non manifesta ningún tipo de dúbida.
- O 12% discute as mesmas cuestións accidentais.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

3.2.- (Recorda que a velocidade é a derivada do espacio respecto do tempo). Un ciclista desprázase a unha velocidade v(t) = 20 - 10t .

Calcula $\int_0^4 v(t)\,dt$. Describe brevemente e xustifica cómo foi o percorrido do ciclista.

3.2	Frecuencia	%	% acumulado
Regresa; sinalando os intervalos	13	12,3	12,3
Regresa; circuíto pecho	10	9,4	21,7
Non se move	16	15,1	36,8
Sen explicación	21	19,8	56,6
A integral como a aceleración ou velocidade	5	4,7	61,3
Erros de cálculo ou só indicado	28	26,4	87,7
Sen criterio- redundante	8	7,5	95,3
Non responden	5	4,7	100,0
Total	106	100,0	



3.2 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Regresa; sinalando os intervalos	12,3	1,7	48,4	8,3
Regresa; circuíto pecho	9,4		6,5	
Non se move	15,1	45,8	9,7	18,7
Sen explicación / explicacións erradas	19,8	11,9	32,3	33,3
A integral como a aceleración ou velocidade	4,7	11,9		2,1
Erros de cálculo ou só indicado	26,4	25,4	3,2	29,2
Sen criterio- redundante	7,5	3,4		4,2
Non responden	4,7			4,2

Valoracións

Colectivo de referencia

A cuestión ten a mesma problemática que o exercicio 1.1, no que a integral daba 0 e preguntábase pola área.

- Naquel exercicio o 14% exercía un control sobre o signo da integral, impedindo que o resultado final da área fose 0, ademais doutro 7% que duplicaba o valor dunha semiárea, á vista da representación xeométrica. Ámbolos dous procedementos son ortodoxos na súa instrucción.

- Agora o contexto é incluso máis familiar, xa que os problemas de velocidade estiveron presentes dende 7º de EXB, mentres que non o estiveron os de medición de áreas que non respondesen a unha figura catalogable como "corrente". Ademais a noción de "regresar" é de uso común. A pesar diso a porcentaxe dos que establecen un período de "ida" e outro de "volta" baixa ó 12´3%, aínda que hai un 9´4% que pensa nun circuíto pecho.

- De novo estamos nunha quinta parte de respostas correctas.

Un 15´1% afirma que non se move (aínda que o un alumno dá tamén como posibilidade que volte ó punto de partida). A expresión de *v(t)* non suxire precisamente que a velocidade sexa 0, o cal é indicativo de que se fai un uso mecánico e non significativo da fórmula da velocidade.

Un 4´7% asignan á integral carácter explícito de velocidade ("a velocidade total é 0") ou implícito de aceleración ("a velocidade é constante"), a pesar de que o enunciado recorda que a velocidade é a derivada do espacio.

- Isto último parece indicar que non está o suficientemente clarificada a idea de que a función da que se calcula unha primitiva é unha derivada desta, a pesar de que, na meirande parte dos casos, é o punto de arranque da instrucción: "a integración é a operación inversa da derivación".

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

- O resultado é negativamente sorprendente, xa que soamente un estudiante (dos aprobados) fai referencia á ida e volta, e ningún ó circuito pechado.
- Os que afirman que non se move son agora o 45´8% (o 51´2% nos aprobados), o que non deixa lugar a dúbidas sobre o uso rutineiro e non significativo da fórmula da velocidade.
- Son agora máis, o 11´9%, os que asignan á integral carácter de velocidade ou de aceleración, a pesar de que o enunciado recorda que a velocidade é a derivada do espacio (12´2% entre os aprobados).
- O 11´9% (12´2% entre os aprobados) non dá ningunha explicación ó feito de que a integral sexa 0.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

- O resultado non debera considerarse moi alentador, pero á vista do anterior pode sorprender positivamente: un 55% fai unha interpretación correcta.
  - O 48´4% sinalan ida e volta, e o 6´5% refírese a un circuíto pecho.
- Os que afirman que non se move son agora certamente poucos: o 9´7%.
- Pero aínda o 32´3% non dá ningunha explicación.

NOTA: Entre os 58 alumnos do CAP, soamente o 41% fai unha interpretación correcta.

Entre o alumnado de "sociais":

- O 8´3% dos estudiantes fan referencia á ida e á volta, e ningún ó circuito pechado.
- Os que afirman que non se move son agora o 18´7% (aínda que un deles dá tamén a posibilidade de que o ciclista volvese ó punto de partida).
- Un alumno asigna á integral carácter explícito de velocidade ("a velocidade é 0").
- O 33´3% non dá ningunha explicación ó feito de que a integral sexa 0.

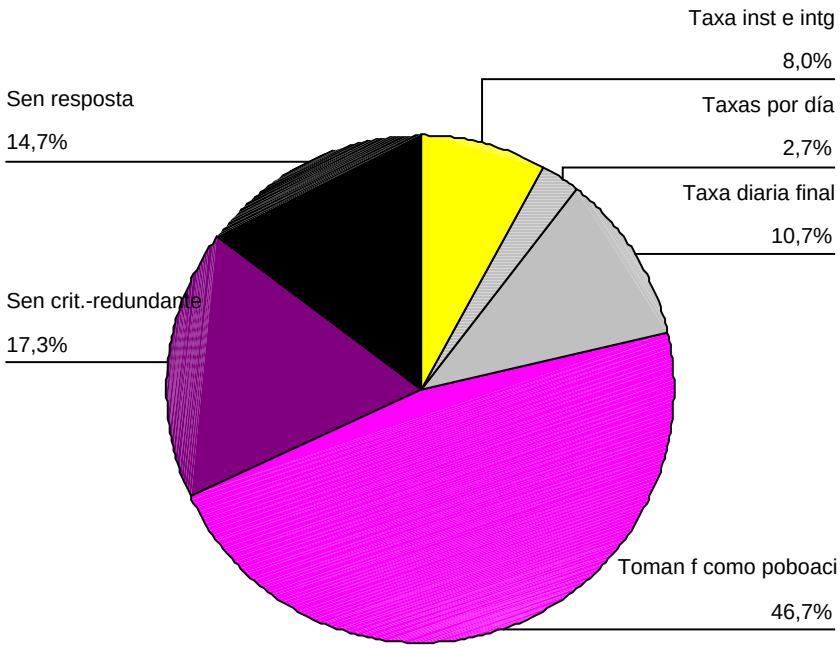
BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

3.10.- Nun laboratorio estase a facer un cultivo de bacterias nun medio agresivo; estas están reproducíndose aleatoriamente de xeito case continuo.

Experimentalmente estableceuse que a taxa de crecemento nun instante determinado vén dada pola fórmula $f(t) = 200 \cdot e^{0'1t}$, onde t é o tempo en días transcorrido dende o inicio do experimento, e *f(t)* expresa bacterias/día.

¿Que poboación aproximada podemos esperar para o décimo día, se ó inicia-lo experimento había 370 bacterias? (Toma $e \approx 2'7$).

3.10	Frecuencia	%	% acumulada
Taxa de variación instantánea e integral	6	8,0	8,0
Empregan taxas diarias	2	2,7	10,7
Unha única taxa, *f(10)*	8	10,7	21,3
Toman f como a función poboación	35	46,7	68,0
Sen criterio- redundante	13	17,3	85,3
Non responden	11	14,7	100,0
Total	75	100,0	



3.10 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Taxa de variación instantánea e integral	8,0	6,5	20,0	35,0
Empregan taxas diarias	2,7	6,5	50,0	
Unha única taxa, *f(10)*	10,7	9,7		
Toman f como a función poboación	46,7	58,1	30,0	45,0
Sen criterio- redundante	17,3	6,5		10,0
Non responden	14,7	12,9		10,0

Valoracións

Colectivo de referencia

Soamente o 8% traballa efectivamente coa taxa de variación instantánea e resolve o problema por integración.

Un 2´7% empregan como taxas medias de variación diaria as taxas correspondentes ás unidades enteiras, o que posibilita obter unha aproximación á solución, pero non fan constar esta circunstancia se non que propoñen o seu cálculo como a solución desexada.

Un 10´7% determinan unha única taxa de variación, e tómana como unha taxa de variación media para todo o período, tamén sen facelo constar, aportando un resultado moi distante da solución.

O 46´7% toma a función *f(t)* como a función poboación, a pesar de que se explicita no enunciado que a dita función é a taxa de crecemento, e que expresa bacterias/día e non bacterias.

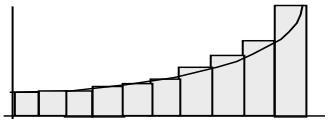
Os anteriores resultados indican as carencias de conceptualización acerca do que significa matematizar unha situación (neste caso discreta, mediante unha función continua) e, unha vez máis, as negativas consecuencias da falta de formación na fenomenoloxía da integración:

- O excesivo (e moitas veces exclusivo) protagonismo do cálculo de áreas como xénese e aplicación da integral definida, ten un notorio inconveniente: promove unha visión estática da problemática que se

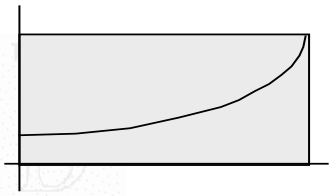
estudia, ocultando os procesos de variación que subxacen no cálculo, a pesar de que se declaren estes oficialmente ó presenta-la integración como a "operación" inversa da derivación.

A falta de hábitos na utilización de diferentes cadros de representación como recurso para pensar mellor, ponse de manifesto na ausencia de representacións gráficas do problema, o que podería contribuír notoriamente a unha mellor comprensión del e á súa solución.

- Particularmente, co uso de taxas diarias faríase patente que estariamos reconstruíndo outra vez a integral.



- No caso de empregar unha única taxa final, poñeríase de manifesto a desproporción do cálculo realizado suxerindo, alomenos, o uso dunha taxa intermedia.



Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

Soamente o 6´5% traballa coa taxa de variación instantánea e resolve o problema por integración. Peor aínda entre os aprobados, o 4´3%.

Outro 6´5% emprega como taxas medias de variación diaria as taxas correspondentes ás unidades enteiras, sen facer constar esta circunstancia senón como a solución. O 4´3% entre os aprobados.

Un 9´7% determinan unha única taxa de variación, e tómana como unha taxa de variación media para todo o período, tamén sen facelo constar, aportando un resultado moi distante da solución. Ningún deles está entre os aprobados.

O 58´1% toma a función *f(t)* como a función poboación. O 69´6% entre os aprobados.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

Aínda sendo notoriamente superior, é soamente o 20% o que traballa coa taxa de variación instantánea e resolve o problema por integración.

O 50% emprega como taxas medias de variación diaria as taxas correspondentes ás unidades enteiras, sen facer constar esta circunstancia senón como a solución.

Aínda hai un 30% que toma a función *f(t)* como a función poboación.

Entre o alumnado de "sociais":

O 35% traballa coa taxa de variación instantánea e enfoca o problema por integración.

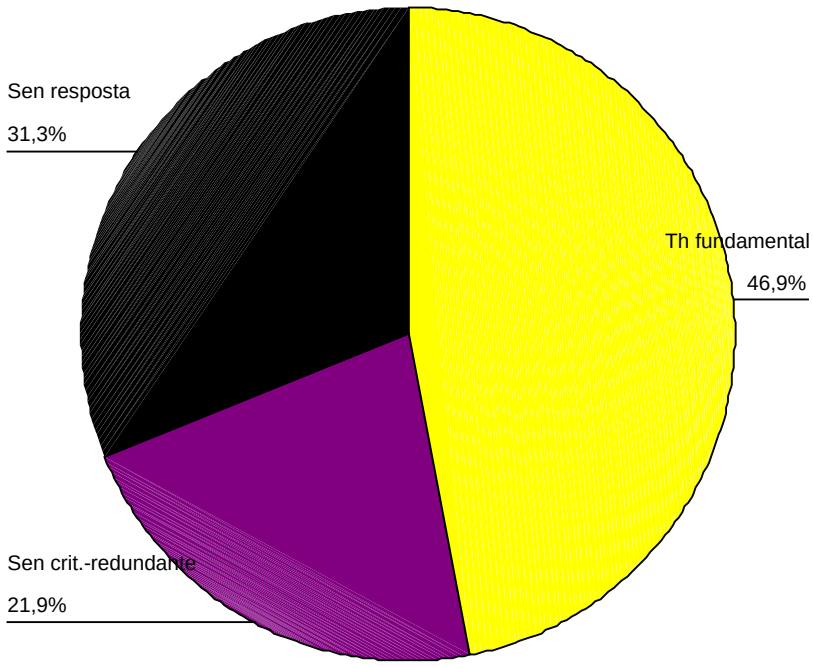
Non se dá ningún caso de empregar taxas medias de variación diaria nin unha taxa de variación media para todo o período.

Un 45% toma a función *f(t)* como a función poboación.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

4.1.- Sabendo que para calquera t, $\int_0^t f(x)\,dx = 2^t - 1$, ¿de que función f se trata?

4.1	Frecuencia	%	% acumulada
Derivan o segundo membro (th. fundamental)	15	46,9	46,9
Regra de Barrow	0	0,0	46,9
Integran o segundo membro	0	0,0	46,9
Sen criterio- redundante	7	21,9	68,8
Non responden	10	31,3	100,0
Total	32	100,0	



4.1 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Derivan o segundo membro (th. fundamental)	46,9	20,0	80,0	5,0
Regra de Barrow	0,0	15,0	10,0	15,0
Integran o segundo membro	0,0	5,0		20,0
Sen criterio- redundante	21,9	45,0	10,0	40,0
Non responden	31,3	15,0		20,0

Valoracións

Colectivo de referencia

Non chegan a se-la metade (46´9%) os que interpretan a relación fundamental do cálculo, entre derivación e integración, enunciada como introducción do tema e estudiada formalmente despois, como teorema central.

Ningún estudiante intenta a reconstrucción da regra de Barrow, aínda que parece facilmente suxerible polo formato da expresión.

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

Incluso lonxe de chegar á metade (35%) están os que respostan correctamente, ou con pequenos erros de cálculo. (Xa máis perto nos aprobados: 42´9%):

- O 20% recorre á relación fundamental do Cálculo (28´6% nos aprobados).
- Outro 15% reconstrúe a regra de Barrow (14´3% nos aprobados).

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

Podemos considerar que para estes estudiantes a cuestión non presenta dificultade, xa que o 90% responde correctamente:

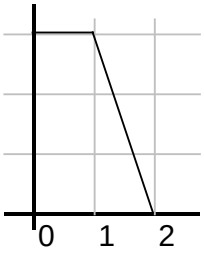
- O 80% pola relación fundamental do cálculo.
- O 10% reconstrúe a regra de Barrow.

Entre o alumnado de "sociais":

O 20% respostan correctamente:

- O 5% recorre á relación fundamental do Cálculo.
- Outro 15% reconstrúe a regra de Barrow.

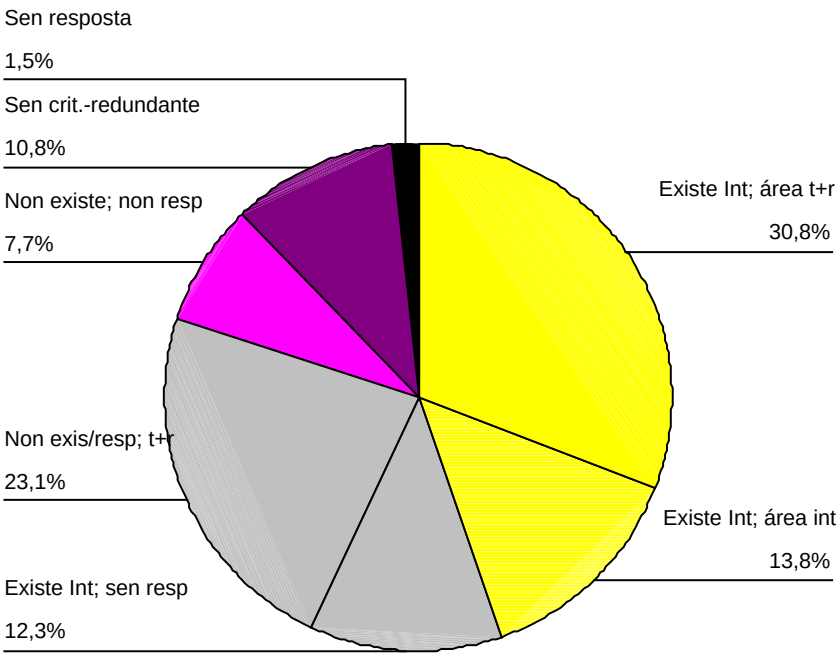
4.3.- Sendo f a función do debuxo, definida no intervalo [0, 2].



a) ¿Existe $\int_0^2 f(x)dx$? Xustifica a resposta.

b) ¿Pódese calcula-la área entre a gráfica desa función e o eixo horizontal, nese mesmo intervalo, por fórmulas de figuras coñecidas? ¿Como?

4.3	Frecuencia	%	% acumulada
Existe integral; área por triáng.+rect.	20	30,8	30,8
Existe integral; área integrando por subintv.	9	13,8	44,6
Existe integral; área sen resposta	8	12,3	56,9
Non existe/non responde; área por triáng.+rect.	15	23,1	80,0
Non existe integral; área non responde	5	7,7	87,7
Non existe integral nin área	0	0,0	87,7
Sen criterio- redundante	7	10,8	98,5
Non responden	1	1,5	100,0
Total	65	100,0	



4.3 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Existe integral; área por triáng.+rect.	30,8	21,1	83,9	17,8
Existe integral; área integrando por subintv.	13,8	2,6	6,4	2,2
Existe integral; área sen resposta	12,3	26,3		40,1
Non existe/non responde; área por triáng.+rect.	23,1	15,8	9,7	8,9
Non existe integral; área non responde	7,7	7,9		11,1
Non existe integral nin área	0,0	5,3		4,4
Sen criterio- redundante	10,8	2,6		
Non responden	1,5	18,4		15,5

Valoracións

Colectivo de referencia

Soamente o 44´6% manteñen que existe integral e que é posible determina-la área (incluíndo os que propoñen determinala por integración). Porcentaxe moi escasa tendo en conta que na instrucción recibida a integral defínese como unha área ou, viceversa, a área como unha integral, e que a figura do problema delimita claramente un recinto plano.

O 12´3% afirma que si existe a integral, pero non responde sobre se é posible calcula-la área. Poderiamos interpretar ó seu favor que a expresión do enunciado "fórmulas de figuras coñecidas" os despistase, aínda que sería sorprendente que non recoñecesen, alomenos, un trapecio.

Un 30´8% afirma que non existe a integral ou non se pronuncia ó respecto. Deles, o 23´1% propoñen calcula-la área por triángulos e rectángulos, mentres un 7´7% non se pronuncia sobre a área.

- Nese 23´1% maniféstase tamén que non sempre a área actúa de soporte xeométrico da integral, a pesar da identificación explícita que se fai.

En canto ás explicacións, estas son moi escasas, observándose que:

- Un 6´5% xustifican a non existencia da integral dicindo que a función non é continua, o que indica erróneas concepcións das nocións de continuidade e derivabilidade, e carecer dun apoio gráfico axeitado.

- Outro 6´5% xustifícao porque non é derivable, o que mostra de novo a confusión entre ser derivable e se-la derivada doutra función.

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

Soamente o 23´7% manteñen que existe integral e que é posible determina-la área (incluíndo os que propoñen determinala por integración). Porcentaxe que mellora un pouco entre os aprobados (29´6%).

O 26´3% afirma que si existe a integral, pero non responde sobre se é posible calcula-la área (descende, favorablemente, ó 14´8% entre os aprobados).

Un 29% afirma que non existe a integral ou non se pronuncia ó respecto (32´3% entre os aprobados). Deles, o 15´8% (14´8%) propoñen calcula-la área por triángulos e rectángulos, mentres un 7´9% (11´1%) non se pronuncia sobre a área. O restante 5´3% (7´4%) afirma que tampouco existe área.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

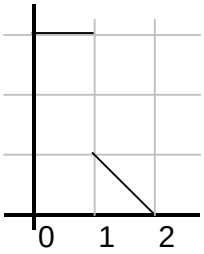
A cuestión presenta poucas dificultades, xa que o 90´3% afirman que existe a integral e que se pode calcula-la área.

Pero aínda o restante 9´7% que si calcula a área, afirma que non existe a integral.

Entre o alumnado de "sociais":

- O 20% manteñen que existe integral e que é posible determina-la área (incluíndo os que propoñen determinala por integración).
- O 40% afirma que si existe a integral, pero non responde sobre se é posible calcula-la área.
- Un 24´4% afirma que non existe a integral ou non se pronuncia ó respecto. Deles, o 8´9% propoñen calcula-la área por triángulos e rectángulos, mentres un 11´1% non se pronuncia sobre a área. O restante 4´4% afirma que tampouco existe área.

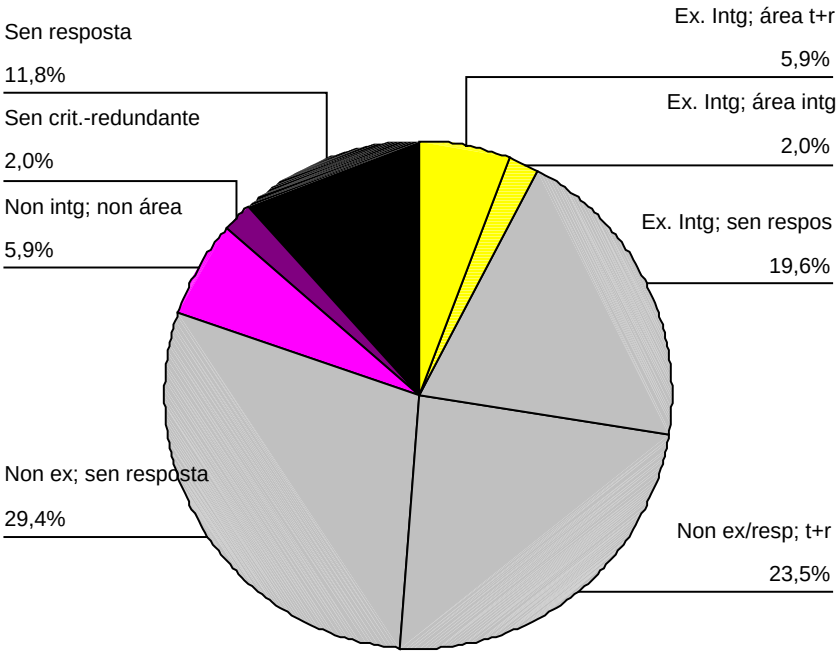
4.4.- Sendo f a función do debuxo, definida no intervalo [0, 2].



a) ¿Existe $\int_0^2 f(x)dx$? Xustifica a resposta.

b) ¿Pódese calcula-la área entre a gráfica desa función e o eixo horizontal, nese mesmo intervalo, por fórmulas de figuras coñecidas? ¿Como?

4.4	Frecuencia	%	% acumulada
Existe integral; área por triáng.+rect.	3	5,9	5,9
Existe integral; área integrando por subintv.	1	2,0	7,8
Existe integral; área sen resposta ou non se pode	10	19,6	27,5
Non existe; área por triáng.+rect.	12	23,5	51,0
Non existe integral; área non responde	15	29,4	80,4
Non existe integral nin área	3	5,9	86,3
Sen criterio- redundante	1	2,0	88,2
Non responden	6	11,8	100,0
Total	51	100,0	



4.4 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Existe integral; área por triáng.+rect.	5,9	16,7	33,3	
Existe integral; área integrando por subintv.	2,0	5,6	44,4	10,5
Existe integral; área sen resposta ou non se pode	19,6	16,7		42,1
Non existe ou non responde; área por triáng.+rect.	23,5	27,8	22,2	10,5
Non existe integral; área non responde	29,4	5,6		10,5
Non existe integral nin área	5,9			5,3
Sen criterio- redundante	2,0	16,7		
Non responden	11,8	11,1		21,1

Valoracións

Colectivo de referencia

Respecto á cuestión anterior, na que había un 56´9%, descenden agora ó 27´5% os que sosteñen que existe a integral.

- Unicamente o 7´9% manteñen que existe integral e que é posible determina-la área (incluíndo os que propoñen determinala por integración).
- Podería pensarse, tendo en conta que na instrucción recibida integral definida e área identifícanse (salvando a cuestión do signo), que a maior dificultade radica na percepción dunha área baixo unha gráfica descontinua, xa que o debuxo non mostra explicitamente un recinto; e o feito de non percibiren esta disuaríaos da posible existencia da integral.
  - Tampouco agora a área actúa de soporte xeométrico da integral.
- Pero é que hai un 19´6% que si afirma a existencia da integral e non se pronuncia ou nega a existencia da área. Isto está indicando que incluso a identificación da integral definida coa área pode ser moito máis débil do presumible tendo en conta a formación recibida.
  - Poderiamos interpretar ó seu favor que a expresión do enunciado "fórmulas de figuras coñecidas" os despistase, aínda que non é

sostible que se "pensasen" a integral en termos de área baixo a gráfica, non recoñecesen o rectángulo e o triángulo.

- O 23´5% propoñen calcula-la área por triángulos e rectángulos.

Un 58´8% afirma que non existe a integral.

- Un 29´4% non se pronuncia sobre a área.
- O 5´9% afirma que tampouco existe a área.
- Un 43´1% xustifican a inexistencia da integral dicindo que a función non é continua, o que indica ata ónde pode ser importante a errónea asociación destes dous conceptos, á que xa nos temos referido.
- Aínda o 3´9% xustifícao porque non é derivable.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

Respecto á cuestión anterior, na que había un 50%, descenden agora ó 38´9% os sosteñen que existe a integral; descenso moito menos acusado que nos universitarios. De maneira semellante, entre os aprobados pásase do 59´3% ó 46´7%.

- A pesar deste dato positivo, unicamente o 22´2% (26´7% entre os aprobados) manteñen que existe integral e que é posible determina-la área (incluíndo os que propoñen determinala por integración)
- Ningún afirma que non hai integral nin tampouco área.
- O restante 16´7% afirma a existencia da integral e non se pronuncia ou nega a existencia da área.

Un 33´4% afirma que non existe a integral.

- O 27´8% propoñen calcula-la área por triángulos e rectángulos.
- Un 26´6% xustifican a inexistencia da integral dicindo que a función non é continua.
- Ningún o xustifíca por non ser derivable.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

- En xeral a resposta é correcta (77´7%), pero ó contrario dos colectivos anteriores, nos que a alternativa xeométrica (rectángulo e triángulo) triplicaba a integración por subintervalos, a tendencia parece inverterse: 44´4% por subintervalos fronte ó 33´3% por figuras.
- Non deixa de resultar importante o segmento que afirma que non existe a integral, pero que si se pode determinar a área: 22´2%, semellante en porcentaxe ó dos colectivos anteriores: 23´5 nos alumnos de 1º curso universitario e 26´7% nos aprobados de COU-Bach.

Entre o alumnado de "sociais":

Respecto á cuestión anterior, na que había un 60%, son agora ó 52´6% os sosteñen que existe a integral; descenso pouco acusado.

- A pesar deste dato positivo, unicamente o 10´5% manteñen que existe integral e que é posible determina-la área (incluíndo os que propoñen determinala por integración), mentres na anterior eran o 20%.
- O restante 49´5% afirma a existencia da integral e non se pronuncia ou nega a existencia da área.

Un 26´3% afirma que non existe a integral.

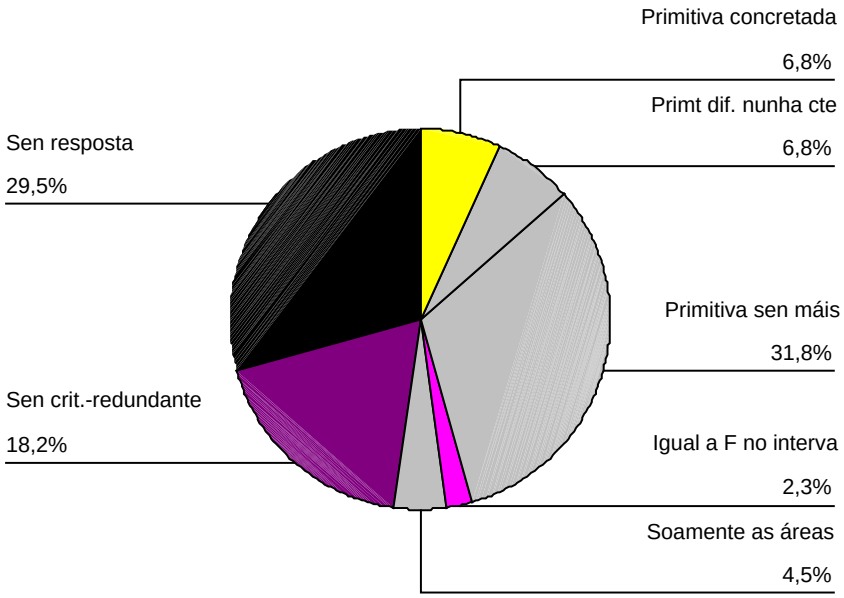
- O 10´5% propoñen calcula-la área por triángulos e rectángulos.
- Un alumno xustifica a non existencia da integral dicindo que a función non é continua.
- Ningún o xustifíca por non ser derivable.

4.13.- O teorema fundamental do cálculo integral afirma que se f é unha función continua nun intervalo [a, b], a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é unha primitiva de f no dito intervalo.

Sexa c un punto entre *a* e *b*, definimos $G(x) = \int_c^x f(t)dt$ para tódolos *x* de [c, b] , ¿que relación ten con *F(x)* ?

¿Que representan ou expresan *F(x)* e *G(x)*?

4.13	Frecuencia	%	% acumulada
Outra primitiva; expresan a relación concreta	3	6,8	6,8
Outra primitiva; diferéncianse nunha cte.	3	6,8	13,6
Outra primitiva, sen máis	14	31,8	45,5
Igual a *F* no intervalo [c, b]	1	2,3	47,7
Unicamente indican as áreas	2	4,5	52,3
Sen criterio- redundante	8	18,2	70,5
Non responden	13	29,5	100,0
Total	44	100,0	



4.13 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Outra primitiva; expresan a relación concreta	6,8	4,2	13,4	
Relación concreta, sen mención a primitivas			46,6	
Outra primitiva; diferéncianse nunha cte.	6,8	8,3		
Outra primitiva, sen máis	31,8	25,0		23,1
Igual a *F* no intervalo [c, b]	2,3			
Unicamente indican as áreas	4,5	4,2	26,8	
Sen criterio- redundante	18,2	25,0	6,7	7,7
Non responden	29,5	33,3	6,7	69,2

Valoracións

Colectivo de referencia

Case a metade (45´5%) refírense a que se trata doutra primitiva, especificando algúns que se diferencian nunha constante.

- Unicamente o 6´8% expresa a relación entre *F* e *G*, a pesar de que a aditividade sobre o intervalo é un dos resultados que se lles xustifican, e que manexan con frecuencia nas aplicacións ó cálculo de áreas.
  - Certamente, os intervalos de aplicación teórica ou práctica preestablécense con carácter fixo, ben nos enunciados das propiedades, ben determinando os puntos extremos.
- Os restantes casos non resultan moi gratificantes, xa que o propio enunciado designa a *F* como unha primitiva, e *G* ten un formato semellante. Por outra parte, dicir ademais que se diferencian nunha constante, sen intentar sequera determinala, non é máis que unha constatación rutineira dun resultado moi manido.

Entre eses, soamente o 4´5% indica as áreas asociadas ás respectivas funcións.

- Unha vez máis denótase unha falta de actitude tendente a representa-las situacións no cadro xeométrico como axuda a pensar, o cal resulta incoherente cunha instrucción baseada na áreas.

- Aínda un 4´5% máis indican as correspondentes áreas, pero non aluden á primitivas ou a relacións máis concretas.

Nos libros de texto e nas entrevistas puidemos comprobar que a constante de integración non é correspondida no cadro xeométrico. Incorpárase ó coñecemento do alumno na expresión analítica da función primitiva xenérica.

- Unicamente atopamos nalgúns textos un exercicio no que se invita a reflexionar sobre cómo son as gráficas de dúas funcións que se diferencian nunha constante, non sobre o que representan polo feito de seren dúas primitivas dunha mesma función.

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

Descenden ó 37´5% os que se refiren a outra primitiva (50% nos aprobados).

- Entre eses, soamente o 4´2% (7´1% nos aprobados) presentan as respectivas funcións. Unha vez máis denótase unha falta de actitude tendente a representalas.

Outro 4´2% indica as correspondientes áreas, pero non alude a primitivas ou a relacións máis concretas, porcentaxe que sobe ó 10% entre os aprobados.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

- O 60% expresa a relación concreta que existe entre as dúas funcións, aínda que a maioría destes (46´6%) non aluden a que *G* sexa outra primitiva, por considerarse obvio.
- Sen embargo, a porcentaxe dos que, sen expresa-la relación entre as funcións, si indican as áreas, é do 26´8%.

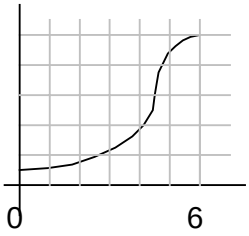
Entre o alumnado de "sociais":

O 23´1% refírense a outra primitiva, pero ningún expresa a relación concreta entre ámbalas dúas.

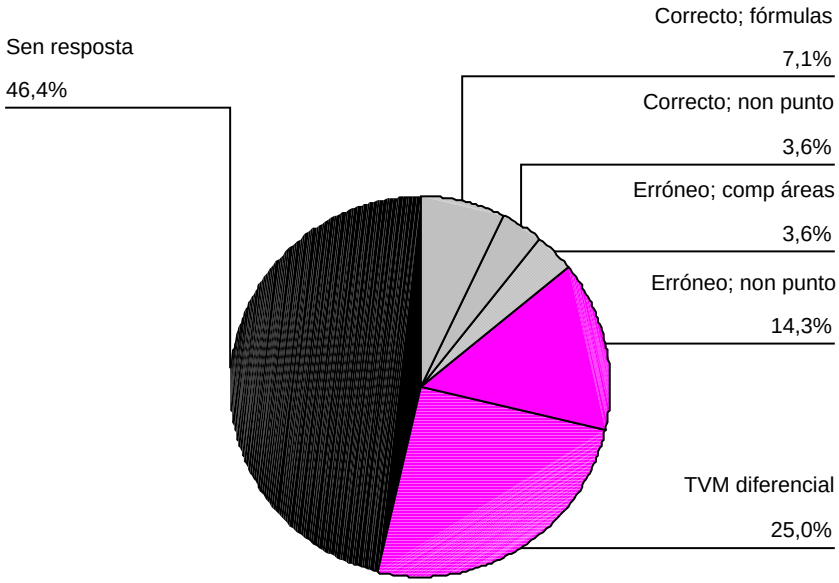
- Deles o 15´4% indica as áreas respectivas, mentres os restantes soamente a indican para *F*. Os restantes non responden ou fano sen criterio.

4.15.- Escribe o enunciado do Teorema do Valor Medio do Cálculo Integral.

Sinala aproximadamente o punto do intervalo [0, 6] ó que alude o teorema. Xustifica a resposta.



4.15	Frecuencia	%	% acumulada
Enunciado correcto; punto compensando áreas	0	0,0	0,0
Enunciado correcto; punto con fórmulas	2	7,1	7,1
Enunciado correcto; non continúan	1	3,6	10,7
Enunciado erróneo; punto compensando áreas	1	3,6	14,3
Enunciado erróneo; non continúan	4	14,3	28,6
Enunciado erróneo: TVM do cálculo diferencial	7	25,0	53,6
Sen criterio- redundante	0	0,0	53,6
Non responden	13	46,4	100,0
Total	28	100,0	



4.15 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Enunciado correcto; punto compensando áreas	0,0	20,0	6,7	
Enunciado correcto; punto con fórmulas	7,1	6,7	20,0	4,8
Enunciado correcto; non continúan	3,6	20,0	33,5	
Enunciado erróneo; punto compensando áreas	3,6	6,7	6,7	14,2
Enunciado erróneo; non continúan	14,3	13,3		
Enunciado erróneo: TVM do cálculo diferencial	25,0	6,7	13,3	4,8
Sen criterio- redundante	0,0	6,7		
Non responden	46,4	20,0	20,1	76,2

Valoracións

Colectivo de referencia

O 28´6% manexa os termos do enunciado, aínda que soamente a metade (14´3%) o escribe correctamente.

- Unha vez máis a falta de significado xeométrico faise patente, pois soamente o 3´6% reinterpretan o teorema en termos de áreas, mostrándonos outra incoherencia entre a instrucción impartida e os logros conseguidos con ela.

Resulta rechamante que haxa un 25% que escriban o teorema do valor medio do cálculo diferencial, xa que o enunciado é inequívoco; e especialmente porque esta cuestión figuraba cara o final da proba, cando xa tiña feito aparición varias veces a integral.

- As concepcións sobre as propiedades que se recollen nos teoremas semellan ser moi pobres. O interese desvíase cara a "frases" formais, descoidándose os significados que con elas se expresan.

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

O 66´6% manexa os termos do enunciado (70% entre os aprobados), e o 46´7% escríbeo correctamente (50% entre os aprobados).

- Unha pregunta clásica e de importancia advertida "de teoría", formulada nos termos usuais nos días inmediatos ó exame, trae consigo un alto nivel de respostas correctas, quizais menor aínda do esperado.
- Pero a segunda parte da cuestión déixanos ver de novo a falta de atribución de significado xeométrico, pois soamente o 26´7% (30% nos aprobados) reinterpretan o teorema en termos de áreas.

A confusión co teorema do valor medio do cálculo diferencial é, como se esperaba, pequena: 6´7% (10% nos aprobados).

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

Soamente o 66´6% manexa os termos do enunciado, o 60% correctamente.

- De novo a segunda parte da cuestión déixanos ve-la falta de atribución de significado xeométrico, pois soamente o 13´4% reinterpretan o teorema en termos de áreas.
- Aínda o 13´4% sofren a confusión co teorema do valor medio do cálculo diferencial, e o restante 20´1% non responde á cuestión.

Entre o alumnado de "sociais":

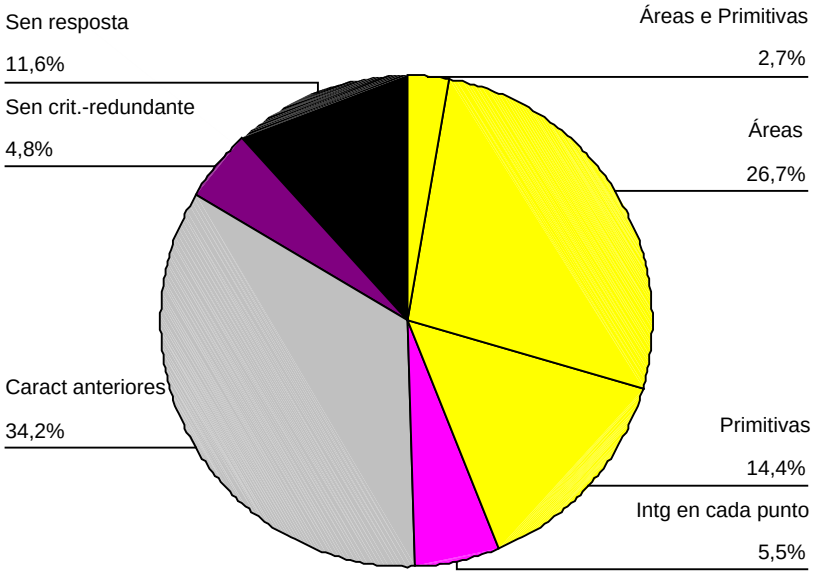
O 19% manexa os termos do enunciado, aínda que soamente o 4´8% o escribe correctamente.

- Sen embargo non é tan patente a falta de significado xeométrico, pois o 14´2% reinterpretan o teorema en termos de áreas.

Outro 4´8% escribe o teorema do valor medio do cálculo diferencial.

5.0.- ¿Que significa para ti que unha función sexa integrable nun intervalo?

5.0	Frecuencia	%	% acumulada
Áreas e primitivas	4	2,7	2,7
Áreas	39	26,7	29,5
Primitivas	21	14,4	43,8
Integración puntual	8	5,5	49,3
Características anteriores	50	34,2	83,6
Sen criterio- redundante	7	4,8	88,4
Non responden	17	11,6	100,0
Total	146	100,0	



5.0 (%)	1º-Un.	COU-c	Mat.	Sociais
Por medio de sumas			30,8	
Áreas e primitivas	2,7	10,1	7,7	2,9
Áreas	26,7	16,5	33,3	29,4
Primitivas	14,4	30,4	17,9	17,6
Integración puntual	5,5	2,5		7,4
Características anteriores	34,2	20,3	10,3	19,1
Sen criterio- redundante	4,8	6,3		11,8
Non responden	11,6	13,9		11,8

Valoracións

Colectivo de referencia

Soamente o 43´8% expresa ideas que lle foron aportadas no estudio específico da integración (integral como área ou como primitiva).

- Acompáñanas doutras consideracións:
  - Continua: .... 10´3%
  - Derivable: .... 1´4%
  - Continua e derivable: .... 4´8%
- Dende o punto de vista do desenvolvemento usual do tema, a continuidade vén asociada á integrabilidade polo que poderiamos considerar que non é sorprendente que o 14´5% inclúan esa propiedade.
  - Diferente é xa o caso da derivabilidade (5´6%).
- Tamén no sector de "características anteriores" (34´2%) responden:
  - Continua: .... 13´7%
  - Derivable: .... 2´7%
  - Continua e derivable: 13%
- Aínda dous alumnos do sector "integrable en cada punto" responden "continua" e outro "derivable".

En total o 42´5% consideran que unha función integrable debe ser continua no intervalo, e o 22´6% que debe ser derivable.

A pesar de que o tema foi introducido a través dun proceso de aproximación mediante sumas de rectángulos (límites ou sup/inf), non hai nin unha soa referencia a iso, nin sequera acompañando calquera das outras consideracións.

- De 34 estudiantes ós que se lles preguntou a posteriori por esta cuestión, mostrándollela graficamente, soamente 2 din *non* recordar iso. Os demais aseguran que si.
- Destes 32, 26 aseguran que nunca fixeron un exercicio dese tipo, que soamente recibiron a explicación; 3 declaran que si fixeron algún exercicio, e outros 3 din non recordalo.

O 4´8% que corresponde á categoría xenérica "Sen criterio – redundante", maioritariamente refírese a "que teña integral".

Entre o alumnado de COU-2º Bach.:

O 57% expresa ideas que lle foron fornecidas no estudio específico da integración (integral como área ou como primitiva). Sobe ó 65´5% nos aprobados.

- Acompáñanas doutras consideracións:
  - Continua: .... 10´1% (12´7% nos aprobados).
  - Derivable: .... 1´3% (ningún nos aprobados).
  - Continua e derivable: .... 5´1% (3´6% nos aprobados).
- No sector de "características anteriores" atopamos un 20´3% das respostas (20% entre os aprobados), das cales:
  - Continua: .... 12´7% (o mesmo nos aprobados)
  - Derivable: .... 2´5% (1´8% nos aprobados)
  - Continua e derivable: .... 1´3% (1´8% nos aprobados)
- Tampouco hai ningunha referencia a procesos de aproximación mediante sumas de rectángulos.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

O 89´7% expresa ideas que lle foron fornecidas no estudio específico da integración, e agora un 30´8% fan referencia a procesos de aproximación mediante sumas de rectángulos. Acompáñanas doutras consideracións:

- Continua: .... 2´6%
- Nº finito de descontinuidades: .... 2´6%
- Acoutada: .... 7´7%

No sector "características anteriores" atopamos un 10´3% das respostas:

- Continua: .... 2´6%
- Nº finito de discontinuidades: .... 2´6%
- Derivable: .... 2´6%

Entre o alumnado de "sociais":

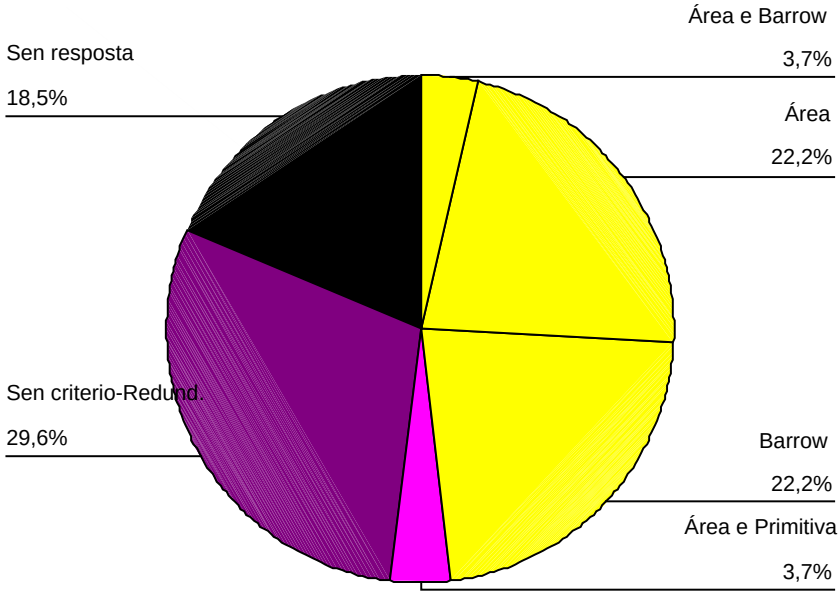
O 50% expresa ideas que lle foron fornecidas no estudio específico da integración (integral como área ou como primitiva).

- Moi poucos acompáñanas doutras consideracións:
  - Continua: .... 1´5%
  - Derivable: .... 4´4%
  - Continua e derivable: 0%
- No sector "características anteriores" atopamos un 19´1% das respostas:
  - Continua: .... 2´9%
  - Derivable: .... 8´8%
  - Continua e derivable: .... 2´9%
- Tampouco hai ningunha referencia a procesos de aproximación mediante sumas de rectángulos.

MIGUEL DE CERVANTES

5.1.- Define $\int_a^b f$.

5.1	Frecuencia	%	% acumulada
Área e Barrow	1	3,7	3,7
Área	6	22,2	25,9
Barrow	6	22,2	48,1
Área e Primitiva	1	3,7	51,9
Sen criterio- redundante	8	29,6	81,5
Non responden	5	18,5	100,0
Total	27	100,0	



5.1 (%)	1º-Un.	Mat.
Por sumas		55,6
Área e Barrow	3,7	
Área	22,2	33,3
Barrow	22,2	11,1
Área e Primitiva	3,7	
Sen criterio- redundante	29,6	
Non responden	18,5	

Valoracións

Colectivo de referencia

Esta pregunta, ó igual que as que seguen, teñen carácter de complementariedade da 5.0 e foron introducidas nos últimos segmentos da mostra co obxecto de afondar máis na percepción global do tema coa que se queda o alumno.

Observamos unha porcentaxe semellante á da cuestión 5.0 que se refiren á área (sobre un 30%), dos cales un 7´5% engaden algunha outra consideración.

- Ningún alumno fai referencia á suma de rectángulos.

Tamén hai unha alta porcentaxe (26%) que "substitúen" unha posible definición pola fórmula de Barrow que permite obte-lo valor numérico da expresión, aínda que uns poucos engaden unha referencia á área.

- Isto interpretámolo como unha manifestación do predominio abusivo dos aspectos algorítmicos sobre os conceptuais.

Resaltamos que un 29´6% diga simplemente que "é a integral no intervalo" (especificando ou non se é definida), e que un 18´5% non responde nada, porcentaxes que en conxunto triplican as correspondentes na cuestión anterior.

- Pero é que o enunciado ten agora unha redacción totalmente impersoal e academicista: "define", o que retrae dun xeito importante ó alumnado destas idades que, como podemos comprobar de cotío nas aulas universitarias, interiorizan o verbo "definir" como *repetir coa maior exactitude posible* unha definición pre-establecida, e non como expresar con precisión os significados que eles lles atribúen ós obxectos.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

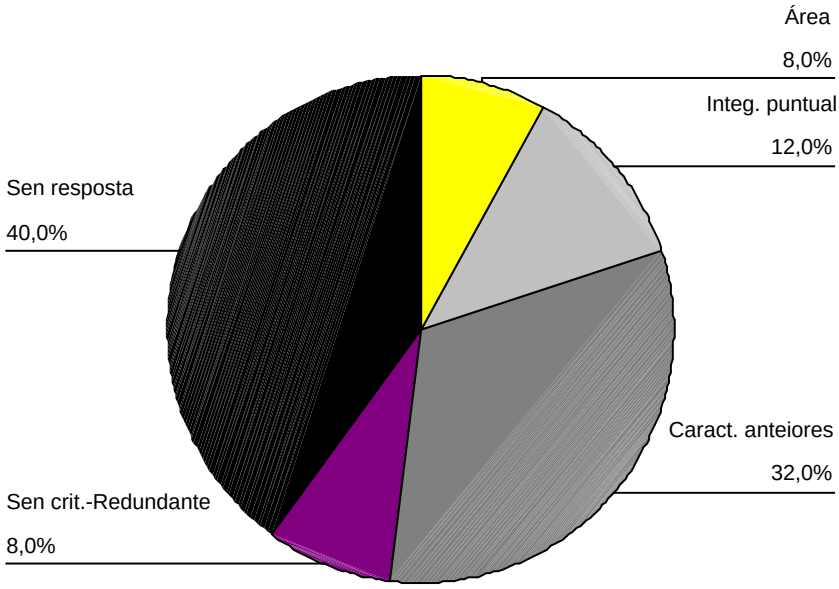
No sentido a que nos referiamos no parrágrafo anterior, o termo "define" parece invitar a intentar unha expresión máis formal, xa que son agora o 55´6% os que empregan "sumas de rectángulos", fronte ó 30´8% da cuestión anterior onde o enunciado era máis persoal.

Observamos unha porcentaxe non moi distante á da cuestión 5.0 que se refiren á área: 33´3% agora, mentres na anterior era do 41%.

O 11´1% "substitúe" unha posible definición pola fórmula de Barrow.

5.2.- ¿Que características debe ter un problema para que poida resolverse por integración?

5.2	Frecuencia	%	% acumulada
Áreas	2	8,0	8,0
Integración puntual	3	12,0	20,0
Características anteriores	8	32,0	52,0
Sen criterio- redundante	2	8,0	60,0
Non responden	10	40,0	100,0
Total	25	100,0	



5.2 (%)	1º-Un.	Mat.
Debe intervir unha derivada		6,7
Áreas	8,0	20,0
Integración puntual	12,0	
Características anteriores	32,0	26,7
Debe intervir unha función que teña primitiva	32,0	40,0
Sen criterio- redundante	8,0	
Non responden	40,0	6, 7

Valoracións

Colectivo de referencia

No sector "características anteriores", de porcentaxe semellante ó da cuestión 5.0 (antes 34´2%, agora 32%), houbo catro tipos diferentes de resposta, 8% en cada unha, referidas a características dunha función que interveña no problema:

- Continua
- Derivable
- Continua e derivable
- Que a función estea definida

Ningunha resposta, nin sequera as que propoñen o cálculo dunha área, alude ó cálculo dunha magnitude (ou da súa variación ou incremento) a partir da súa derivada, taxa de variación ou densidade. (Os "derivable" de "características anteriores" refírense a que sexa derivable a función que se integraría, confusión que en pequenas porcentaxes se vén detectando dende anteriores cuestións).

A ausencia de perspectiva fenomenolóxica nas presentacións usuais do tema podería explicar iso.

- Particularmente alarmante é a ausencia de referencias á obtención dunha función, coñecida a súa derivada; dado que esta é a xustificación inicial do extenso cálculo de primitivas no que se prodigan os alumnos.
- Destaca ese 40% de estudiantes que non responden, ós que poderiamos engadir ese 8% "redundante" (maiormente "que haxa" ou "que se poida calcular unha integral"), o que nos parece excesivo.
  - A seguinte cuestión veu substituír a esta, por se a redacción do enunciado dificultase a resposta.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

Unicamente o 6´7% se sitúa nunha perspectiva xeral da problemática: cálculo dunha magnitude ou construcción dunha función a partir da súa derivada, taxa de variación instantánea ou densidade.

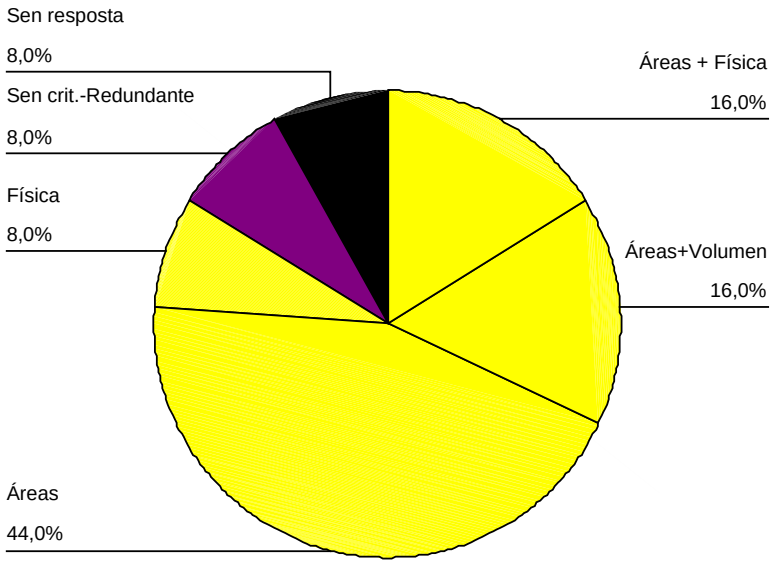
O 20% refírense exclusivamente ás áreas e o 40% a que interveña unha función que teña primitiva; porcentaxes case inversas ás da cuestión 5.0 (41% áreas e 25´6% primitivas, aínda que un 7´7% foi común estes dous tipos de resposta).

- Posiblemente a resposta maioritaria, "que a función teña primitiva", sexa unha redundancia, pois dicir "calcular unha primitiva" dende "resolver por integración" non supón achega de información; máis ben ó contrario o seu pronunciamente significa unha perda de información, pois aínda será posible resolver problemas por integración sen que se coñeza unha primitiva da función implicada, e incluso sen que tal primitiva exista.
    - No mellor dos casos aínda se estaría poñendo de manifesto, unha vez máis, a confusión reinante entre primitiva e integral.
- Quizais non teña máis valor que a resposta "que se poida integrar", que nos daban os estudiantes preuniversitarios, e que loxicamente poderían darnos tamén tódolos que non responderon, chegando daquela a ser do 48% fronte a este 40%.

O sector "características anteriores", presenta agora unha porcentaxe moito maior ca da cuestión 5.0 (antes 10´3%, agora 26´7%), 2 estudiantes din que a función debe ser continua, 1 que debe ter ó sumo un nº finito de descontinuidades e 1 que debe ser acoutada.

5.3.- ¿Que tipo de problemas se poden resolver por integración?

5.3	Frecuencia	%	% acumulada
Áreas e Física	4	16,0	16,0
Áreas e Volume	4	16,0	32,0
Áreas	11	44,0	76,0
Física	2	8,0	84,0
Sen criterio- redundante	2	8,0	92,0
Non responden	2	8,0	100,0
Total	25	100,0	



5.3 (%)	1º-Un.	Mat.
Problemas de medida		6,7
Problemas de variación		6,7
Problemas de ecuacións diferenciais		6,7
Áreas e Física	16,0	26,7
Áreas e Volume	16,0	20,0
Áreas e estatística		20,0
Áreas	44,0	13,3
Física	8,0	
Sen criterio- redundante	8,0	
Non responden	8,0	

Valoracións

Colectivo de referencia

Efectivamente o enunciado anterior (cuestión 5.2) parece pouco incitador a unha resposta, pero tampouco agora (92% de respostas) observamos que se vaia máis aló dunha simple enumeración de tipos concretos, sen entrar a considera-los trazos que permiten vinculalos ó cálculo integral.

Xa nos referimos á ausencia de perspectiva fenomenolóxica nas presentacións usuais do tema como explicación disto, agora baixo estoutra formulación.

O 76% aluden ás áreas, o que é coherente con que nas aplicacións da integral se desenvolvan maiormente (e ás veces exclusivamente) estes cálculos.

- No 16% citan tamén algunha/s magnitude física.
    - Non citan as áreas, pero si magnitudes físicas outro 8%.
- Nun 16% citan tamén o volume.

Pero soamente 1 caso (englobado na 1ª categoría de resposta), alude a calcular a partir dunha derivada, o que resulta indicativo de que a busca de funcións, a pesar da súa extensión no ámbito académico, non é percibida como unha aplicación da integración, en contraposición coas propias intencións formativas.

No alumnado da licenciatura de matemáticas:

Dos 15 alumnos que responden a esta cuestión, 1 refírese a problemas de medida, 1 a problemas de variación e 1 a ecuacións diferenciais (corresponde o 6´7% a cada caso).

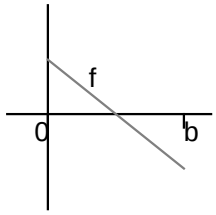
Unha porcentaxe semellante ó grupo anterior, 80%, aluden ás áreas, engadindo:

- No 26´7% algunha/s magnitude física.
- Nun 20% o volume.
- Noutro 20% nocións estatísticas.
    - Nótese que nos preuniversitarios esta última opción sería excepcional xa que non formou parte dos seus currículos, mentres que no colectivo de estudiantes de matemáticas isto é un coñecemento formal engadido.

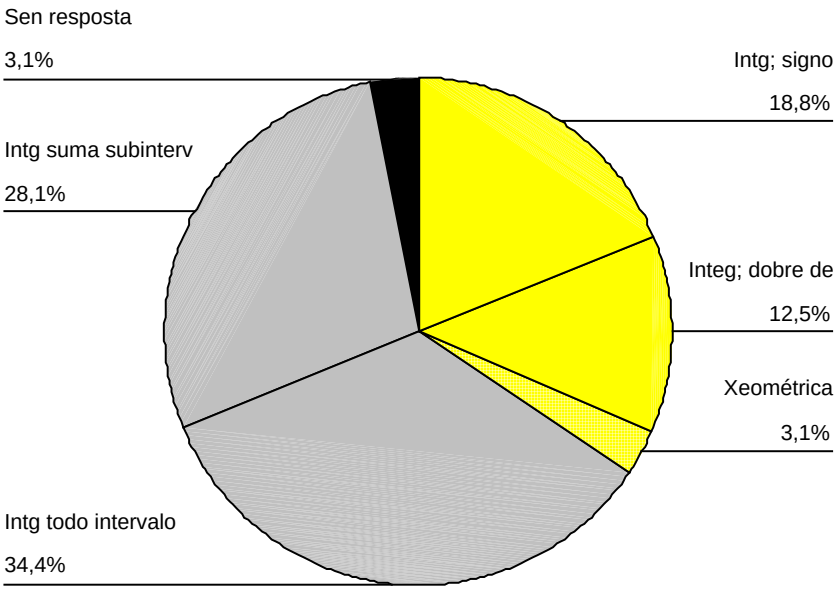
Cuestionarios de reforzo

1.1 R-1.- ¿Canto vale a área correspondente á función do gráfico, no intervalo [0, b] ?

Xustificao brevemente.



1.1-R1	Frecuencia	%	% acumulada
Integración con control do signo	6	18,8	18,8
Integración, dobre do 1º subintervalo	4	12,5	31,3
Solución xeométrica	1	3,1	34,4
Integral en todo o intervalo	11	34,4	68,8
Suma das integrais nos subintervalos	9	28,1	96,9
Sen criterio - redundante	0	0,0	96, 9
Non responden	1	3,1	100,0
Total	32	100,0	



Valoracións: unicamente se presentou no colectivo de referencia

No problema 1.1 había que presentar e resolve-la integral, e determina-los subintervalos de integración. Agora non se presenta ningún cálculo, polo cal a atención debera centrarse na cuestión do signo, único elemento de posible conflicto dado que, ademais, as figuras son simples triángulos e a función non ten ningún punto dificultoso (anguloso ou descontinuidade).

Mentres que no cuestionario inicial o problema 1.1 figuraba ó principio, antes de que se mencionasen as integrais, nesta ocasión si coñecían que o cuestionario ía dirixido ó dito tema.

- Así, a maior diferencia obsérvase entre os que responden polo dobre da integral no semi-intervalo correspondiente á parte positiva (12´5% fronte ó 7% anterior). Diferencia que se vén a compensar cos que non responden ou non presentan a integral (6´2% fronte ó 14%).

Sen embargo a similitude dos resultados é moi alta noutros apartados

- O 94% presentan a solución a través de integrais, fronte ó 86% anterior.
- O 18´8% intenta controla-lo signo, pero en realidade hai 1 estudiante (3´1%) que toma o valor absoluto da integral en todo o intervalo, o que supón o 15´7% fronte ó 14% anterior.

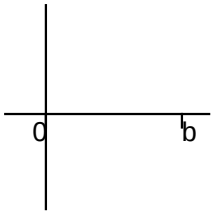
No grupo dos que propoñen a suma das integrais respectivas a cada subintervalo hai 3 alumnos (9´4%) que explicitamente lle asignan valor 0 á área, cando agora o debuxo é explícito no sentido de ocupar unha rexión non baleira.

En resumo, a valoración anterior parece confirmarse: a maioría dos estudiantes parece que non teñen unha conciencia clara da necesidade de coñecer qué rexións están sobre o eixe de abscisas e qué outras baixo el, en canto que isto vai determina-lo signo da integral podendo ocasionar que as nosas pretensións de medi-la área non se vexan satisfeitas.

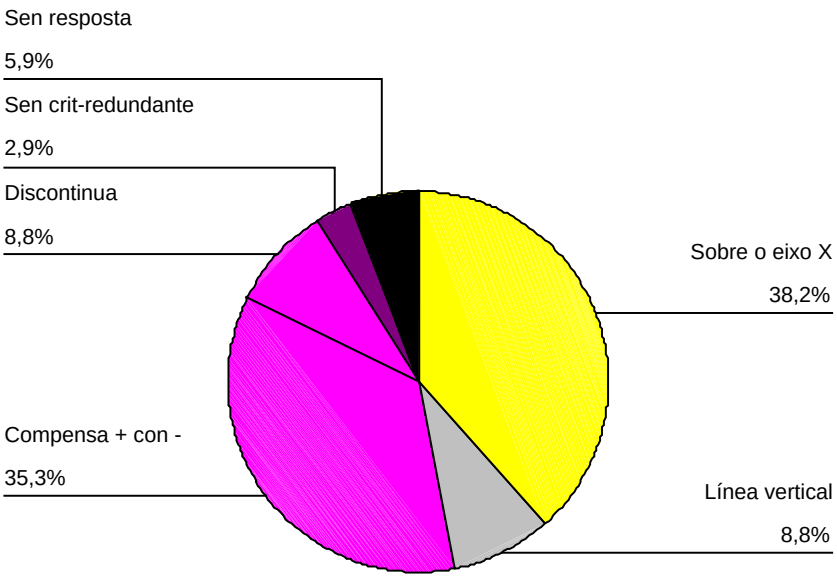
- E aínda se albisca como máis importante do que permitían pensa-las respostas a 1.1, a porcentaxe daqueles que lle atribúen valor 0 a unha área dun xeito totalmente asignificativo, xa que na anterior cuestión algúns erros obviaron o problema.

1.1 R-2.- Debuxa, a grandes riscos, unha función á que corresponda área nula no intervalo [0, b].

Xustificao brevemente.



1.1-R2	Frecuencia	%	% acumulada
Sobre o eixo horizontal	13	38,2	38,2
Segmento vertical	3	8,8	47,1
Compensa rexións sobre e baixo a horizontal	12	35,3	82,4
Función descontinua	3	8,8	91,2
Sen criterio-redundante	1	2,9	94,1
Non responden	2	5,9	100,0
Total	34	100,0	



Valoracións: unicamente se presentou no colectivo de referencia

No problema orixinal (1.1) era necesario decatarse de que deberían calcularse integrais; no reforzo anterior abondaba con relaciona-la cuestión con elas; e, nestoutro, non sería sequera necesario evocalas, aínda que o contexto de aprendizaxe as traia a colación.

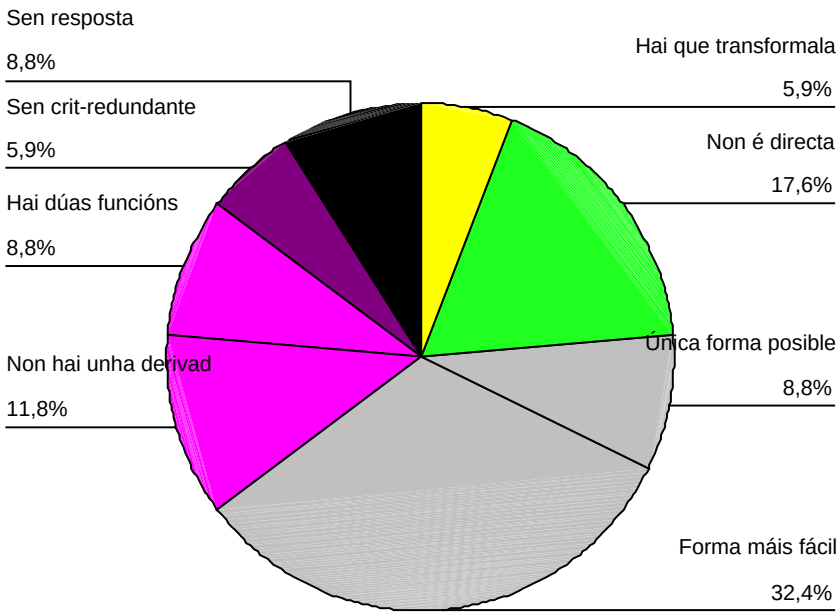
Mentres que nos exercicios anteriores os erros de cálculo ou o feito de presenta-las integrais pero non obter ou non asignar valores numéricos, ocultaban ata qué punto a idea de asignar área 0 a unha rexión extensa, non baleira, estaba erroneamente mediatizada por unha inadecuada conceptualización na aprendizaxe, esta formulación da cuestión permite agora a observación directa: o 35´3% asigna valor 0 á área cando a extensión dos recintos por riba do eixo X é igual cá dos recintos por baixo del.

- Podemos considerar aquí ese 8´8% que toma funcións descontinuas, confundindo "valer 0" con "non existir", o cal non oculta que subxaza o problema anterior, pois as súas rexións son non baleiras.
- Desta maneira chegaríamos a situa-lo problema no 44´1%.

Hai unha grande proximidade entre as porcentaxes de respostas correctas nestes dous últimos problemas, exclusivamente gráficos: 38´2% agora, fronte ó 34´4% de antes.

2.8 R.- Frecuentemente $x\cos x\,dx$ resólvese por partes; ¿por que cres que se fai así, e non directamente?

2.8-R	Frecuencia	%	% acumulada
Hai que transformala en integrais directas	2	5,9	5,9
Porque non é directa	6	17,6	23,5
Non se pode doutra maneira	3	8,8	32,4
É a maneira máis fácil	11	32,4	64,7
Porque non aparece a derivada dunha función	4	11,8	76,5
Porque hai dúas funcións	3	8,8	85,3
Sen criterio- redundante	2	5,9	91,2
Non responden	3	8,8	100,0
Total	34	100,0	



Valoracións: unicamente se presentou no colectivo de referencia

A pesar do interese xeral que se deduce das respostas, non resultou tan proveitosa como esperabamos, pois hai un sector amplo (17´6%) que unicamente declaran "porque non é directa", o que en realidade é unha resposta redundante xa que se preguntaba expresamente "¿por que non se pode facer directamente?, pero existe a posibilidade de que pensen en termos semellantes ós do primeiro sector.

Nas entrevistas que realizamos ós alumnos de COU formulámoslles a mesma pregunta e puidemos apreciar que, como sospeitabamos, tratábase máis dunha réplica lingüística que dunha reflexión en termos de transformación de funcións, derivando os comentarios a "eu nunca pensara niso e foi así como a aprendemos" ou "é así como se fai, se non ¿para que serviría o método?".

Nesa mesma tipoloxía poderíamos engloba-los que responden "non se pode doutra maneira" ou "é a maneira máis fácil".

Cuestión á parte son aqueles para quen "non aparece a derivada dunha función" ou "hai dúas funcións", que denotan erros máis profundos:

- ¿Non consiste acaso o exercicio en buscar unha/s función/s da cal $x \cdot cosx$ é a súa derivada?
- Non hai conciencia de que se trata dunha función na que nós establecemos partes por pura conveniencia. ¿Que sucedería se a expresión fose máis complexa, "con tres funcións" por exemplo, seguindo as súas maneiras de dicilo?

2.14 R (4.4R).- Referíndonos sempre a un intervalo [a, b], admitindo como certo que "se *f* é unha función continua, entón ten primitivas", ¿cales das seguintes afirmacións considerarías tamén válidas?:

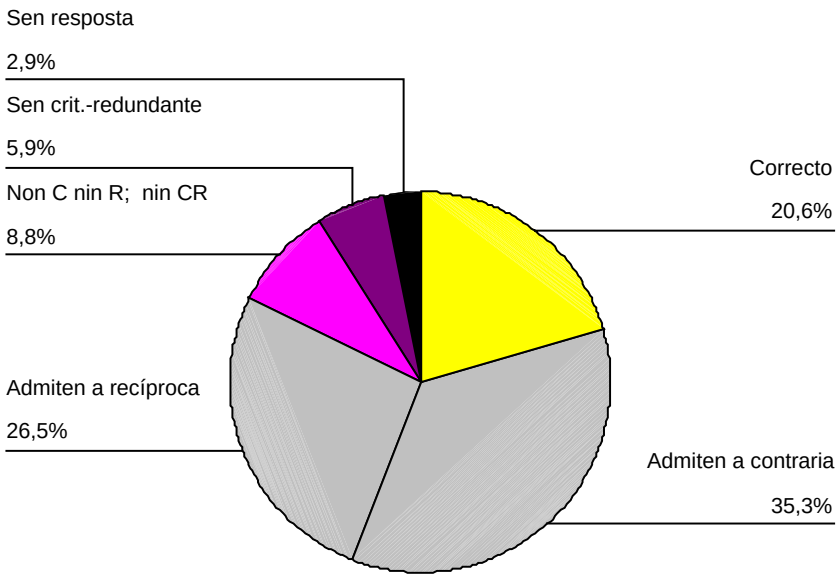
_____ "hai funcións continuas que non teñen primitivas"

_____ "se *f* é unha función que non ten primitivas, *f* non é continua"

_____ "se *f* é unha función que ten primitivas, *f* é continua"

_____ "se *f* non é continua, entón non ten primitivas"

2.14-R	Frecuencia	%	% acumulada
Correcto, soamente validan a contrarrecíproca	7	20,6	20,6
Admiten a contraria	12	35,3	55,9
Admiten a recíproca	9	26,5	82,4
Non admiten a C nin a R, pero tampouco a CR	3	8,8	91,2
Sen criterio- redundante	2	5,9	97,1
Non responden	1	2,9	100,0
Total	34	100,0	



Valoracións: unicamente se presentou no colectivo de referencia

Aínda que textualmente o enunciado se refire a primitivas, cremos que é conveniente, ademais de contrastar estes datos cos relativos ó problema 2.14 (preséntase unha función descontinua e pregúntase por algunha primitiva), comentalos tamén respecto dos obtidos na cuestión 4.4 (preséntase unha función descontinua e pregúntase pola integral), dado que a dicotomía integral/primitiva non se fai explícita na formación habitual dos estudiantes, o que propicia un "trasvase" insconsciente da discusión dun concepto ó outro.

- No problema 2.14 o 21´3% afirmaba que non tiña primitivas por non ser continua, mentres un avultado 40´4% non respondía nada.
- No 4.4 a porcentaxe dos que achacaban a inexistencia de integral definida ó feito de non ser continua era do 41%, pero agora soamente o 10´6% deixaba a cuestión sen responder.
    - O enunciado do 2.14 pedía que se debuxase unha primitiva, de existir, o cal invita a pensar que efectivamente a hai (aínda que non vai ser así, xa que ten límites laterais no punto de descontinuidade, logo non pode ser derivada doutra función; tamén pode xustificarse isto directamente a partir do teorema de Darboux, xa que a función derivada debe acadar tódolos valores intermedios. Pero esta discusión non está neses momentos ó alcance dos resolutores).
    - Na experiencia cotiá vemos que estes enunciados coaccionan cara á busca dalgunha solución, razón pola cal o mantivemos coa esperanza de que explorasen cada unha das partes por separado, se previamente non se decidían por descarta-la existencia.
    - A xulgar polas respostas dadas en 4.4, onde se preguntaba directamente acerca da existencia, parece que moitas das respostas en 2.14 puideron deberse ó seu enunciado.
    - Aínda a segunda parte do 4.4, que invitaba a calcular unha área por medio dun rectángulo e dun triángulo, podía disuadir a algúns estudiantes de negaren a existencia da integral.

A discusión que acabamos de expoñer brevemente recomendaba este reforzo na observación. De tódolos xeitos xa soamente ese 21´3% inicial é, por si mesmo, un indicador da importancia que poden ter as posibles carencias de formación lóxica.

- Unicamente un 21% responden correctamente.
- Un 35% admiten a contraria. Tal e como sospeitabamos, o pensamento explícito "se non é continua entón non ten primitivas", é considerado válido por un sector moito máis extenso do que se manifestaba en 2.14.
- Outro 26´5 % admite a recíproca, loxicamente equivalente á anterior, pero sen admitir aquela.
    - Exactamente a metade dos que admitiron a contraria, negan a recíproca.
- Non admiten ningunha das dúas anteriores, pero tampouco a contrarrecíproca, un 9%.
- O 17´6%, distribuído entre os tres sectores anteriores, dá incluso como válida a negación.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

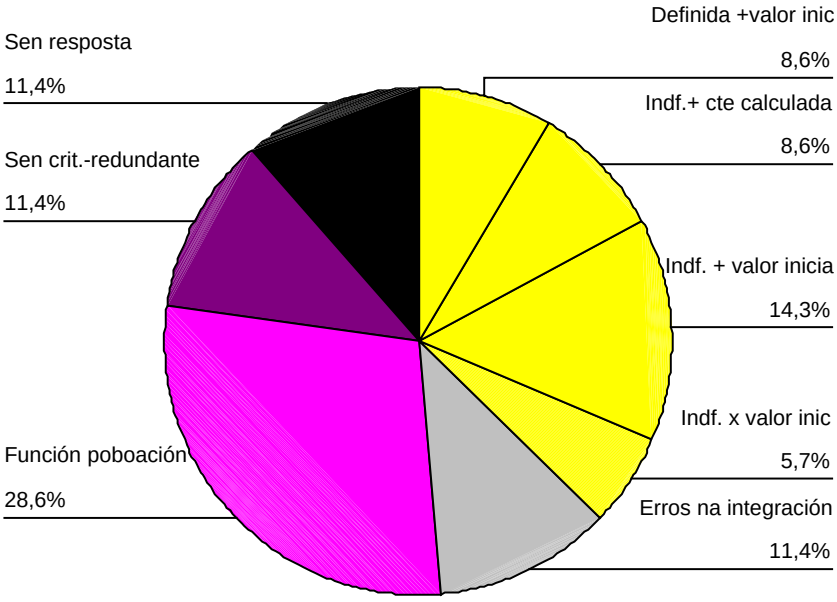
3.10 R.- Nun laboratorio estase a facer un cultivo de bacterias nun medio agresivo; estas están reproducíndose aleatoriamente de xeito case continuo.

Experimentalmente estableceuse que a taxa de crecemento nun instante determinado vén dada pola fórmula $f(t) = 2t$, onde t é o tempo en días transcorrido dende o inicio do experimento, e $f(t)$ expresa bacterias/día.

A función que expresa a cantidade de bacterias do cultivo segundo o tempo é unha primitiva de f .

¿Que cantidade de bacterias teriámo-lo décimo día, se ó inicia-lo experimento había 370?

3.10-R	Frecuencia	%	% acumulada
Integral definida + valor inicial	3	8,6	8,6
Integral indefinida + cte calculada	3	8,6	17,1
Integral indefinida + valor inicial	5	14,3	31,4
Integral indefinida x valor inicial	2	5,7	37,1
Def. ou indf., sen chegar a un resultado	4	11,4	48,6
Toman f como a función poboación	10	28,6	77,1
Sen criterio-redundante	4	11,4	88,6
Non responden	4	11,4	100,0
Total	35	100,0	



Valoracións: unicamente se presentou no colectivo de referencia

Simplifícase a función, respecto do problema 3.10, por se isto puidese facilitar as respostas e permitise observar mellor as concepcións.

Ademais de coñecer agora que esta cuestión forma parte dun estudio relacionado coas integrais, aclárase expresamente que a función que expresa a poboación de bacterias é unha primitiva da que se proporciona no enunciado.

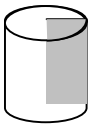
- A pesar diso, en total non chegan á metade (48´6%) os que resolven a cuestión por medio de integrais, e o 11´4% non son capaces de dar un resultado final.
- E aínda hai un 28´6% que toman a función do enunciado como a función poboación.
- Seguen representando segmentos importantes aqueles que barruntan cálculos sen criterios razoables ou os que non responden nada.

A disxuntiva definida/indefinida merece unha discusión á parte:

- Quizais debamos incluír nos anteriores aqueles que multiplican polo valor inicial, aínda que preferimos atribuílo a un despiste. En todo caso teriamos un 20% que procede erroneamente (integral indefinida + valor inicial), aínda que por se-la función polinómica o erro de procedemento quede oculto:
  - A integral indefinida é unha familia de funcións, e non se pode tomar arbitrariamente aquela en que a constante de integración é 370.
  - $F(x)$ sen constante ten tódolos termos en x, polo que $F(0) = 0$, o que fai que sen pretendelo o cálculo realizado sexa equivalente a tomar aquela primitiva con cte. 0, e logo sumarlle o valor inicial previo.
- Unicamente un 17% mostra ter conciencia clara do rol que xoga a constante de integración.

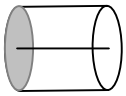
1.12R- Nunha clase de COU, en pleno estudio do cálculo integral, propúxoselles ós alumnos que obtivesen a fórmula do volume dun cilindro, sen darlles ningunha orientación previa.

Uns estudiantes optaron por empregar como "elementos infinitesimais" as seccións rectangulares obtidas ó corta-lo cilindro lonxitudinalmente segundo a altura:



$$\int_0^{2\pi r} h \cdot r \cdot dx$$

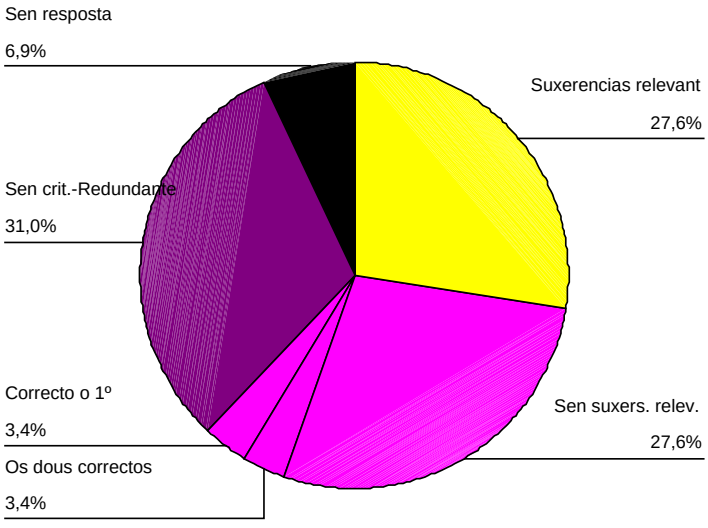
Outros empregaron como "elementos infinitesimais" as seccións circulares obtidas ó corta-lo cilindro transversalmente á altura:



$$\int_0^{h} \pi r^2 \cdot dx$$

Completa o cálculo por ámbolos dous métodos, e comenta a actividade xustificando as túas apreciacións.

1.12-R	Frecuencia	%	% acumulada
Deberan tomar elementos diferenciais de volume	0	00,0	00,0
Erra o 1º grupo; suxerencias relevantes	8	27,6	27,6
Erra o 1º grupo; sen suxerencias relevantes	8	27,6	55,2
Os dous son correctos	1	3,4	58,6
O 1º é o correcto	1	3,4	62,1
Sen criterio- redundante	9	31,0	93,1
Non responden	2	6,9	100,0
Total	29	100,0	



Valoracións: unicamente se lles presentou ós alumnos da licenciatura de matemáticas

Para comprender ben a importancia destes resultados é necesario aclarar que:

- Os resolutores son estudiantes da licenciatura de Matemáticas (3º, 4º e 5º cursos).
- Un exercicio sobre o cálculo dun volume por integración fora resolto e discutido na clase, e figuraba a dita discusión nos apuntamentos que se lles entregaron ós alumnos.
- Que o problema mostra unha contradicción, o que esixe ineludiblemente cuestionarse que algo do realizado non pode ser correcto, non permitindo que por unha primeira impresión se dera por válido o que non o era.
- Que o resultado correcto é unha fórmula sinxela e coñecida, fácil aínda de repensar no caso de tela esquecida, polo que o feito de detectar que un dos grupos ten o resultado errado non nos informa acerca das concepcións do cálculo integral.
- Que o problema foi proposto nun exame final da materia, sin limitación de tempo.

Ningún estudiante chega a discuti-la validez das superficies como elementos diferencias de volume, aínda que 1 susbtitúe, sen reparar no troco, os círculos por finos cilindros cando xustifica que o 2º grupo realiza ben o problema

Soamente o 27´6% fai unha crítica relevante ó enfoque do 1º grupo:

- O 13´8% interpretan significativamente *dx*, decatándose de que $\pi r^2 \cdot dx$ dá lugar a un ortoedro.
- Un 10´3% dáse conta de que os "elementos infinitesimais" deberan ser cuñas, pero en función da forma, sen reparar na heteroxeneidade da magnitude.
    - Soamente 1 alumno (3´4%) chega a desenvolver unha alternativa correcta, tomando o ángulo como variable independiente.

Capítulo 6

Conclusións

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

6.0.- Introducción

Referirémonos en primeiro lugar, unha a unha, ás oito hipóteses de traballo que estableceramos, e a continuación espoñeremos unhas conclusións xerais.

Na medida en que sexa pertinente utilizaremos uns pequenos estudios complementarios que realizamos durante a investigación, e que expoñemos nos apéndices 4º e 5º desta memoria, acerca de:

i) Expectativas do profesorado de secundaria sobre as respostas que os seus propios alumnos darían ós cuestionarios.

ii) Impresión xeral que os alumnos de COU-2ºBach. tiveron do estudio do cálculo integral, e da percepción global que teñen acerca das posibles interrelacións entre as diferentes disciplinas.

6.1.- Acerca das hipóteses

Dos resultados da investigación expostos no anterior capítulo infírese, en termos xerais, a confirmación nos colectivos mostrais das hipóteses establecidas para os alumnos con formación estándar en COU ou 2º de bacharelato, no sentido que se explicitaba no 3º capítulo, apartado 3.2.2.3. A seguir, presentamos resumidos os ditos resultados, ordenándoos en función das nosas hipóteses.

H1: *Os alumnos con formación estándar en COU ou 2º de bacharelato presentan un baixo nivel de conceptualización da integral como obxecto matemático que permite resolver problemas de medida, e que debe ser adaptado en función das características concretas do problema.*

- Asimilan rutineiramente a integral definida como a área e non como un instrumento para coñecela, susceptible de ser aplicado noutras magnitudes a partir da determinación de elementos diferenciais delas.
  - Ítem 1.1 e reforzos: Para máis da metade "área = integral", con independencia do valor e do signo, aínda en moitos casos reproducindo esterilmente a mecánica de separar subintervalos sen modificar nada por iso (cuestión que aínda permanece de forma preocupante nos estudiantes da licenciatura).
  - Ítem 1.12: Ningún propón determinar un elemento diferencial e a continuación integrar. Case a metade propoñen facer a integrais que non se adaptan, nin teñen visos de poder facelo, ó problema en cuestión. (Tamén permanece de forma preocupante nos estudiantes da licenciatura).

- Proporcionando a derivada dunha magnitude, asocian rutineiramente a integral que intervén no problema ó valor buscado e converten a integral no propio obxecto a calcular.
  - Ítem 3.2: Enúnciase neste caso que se debe calcula-la integral, pero son moi poucos os que son capaces de interpreta-lo valor obtido nas condicións do

problema (tamén permanece de forma preocupante nos estudiantes da licenciatura), cando non fan unha asociación rutineira que os leva a contradiccións case obvias: o 26% atribúelle percorrido 0 porque a integral *que se explicita no enunciado,* aplicada sen máis, dálles 0.

- Ítem 1.7: (área en contexto xeométrico) o 54% propón o cálculo dunha integral para responder, *sen conseguilo*, obviando a aproximación que se lles pide e renunciando a traballar xeometricamente, o que sería inmediato.
- Ïtem 1.12: (volume) o 41´3% emprega funcións inapropiadas para responder por integración, *sen que en ningún caso intenten determinar un elemento diferencial*, e obvian tamén a aproximación que se lles pide.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE UNAMUNO

H2: *Estes estudiantes mostran unha alta designificación do proceso estándar de construcción da integral por aproximación mediante sumas, non apoiándose nesas mesmas estratexias para resolver problemas.*

- Incluso non o fan en problemas nos que se demandan expresamente aproximacións.
  - Ítem 1.7: Manifféstase un "bloqueo" procedemental, xa que case dous tercios non son capaces de reaccionar e utilizar sequera procesos primarios, como contar os cadros que figuran na gráfica que se lles presenta. E a maioría deles, a metade do total, aínda escriben a integral conscientes de que non poden resolvela, pero non traen a colación o proceso de aproximacións por rectángulos no que foron instruídos. (A penas se detecta o dito bloqueo entre os estudiantes da licenciatura).
  - Ítem 1.12: Agora a "unidade" non está explícita e a aproximación demanda unha consciencia clara dela, polo que son aínda moitos menos os que intentan algo. (Entre os estudiantes da licenciatura ningún intenta a aproximación, tratando o cálculo exacto directamente por diferentes vías de integración). Tamén agora, case a metade presentan integrais –que non se

corresponden-, pero tampouco lles suscita a posibilidade de contemplar este concepto dende a perspectiva das aproximacións.

- Ítem 5.1: Ningún estudiante alude a sumas cando se lles pide que dean unha definición da integral definida. (Entre os da licenciatura fano máis da metade).

H3: *Os ditos alumnos manifestan unha importante debilidade metacognitiva acerca das técnicas de cálculo de primitivas, o que lles resta eficacia tanto na súa exercitación como fronte ás posibles aplicacións.*

- As técnicas e métodos de integración contémplanse como "saberes" en si mesmos, e non como recursos que forman parte da bagaxe de quen os coñece e practica. Afróntanos cunha actitude pouco reflexiva, e incluso mecanicista. Teñen dificultades para relacionar os ditos métodos cos problemas de áreas, a pesar de ser estes o contexto habitual onde eles mesmos aplican as integrais.
  - Ítem 2.3: A pesar de que a integración por partes é o único contexto no que se lles presentan as expresións $u' \cdot v$ e $u \cdot v'$, por non teren practicado o dito método con integrais definidas, a gran maioría nin sequera explora a posibilidade de facelo. (Sendo menos grave, aínda permanece de xeito importante entre os estudiantes da licenciatura).
  - Ítem 2.8: Sen embargo neste seguinte exercicio, no cal as expresións non teñen nada específico da integración por partes, a gran maioría toma a decisión de usa-lo método xa que, como confirmaron nas entrevistas, entendían que o que se lles propoñía era, en definitiva, acertar co método de integración que lle correspondía a este enunciado.
  - Ítem 2.8 R: Soamente unha porcentaxe moi baixa fixo explícita a necesidade de transforma-la función en funcións que puidesen integrarse directamente.
  - Nas entrevistas comprobamos que o problema era percibido en termos de acertar co método "que se nos pide", e non en conseguir coñecer unha nova función (antiderivada).

- Na propia destreza práctica do cálculo de primitivas, unha vez emprendido un camiño determinado, actúan instintiva ou aleatoriamente, sen unha pequena valoración previa que os oriente na acción. Tratan de memorizar modelos de cálculo de primitivas á marxe dos correspondentes modelos de cálculo de derivadas.

    - No traballo de aula observamos este feito, que xeraba non poucas dificultades en casos tan simples como adaptar unha expresión a un tipo "arctan". Moitos estudiantes demandan fórmulas específicas para situacións particulares, incluso para simples axustes de coeficientes.
    - Ítem 2.8: A elección inadecuada das funcións dáse en relativamente poucos casos, aínda que non desprezables (8%), e xa sería máis importante o seu número respecto a cantos deixan constancia de que coñecen o método (daquela un 11´5%). O propio enunciado favorece que a primeira elección sexa a boa, o que nos ocultou a importancia, considerable, desta debilidade metacognitiva, que se puxo posteriormente ó descuberto nas entrevistas.

H4: *Este colectivo de estudiantes ten grandes dificultades para diferencia-las condicións de existencia de integral definida e de primitiva nun intervalo, así como para discriminar condicións "suficientes" de "suficientes e necesarias".*

- Desconcértaos a idea de que algunha funcións "correntes" non teñan primitiva elemental, ou combinación de funcións elementais, e móstranse incrédulos ante a posibilidade de que funcións non continuas teñan primitiva.

    - Ítem 2.14: Unha cuarta parte dos alumnos da mostra descartaban a existencia de primitiva por tratarse dunha función non continua, mentres que a metade non sabían qué responder á cuestión. (O erro persiste no colectivo de alumnos de Matemáticas). E aínda un grupo importante descartaba a existencia por tratarse dunha función non derivable, o que de feito é moito máis grave, xa que esta última condición non é relevante.

- Ítem 5.0: Unha porcentaxe aínda maior manifestaba que a función integrable tiña que ser continua no intervalo, cando no enunciado nada inducía a involucrar a continuidade/descontinuidade na respsota.

- Pero incluso cando a función continua presenta algún tipo de irregularidade "notable", chegan a perde-la referencia que lles proporciona o teorema fundamental acerca da "función integral" como primitiva dunha función continua.

  - Ítem 2.15: A función é agora continua e, entón, porcentaxes semellantes ás anteriores resituaban a causa da inexistencia de primitiva na non derivabilidade da función, ou non respondían nada. Isto pon de manifesto a confusión reinante: a función á que se refire o teorema é unha derivada, pero non é ela mesma a que se deriva. (O problema persiste entre os estudiantes da licenciatura de matemáticas).

  - Ítem 5.0: Case a cuarta parte manifesta que unha función integrable nun intervalo debe ser derivable nel.

  - Ítem 4.3: En menor medida (o enunciado deste ítem insiste na área), reflíctese o mesmo problema anterior.

- Incluso diante de gráficas baixo as que se delimitan recintos explicitamente ordinarios, a existencia de puntos angulosos ou descontinuidades xéralles un conflicto de tal intensidade que remove e chega a anular o seu principal soporte conceptual da integral: a área.

  - Ítem 4.3: A pesar de que explicitamente está debuxado un trapecio, case un tercio negan que exista a integral definida, e outros máis non responden. (É notoria a melloría entre os estudiantes da licenciatura).

  - Ítem 4.4: Aumenta estrepitosamente a porcentaxe a máis da metade, ós que quizais deberamos que engadir aqueles outros que non son capaces de responder, que negan a existencia da integral definida ó estar debuxada unha función descontinua. (Non é comparable a situación nos estudiantes da licenciatura, pero aínda segue a ser importante).

- Hai un problema de fondo, relativo á organización lóxica do seu pensamento, que transcende a problemática específica da integración.
    - Ítem 2.14 R: Soamente unha quinta parte valida a contrarecíproca dunha proposición dada, mentres que os dous tercios infiren a validez da recíproca e/ou da contraria.

H5: *Estes alumnos teñen un rendemento medio moi baixo á hora de establecer no cadro xeométrico a relación entre a gráfica dunha unha función e as das súas primitivas.*

- A pesar de que foron instruídos expresamente no manexo da "función área" como prototipo de "función integral", non asimilaron esta posibilidade como un recurso que lles permitiría "traducir" ó cadro xeométrico os problemas de funcións.
    - 2.14: Non chegan á sexta parte os que intentan representar unha primitiva para cada subintervalo, e dentro destes moi poucos diferencian os ritmos de crecemento. (Entre os estudiantes da licenciatura a situación non é tampouco moi alentadora, pois entre os que emprenden a tarefa de representar unha primitiva para cada subintervalo, menos dun tercio o fan correctamente).
    - 2.15: Da quinta parte que admite a existencia da primitiva, ningún fai unha representación consecuente, e a penas algún faina alomenos derivable. (Hai unha notable melloría nos estudiantes da licenciatura de matemáticas, xa que a terceira parte dos que admiten a existencia fan unha representación consecuente).

H6: *Os ditos estudiantes carecen de criterios que lles permitan recoñecer en diferentes contextos cándo resulta pertinente o uso dunha integral, e qué procedemento se pode seguir.*

- Incluso non se orientan cando se lles fai explícito o procedemento que deben seguir no caso de ser constante a función "base", e tratándose de situacións ordinarias no seu currículum académico, presentes cando estudian a integración.
    - Ítem 3.1: Non chegan á sexta parte os que afrontan (case a metade deles con erros de procedemento) o problema por integración, a pesar de existir unha advertencia explícita no enunciado de que "a forza era variable"; e ningún sabe dar unha explicación. (Non mellora o rendemento entre os estudiantes da licenciatura de matemáticas).
    - Ítem 5.3: Sen embargo a cuarta parte declaran que os problemas de física se resolven por integrais. (Semellante porcentaxe en Matemáticas, aínda que se inclúen outras casuísticas máis específicas).
    - Ítem 1.12 R: Situados diante da tesitura de ter que explicar un resultado contradictorio, soamente a cuarta parte dos alumnos da licenciatura constrúen, ou suxiren cómo facelo, unha integral alternativa.
- O dominio da rutina algorítmica leva ó esquecemento das ideas principais coas que se xustifica a súa instrucción neste tema.
    - Ítem 5.2: A pesar de que son introducidos ó cálculo de primitivas baixo o aforismo de que "a integración é a operación inversa da derivación", non hai ningunha alusión a iso (mellora lixeiramente entre os estudiantes de matemáticas), e queda aínda lonxe a idea de que o que se fai é construír novas funcións.

H7: *O colectivo estudiado ten deficiencias importantes na comprensión teórica dos resultados matemáticos que permiten aprecia-lo poder da integral como ferramenta matemática de gran transferencia teórico/práctica que permite trata-los problemas de variación.*

- Incluso en problemas nos que se proporciona expresamente unha taxa de variación instantánea, a "visión estática" do tema -soportada esencialmente nos problemas de cálculo de áreas- pode resultar contraproducente.
    - Ítem 3.10: Son moi poucos os que presentan a solución por medio dunha integral; mentres que maioritariamente recorren a estratexias erradas que corresponden a estadios cognitivos de pre-cálculo. (Mellora sensiblemente nos alumnos de matemáticas, quedándose aínda nunha modesta quinta parte).

- Aínda tamén en problemas que proporcionan expresamente a integral no enunciado, no que se recorda cál é relación de derivación entre as magnitudes intervinientes, perden a perspectiva de qué é o que están calculando.
    - Ítem 3.10 R: Aínda advertindo no enunciado que se trata dunha "primitiva", non chegan á metade os que presentan unha integral.
    - Ítem 3.2: Unha quinta parte non saben dicir qué foi o que calcularon coa integral, e de entre eles varios cren ter calculado a aceleración ou a propia velocidade (que era a función a integrar).

H8: *Estes alumnos teñen grandes dificultades para atoparen conexións entre diferentes resultados ou propiedades estudiadas, e interpretar aqueles e estas nun contexto xeométrico.*

- Incluso non recoñecen os resultados máis típicos cando se lles formulan de xeito diferente ó habitual, empregando a mesma simboloxía.
    - Ítem 4.1: Menos da metade son capaces de inverte-la relación derivada/integral cando esta ultima é o dato proporcionado e aquela primeira é a incógnita. Compárese co problema 2.8, no cal case a totalidade se encamiñan directamente á busca da primitiva. (O problema case desaparece entre os estudiantes da licenciatura de matemáticas).

- Ítem 4.13: Moi poucos alumnos empregan a aditividade da integral sobre o intervalo, a pesar de que o formato das expresións correspóndese literalmente ó que se utiliza para expresa-la dita propiedade. (A melloría é notoria entre os da licenciatura, pero aínda son máis dun tercio os que non o responden correctamente).

- As dificultades de reflexión sobre resultados e propiedades sófrense pacientemente, cando o marco xeométrico ofrécelles un inmediato e sinxelo recurso para pensar, do que a penas se fai uso.
  - Ítem 4.13: Moi poucos interpretan xeometricamente as integrais ás que se refire o enunciado. (Mellora en Matemáticas).
  - Ítem 4.15: Só unha cuarta parte dos que recordan o teorema do valor medio son capaces de reinterpretalo no cadro xeométrico. (Menos aínda entre os da licenciatura).
  - Ítem 3.10: A maioría das respostas erradas poderían ser autodetectadas de recorrer á representación xeométrica dos seus cálculos, que sen embargo están completamente ausentes. (Semellante entre os de Matemáticas).

- Tampouco son capaces de interpretar nun contexto xenuinamente xeométrico a relación integral-área, que teñen interiorizada como válida, nin posúen unha actitude conducente a intentalo.
  - Ítems 4.3 e 4.4: Aproximadamente a metade admiten a integral pero non a área, ou viceversa, diante dun punto anguloso ou unha descontinuidade.

6.2.- Conclusións xerais

Como pode comprobarse a partir das referencias dadas no capítulo 3º, en moitos aspectos os resultados da nosa investigación son consecuentes cos obtidos en

investigacións que se corresponden a realidades sociais e culturais diferentes á galega, e con outras organizacións académicas tamén distintas da nosa, e diversas entre si.

Partindo do obxectivo central desta investigación –avaliación das concepcións dos estudiantes de bacharelato e COU acerca do significado do cálculo integral-, dedicamos esta sección a contextualiza-los resultados máis relevantes obtidos na mesma dentro dunha panorámica xeral da ensinanza-aprendizaxe do cálculo, incidindo tamén naqueles outros aspectos que deberán ser clarificados con máis precisión en posteriores investigacións.

1.- Os aspectos teóricos relacionados co cálculo integral, tal e como aparecen na maioría dos libros de texto, resultan excesivamente complicados para moitos estudiantes, que ademais non comprenden a razón pola que se presentan así.

- Por exemplo, puidemos comprobar nun grupo de alumnos que moi poucos sabían ou recordaban a diferencia entre supremo e máximo (ínfimo e mínimo, respectivamente), e aqueles poucos que si o sabían e recordaban non eran capaces de poñer un exemplo dunha función acoutada onde os correspondentes números non coincidisen; e sen embargo, empregábanse ínfimos e supremos ó formaliza-la integral.

Aínda que as presentacións habituais dos contidos matemáticos están inmersas nos aspectos formais, máis ou menos profundos e rigorosos segundo o nivel ó que se traballe, aqueles formúlanse aprioristicamente e non como consecuencia dun proceso intencionado de dotar de rigor ó contido e de fornecernos un método estricto e eficaz de analizar criticamente conxecturas e deducir resultados.

Consideramos que unha verdadeira formación matemática debera facer explícita a dita “intención”, debera facer sentir ós estudiantes a necesidade de organizar, explicar e xustifica-lo coñecemento, sexa cal sexa o grao de rigor que se considere pertinente desenvolver en función do nivel académico de que se trate.

2.- A maioría dos estudiantes identifica integración con cálculo de áreas, pero moitos toman decisións, á hora de asignarlle valores numéricos á área, que non se guían por unha representación xeométrica consciente, atribuíndolle valores que resultan de simples cálculos aritméticos de sumar ou restar, sen ter en conta se realmente pretenden acumular área (xuntar recintos) ou se queren excluíla.

Só unha minoría cita outros contextos (cinemática ou volume dun corpo de revolución), como campos de aplicación da integral. A este respecto resultan sorprendentes os enfoques que, case de forma xeral, adoptan os textos de secundaria, ben definido área como a integral, ben a integral como a área, así como a maioritaria adscrición dos profesores a estes enfoques.

- No apéndice 4 desta memoria presentamos unha enquisa ós profesores do colectivo de alumnos de COU-2º Bach. (ciencias): o seu pesimismo respecto ás respostas ós problemas de carácter novidoso viuse confirmado na investigación, pero desafortunadamente non sucedeu o propio co optimismo respecto das cuestións máis coñecidas, que en xeral supuxeron uns niveis de resposta moi inferiores ós esperados por eles.

3.- A reciprocidade integral-derivada que proporciona o teorema fundamental do cálculo, de enorme utilidade para relacionar novos coñecementos –o cálculo de primitivas- con conceptos e resultados previamente estudiados –derivada e operacións con derivadas- non está asimilada por moitos estudiantes a pesar de ser por eles coñecida: manifestan capacidade suficiente en cada un dos campos respectivos, pero non cando se require o paso dun ó outro.

- Moitas dificultades teñen a súa orixe na debilidade das estructuras conceptuais relativas á diferenciación, previas ó estudio da integración: puidemos comprobar que moitos estudiantes tiñan dificultades para identificar elementos diferenciais en situacións tanxibles (esfera, círculo, traballo, cilindro), e a bastantes aínda lles resultaba custoso comprende-lo seu significado unha vez que se lles indicaban.

- Outras radican na falta de control metacognitivo dos procesos de cálculo de primitivas como procesos de antiderivación: a función da cal obtémo-las primitivas é unha derivada destas.

4.- As técnicas de cálculo de primitivas ocupan o lugar preponderante no estudio da integración, relegando o concepto de integral a un recordo testemuñal, os teoremas a un requisito que debe conservarse na memoria e as aplicacións a un mero apéndice circunstancial no que se fai un uso rutineiro da regra de Barrow.

E sen embargo moitos alumnos tratan de memorizar modelos de cálculo de primitivas á marxe do correspondente modelo de cálculo de derivadas, asumíndoos como modelos que existen de forma independente, demandando máis fórmulas específicas para situacións particulares dun modelo dado, centrando todo o seu interese en obter unha resposta correcta en lugar de comprende-lo proceso para conseguila.

Para un aumento de eficacia neste terreo consideramos esencial traballa-los aspectos metacognitivos, tanto no relativo á interrelación práctica (e non soamente declarativa) dos modelos de cálculo de primitivas e derivadas, como ó procedemento xeral de expresión dunha función complicada como combinación de funcións máis sinxelas.

5.- A identificación implícita nas aulas de secundaria da familia de funcións integrables a aquelas que teñen primitiva e, daquela, á familia das funcións continuas e "regulares", e a ausencia case xeneralizada de situacións-problema que permitan contextualizar axeitadamente, nos marcos alxébrico e xeométrico, o significado de "función integrable", constitúe un obstáculo didáctico que provoca erros moi frecuentes.

- En particular a práctica xeneralizada do cálculo de primitivas de funcións derivables, conduce a moitos estudiantes á conclusión de que as funcións continuas que presentan puntos angulosos non teñen primitivas e, polo tanto, non son integrables en intervalos ós que correspondan os ditos puntos.

6.- A ausencia xeneralizada de alusións nos textos de secundaria ás limitacións do cálculo de primitivas e, polo tanto, a necesidade de promover métodos alternativos de

obtención aproximada da integral, promove a ilusión de que a calquera función integrable ten unha primitiva –a integración convertese así en cálculo simbólico-.

- Como consecuencia deste fenómeno didáctico, a necesidade de comprender e contextualiza-lo significado de "integrar" pasa a ocupar un segundo plano, como se pon de manifesto cando hai que obter, en contextos gráficos, un valor aproximado para a área baixo unha curva nun intervalo, simplemente contando unidades enteiras ou fraccionarias de superficie coñecidas, e sen embargo moitos alumnos inhíbense de facelo ó non coñece-la expresión analítica da función que cren necesitar para calcula-la área a partir dunha primitiva.

7.- A maioría dos estudiantes carecen de criterios para recoñecer cándo un problema é resoluble por integración. Incluso son moi poucos os que recoñecen a "presencia" da integral cando se enfrontan, dende as matemáticas, a problemas que xiran en torno ó calculo de magnitudes físicas que estudiaron previamente usando explicitamente as integrais, en definicións e problemas.

Botamos en falta un desenvolvemento contextualizado dos contidos en situacións significativas para os estudiantes, ofrecendo unha aproximación fenomenolóxica axeitada ós conceptos do cálculo integral que se introducen nestes niveis do ensino, así como unha reflexión explícita sobre cáles son as características que determinan este campo de problemas.

8.- Nunha enquisa acerca de cómo os propios alumnos percibían a instrucción, que mostramos no apéndice 5 desta memoria, púxose de manifesto que o grao de interese que particularmente espertara neles o estudio do cálculo integral era máis ben baixo, a pesar de que confiaban bastante en que lles había de ser de utilidade en futuros estudios, e de que lle recoñecían unha pouca máis de relación con outras disciplinas da que era habitual, que en calquera caso seguía a ser pouca.

Unha notable maioría deste alumnado é proclive a pensar que o interese das diferentes disciplinas aumentaría se estas tivesen maior relación entre si, a un tempo que consideran que a súas aprendizaxes veríanse facilitadas pola dita circunstancia. Pensan que poderían aprecia-la utilidade das matemáticas ó ver como se aplicaban nas outras

materias e, engadían en máis da metade dos casos, que tamén se adquiriría unha visión máis completa das cousas e non tan parcelada como lles sucede agora.

Non parece, pois, coherente, dende unha posición formativa, desenvolver un cálculo de primitivas moi extenso -se temos en conta o peso que ten no conxunto da materia de matemáticas-, e facer reverter este no cálculo de áreas de recintos planos limitados total ou parcialmente por gráficas de funcións, sen mencionar en absoluto as ecuacións diferenciais máis sinxelas nin tratar algúns outros problemas básicos de aplicación que teñen un gran interese científico e social.

9.- Moitos dos erros e carencias que detectamos nas primeiras concepcións acerca do cálculo integral dos estudiantes de Bacharelato e COU, permanecen en graos importantes entre os alumnos da Facultade de Matemáticas de cursos medios e superiores, e aínda entre os licenciados, cohabitando coas novas aprendizaxes, coas que sen dúbida deben interferir.

Non era obxecto da presente investigación, pero é unha hipótese razoable que merecería un novo esforzo investigador, a idea de que unha parte importante do alto fracaso académico que se observa nos estudios de Matemáticas como titulación específica, e como materia noutras múltiples titulacións, débese ó empobrecemento das súas primeiras concepcións por unha escasa contextualización, ausencia de reflexión metacognitiva, e falta de desenvolvemento dos procedementos xerais que de maneira inherente e natural deberan fornece-la instrucción.

10.- A integración é percibida polos estudiantes como unha técnica afortunada, e non como baseada nun procedemento analítico xeral: a descomposición dun problema noutros máis simples sobre os que se pode calcular, e nunha estratexia común: ir aproximándose paulatinamente ó resultado pretendido. O avance substancial respecto desta, digámoslle *lóxica natural*, reside en comprender que refinando sucesivamente a dita descomposición pódese acadar, baixo certas condicións, unha aproximación tan boa como se desexe; e que é posible realiza-lo proceso inverso, de síntese, para avalia-la

magnitude íntegra a partir do seu estado de variación, porque cada elemento obtido como froito da partición é unha diferencia entre dous estados da magnitude.

As breves experiencias en enxeñería didáctica realizadas en consonancia con esta investigación abren novas perspectivas, mostrando que as capacidades cognitivas dos estudiantes, axeitadamente explotadas, poden lograr un equilibrio máis satisfactorio entre os dominios conceptual e algorítmico. (Apéndice 6).

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Capítulo 7

Liñas básicas para unha alternativa didáctica

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

7.0.- Introducción

As posibilidades de enfoques, matices e conexións a outras materias ou a outras ramas da propia disciplina que se poden realizar no tratamento dun tema parecen aumentar canto máis se avanza nel. Nun empeño persoal por poder contribuír dunha maneira eficaz á mellora do ensino/aprendizaxe das matemáticas, tentamos que o contido deste capítulo resulte suxestivo para o profesorado de matemáticas de secundaria.

En coherencia co anterior realizamos un esforzo por contribuír á construcción dunha alternativa didáctica ó cálculo integral en secundaria, tentando conserva-la máxima xeneralidade dos conceptos, técnicas, procedementos e aínda actitudes, que nos sexa posible, e expoñémolo seguindo un discurso narrativo que poida ser clarificador ó

dito profesorado, comezando cunhas consideracións metodolóxicas que permitirán precisa-las ideas expostas no marco conceptual.

A partir do epígrafe 5º deste capítulo iremos esbozando actividades concretas que, a título unicamente de exemplo, ilustren a nosa proposta, a cal vai esencialmente dirixida a alumnos de "ciencias". (No apéndice 6º mostraremos unha adaptación concreta para estudiantes de "sociais").

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

7.1.- Notas sobre metodoloxía didáctica

Xa nas primeiras décadas deste século podemos atopar advertencias sobre os perigos de utiliza-la práctica reiterada con exercicios tipo como método primordial de ensinanza das matemáticas: estas percibiríanse como un conxunto de datos e técnicas independentes entre si, e non como un conxunto de estructuras de coñecemento interrelacionadas (Brownell, 1928).

Algunha das características negativas derivadas dunha planificación educativa que non acomete expresamente a busca dos principios organizativos xerais, senón que se centra en proporcionar e practicar coleccións máis ou menos extensas de técnicas que permiten realizar correctamente cálculos, centraron os debates das conferencias de Massachusetts dos anos 60 (Woods Hole, 1959; Cambridge, 1963), nas que psicólogos, pedagogos e matemáticos propoñían a necesidade dun cambio curricular nas matemáticas. Unha vez máis, foron postas de manifesto tamén na nosa investigación:

- As dificultades de transferencia das aprendizaxes a novos contextos.
- A escasa satisfacción intelectual que reportan.
- A facilidade coa que se esquecen.
- O difícil que resultan de reconstruír cando se precisan ó cabo dun tempo.

Na Conferencia de Woods Hole estúdiase expresamente a ensinanza da estructura do contido das matemáticas: a adquisición de coñecementos matemáticos non chega a ser conceptualmente consistente se non se capta a *estructura subxacente*, o que presupón por parte do educador unha programación tendente á súa explicitación.

Na conferencia de Cambridge refórzase a idea dun "currículo en espiral":

- Preséntanse estructuras parciais que facilitan unha primeira comprensión máis intuitiva, posibilitando o descubrimento dalgúns principios sinxelos.
- Posteriormente os temas volverán aparecer ampliando as ditas estructuras, permitindo un tratamento cada vez máis formalizado que á súa vez poñerá de manifesto as súas relacións con outros conceptos.
- Este proceso verase reforzado na realización de novas aplicacións.

Dende a *perspectiva cognitiva da aprendizaxe* o coñecemento é reelaborado en gran parte por cada estudiante: a información nova debe conectarse coas estructuras de coñecemento xa establecidas, producindo unha reorganización delas. Nestes feitos residirían tanto a posibilidade dun recordo a máis longo prazo, como da transferencia a novas situacións.

Piaget (1950) sinala que o desenvolvemento persoal implica unha reestructuración constante dos datos e das relacións a través das interaccións co contorno (coa xeneralización e extensión actual da escolarización, debemos incluír de forma moi relevante a propia vida académica dos estudiantes); e Bruner (1956), que o máis importante da memoria non é o almacenamento da experiencia anterior, senón a capacidade de recupera-los aspectos que sexan relevantes ante unha nova situación, e que a dita capacidade dependería de cómo fora codificada e procesada na nosa mente, ó que chamou *representación*.

A complexidade das linguaxes específicas das matemáticas e o alto grao de abstracción dos seus conceptos suscitan a consideración destas ideas á hora de organizar unha secuencia de instrucción para estudiantes de secundaria: o *rigor* introduciríase paulatinamente a partir dos *coñecementos previos* dos alumnos e das súas *estratexias persoais*, buscando na confrontación de ideas o xurdimento dunha serie de *intuicións*

correctas e relevantes que permitan pensar intelixentemente sobre as cuestións que se lles presentan, e que posibiliten unha boa comprensión dos conceptos e un uso axeitado das técnicas.

Algunhas das estructuras que deben ser comprendidas en matemáticas son de tipo algorítmico; particularmente no cálculo integral aquelas que se refiren á determinación das integrais indefinidas. Os algoritmos son, certamente, simplificadores, e para seren aplicados con corrección non necesitan ser comprendidos máis aló do seu expreso funcionamento. Pero a súa aplicación vai, de xeito natural, precedida dunha resposta individual á pregunta: ¿cando debo utilizado?, o que implica un nivel de decisión importante.

BIBLIOTECA VIRTUAL

A aprendizaxe mecánica dos algoritmos non presentará este problema se é o profesor quen decide sobre o seu uso (habitualmente sucede de maneira non explícita), asociando o alumno cada enunciado a un prototipo de problema.

A posibilidade de que a práctica vaia acompañada dunha *reorganización dos procedementos,* ten unhas notables consecuencias para a ensinanza. Klarh e Wallace (1976) sinalan que a posibilidade de *automatiza*-los procedementos libera unha parte da memoria de traballo, que *pode ser* utilizada en explora-lo contorno da tarefa e detectar así novas regularidades.

Desde esta óptica xorde unha pregunta de grande importancia: *¿en que condicións se produciría esa reorganización?* Quizais desde unha perspectiva metacognitiva poida indicarse a resposta: a propia conciencia de que iso mesmo é o que se pretende; unha vez que se pon de manifesto a analoxía das situacións e a similitude dos cálculos, explicitarase que a súa automatización permite simplificalos e diminúe as posibilidades de erro na súa realización.

A traducción dun problema verbal a expresións alxébricas permite reducir sensiblemente a carga de memoria, xa que, una vez establecída-las ecuacións, a resolución do problema reside nunha aplicación mecánica das técnicas pertinentes. A explicitación deste feito diante do alumno xustifica o interese de ámbolos dous aspectos matemáticos que implica.

Pero, ademais, estas expresións deben responder a *significados semanticamente comprendidos*: é necesario decidir qué relacións entre os elementos do problema son pertinentes para a súa solución, ou sexa, qué ecuacións convén resolver, qué cálculos hai que realizar. A representación física, gráfica ou mediante imaxes mentais pode resultar de grande utilidade para o establecemento, selección e secuenciación de relacións entre os datos, e entre os datos e as incógnitas, e para a recuperación doutros datos e estratexias da memoria, o que se vería facilitado por un "coñecemento" ben estructurado.

A relación da nova información coas estructuras mentais xa posuídas non parece ser inmediata: a interpretación dos enunciados pódese dar a moitos niveis diferentes, algúns de escasa relevancia para a tarefa. Os parámetros que interveñen poden ser moi diversos; neste sentido cabe destacar, ademais da experiencia e madurez cognitiva da persoa, a incidencia do contorno da tarefa, que evocará unhas ou outras imaxes en función do seu contido específico e das aprendizaxes anteriores.

E os ditos parámetros non estarán, en moitos casos, desprovistos dunha forte compoñente emocional: as expectativas de éxito duns contidos disciplinares que se amosan desligados da realidade na que o alumno está inmerso, dos que non só non perciben a súa utilidade social, senón que tampouco se vinculan afectivamente a eles, son francamente pequenas. Un desenvolvemento dos contidos contextualizados en situacións *significativas* para os estudiantes, pola súa proximidade ou pola súa actualidade científico-social, podería contribuír favorablemente a aumentalas.

Se as actividades que se propoñen ós estudiantes se ocupasen inicialmente do "qué", e non tanto do "cómo", este cobraría sentido a continuación, xustificando na súa precisión e eficacia o desenvolvemento progresivo do xogo simbólico, que non perdería así a súa forza comunicativa, de maneira que sería posible xerar expectación, construír significados e desenvolve-lo sentido crítico.

Nun intento de avalia-la calidade da comprensión, Greeno (1978) indica tres criterios que poden resultarnos de grande utilidade:

- A cohesión entre as representacións internas que cada un se fai dos contidos.
- O grao de conexión cos outros coñecementos do individuo.
- A correspondencia entre a imaxe mental do contido e as nocións matemáticas correctas.

A busca de cohesión lévanos a pretender un desenvolvemento explicitamente interrelacionado dos contidos, máis aló daquelas relacións que serven de soporte para novos conceptos; o establecemento de conexións condúcenos a outros campos da matemática: xeometría, álxebra e estatística, e a outras áreas ou disciplinas de coñecemento: física, economía, socioloxía, bioloxía ...

No ensino das ciencias é moi frecuente explica-lo concepto, a fórmula ou a técnica inmediatamente antes de propoñerlles ós estudiantes que resolvan determinadas cuestións nas que interveñen e se aplican directamente, coas que pretendemos complementa-las nosas explicacións de maneira que os conceptos e as fórmulas queden o máis claras posible e se adquira soltura no manexo das técnicas.

Se a meirande parte da aprendizaxe pivota sobre desta metodoloxía, os alumnos carecerán de experiencia na procura de técnicas axeitadas a certas situacións, e poden pasalo mal cando se enfrontan a situacións novas. (Nickerson, Perkins, Smith,1990).

Decantámonos por unha metodoloxía de *descubrimento dirixido*: inicialmente os alumnos traballan sobre problemas novidosos para eles, nos que subxacen os contidos propios do nivel e tema, secuenciados e contextualizados de xeito que promovan aprendizaxes significativas; o profesor/a intervén atendendo demandas puntuais ou proporcionando indicacións ou explicacións ó conxunto da clase se iso é necesario.

Ó traballo individual ou en pequeno grupo seguen as postas en común, nas que se confirman acertos, corríxense erros, clarifícanse significados, avánzase en precisión, unifícase terminoloxía e simbolismo, e afondase no rigor e na fundamentación, reconstruíndo os argumentos.

Un problema, no sentido no que utilizámo-lo termo, esixe unha busca de enfoques posibles porque non existe un método obvio de resolvelo. Isto implica que é necesario determinar qué información que aínda non posuímos nos permitiría aplicar unha estratexia coñecida ou, de se-lo caso, atopar unha forma de solución nova.

Non parece razoable pensar que se proceda recorrendo toda a información dispoñible, senón que na nosa bagaxe de coñecementos deberán existir tamén estratexias de busca. Neste sentido convén recorda-los *heurísticos* ós que Polya (1967) facía referencia:

- ¿Cal é a incógnita?, ¿cales son os datos?, ¿cales as condicións?, debuxe unha figura, adopte unha notación axeitada, ¿coñece algún problema relacionado? (¿serviría o mesmo método?), pense en cómo facer que o problema se presente máis sinxelo, ¿podería resolver unha parte?, ¿podería xeneralizalo?, ¿sabería facelo con outros datos?, ...

Pero a posibilidade de facer uso dalgúns destes heurísticos non depende exclusivamente de telos aprendido ou de ter á man unha relación deles, se non que vén condicionada pola capacidade de representa-lo problema, cuestión á que xa nos referimos.

Partir do traballo inicial do alumno sobre unha problemática relativamente novidosa para el, presupón a aceptación por parte dos docentes do *razoamento informal* porque hai que determinar cál é a información relevante e a qué modelo conceptual responde, e avalia-lo acerto das eleccións realizadas. De forma case contraria procédese nun exercicio formal típico, no que a información relevante se proporcion no propio enunciado e o seu formato insinúa o modelo que debe ser aplicado, o que tende a que se mecanicen as tarefas facéndoas de execución máis lixeira, pero a custa de reduci-la autonomía dos estudiantes, que renuncian tacitamente a preocuparse por desenvolver o seu sentido crítico e a súa creatividade.

Nese sentido pronunciábase Polya (1966) cando afirmaba que o proceso de pensamento que conduce a un teorema é de todo agás rigoroso. Quizais a frase anterior sexa excesivamente categórica, pero pon de relevo o razoamento informal como unha

compoñente necesaria do pensamento matemático, incluso en sentido puro, que se completa a posteriori coa construcción de argumentos tan rigorosos como se poida, a prol de demostra-la validez do teorema achado.

Pero unha demostración esixe unha actitude argumentativa, o que implica unha reflexión sobre os significados, e non pode consistir soamente nun xogo semiótico afortunado no cal as cousas veñen a coincidir como por unha especie de destino inescrutable. Non queremos dicir que a dita actitude argumentativa non existise no/s autor/es das demostracións orixinais, senón facer fincapé en que quedan sen revelar para os estudiantes as dinámicas exploratorias que as fixeron posibles (Polya, 1945).

Un exemplo diso, precisamente relativo ó cálculo, móstranolo Apostol (1984) dende unha perspectiva histórica: os matemáticos dos séculos XVI, XVII e XVIII recorrían a unha mestura de razoamento deductivo e intuición, impulsados por conxecturas, e aínda que algúns dos seus resultados serían posteriormente vistos como incorrectos, o certo é que constituíu un período sorprendente de grandes descubrimentos. Cando o caudal de novos descubrimentos diminúe, segue un período de análise crítica e de fundamentación.

En certa forma, poderiamos dicir que planificamos este programa de ensinanza reproducindo o devandito ciclo histórico:

1º- Razoamento deductivo e inductivo combinados coa intuición.

2º- Conxecturas sobre as relacións e propiedades descubertas.

3º- Análise crítica das mesmas.

4º- Fundamentación.

Como sinalaba Entwistle (1988), a aprendizaxe que pretendemos consiste na adquisición de coñecementos e actitudes susceptibles de empregarse reflexivamente, e de ser aplicadas na educación posterior e na vida. Nesta liña de pensamento continuaremos con novas aplicacións que suscitarán novos "ciclos de aprendizaxe", cada vez máis profundos.

Se concibímo-la matemática como unha forma de pensar, a *educación matemática* debe ir máis alá da procura da adquisición dunha lista máis ou menos extensa de conceptos e técnicas; os procesos de descubrimento non soamente constitúen un medio plausible de ensina-los ditos conceptos e técnicas, son en si mesmos un obxectivo fundamental da ensinanza das matemáticas (Resnick e Ford, 1991)

Todo o anterior condúcenos á utilización de problemas como base para a introducción de conceptos e propiedades que, coas indicacións e instruccións pertinentes, suxiran o seu descubrimento e, xunto coas orientacións e a práctica apropiada a cada caso, faciliten a comprensión da estructura do contido, dinamicen o exercicio e a aprehensión de estratexias e procedementos, e posibiliten a transferencia a novas situacións, dentro dun clima propicio de participación e actividade que promova actitudes positivas cara ó coñecemento.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

7.2.- Antiderivación

Dous aspectos son os que conforman tradicionalmente os contidos escolares da integración:

- A construcción da integral definida, coas propiedades e teoremas básicos.
- O cálculo de primitivas.

que se refunden nas aplicacións, versando maioritariamente (en non poucas ocasións, exclusivamente) sobre o cálculo de áreas de trapecios mixtilíneos ou de recintos planos limitados polas gráficas de dúas funcións continuas.

Un dos resultados da nosa investigación informa que na percepción do alumno as técnicas de cálculo de primitivas (que absorben as propiedades de linearidade, a pesar de que habitualmente lles son tamén explicadas ós alumnos dende a perspectiva da integral definida) ocupan o lugar sustancial, relegando o concepto de integral definida a un vago recordo, os teoremas a un requisito que debe conservarse na memoria, e as

aplicacións a un mero apéndice circunstancial no que se fai un uso rutineiro da regra de Barrow.

Dado que tradicionalmente a integración se estudia inmediatamente despois da derivación, propoñemos incluír no tema de "derivadas" algúns exercicios específicos de "antiderivación", proporcionando a función derivada e preguntando pola función orixinal da que provén. Deste xeito, cando posteriormente se constrúa a integral definida como un novo concepto e se chegue a establece-lo teorema fundamental, aquel reforzarase coas ideas anteriores -cálculo de antiderivadas ou primitivas-, debendo así clarificarse o rol que desempeñan no tratamento do novo campo de problemas que emerxe coa integración. Neste sentido, as nosas experiencias en BUP (capítulo 3º) avalan a oportunidade da proposta.

Por outra parte, detectamos que moitos estudiantes que escriben a constante de integración cando se lles presenta unha integral indefinida ("+ k"), non a empregan en problemas de aplicación, nos que deberan identifica-lo seu específico valor para o caso que se pretende resolver. E incluso a maioría dos que a identifican en exercicios concretos, non se decatan da súa presencia en enunciados formais do mesmo tipo dos que manexan na parte teórica do tema, nos que debera porse de manifesto que a constante expresa o valor da magnitude calculada nun fragmento de intervalo, previo a aquel para o cal buscamos unha primitiva. Sobre isto volveremos máis adiante.

Agora nótese que o proceso de cálculo de primitivas non é exactamente o inverso da derivación, xa que mentres neste o resultado de derivar unha función é outra función (no caso de existir), a integración indefinida proporcionaría *unha familia de funcións* que se diferencian entre si nunha constante, e en cada situación particular haberá aínda que determinar cál desas funcións da correspondente familia é a que estamos buscando.

É importante deixar constancia deste feito, pois del infírese a necesidade de contar con algunha información complementaria que permitise individualiza-la función buscada: os procesos de alteración das variables do problema e a análise das consecuencias de tales alteracións son inherentes á actividade matemática e favorecen o afloramento e a aprehensión das estructuras subxacentes (Fielker, 1987).

7.3.- Tipoloxía dos problemas de integración

Aínda que o problema da determinación dunha área impulsou decisivamente a construcción teórica do cálculo integral, a riqueza de situacións que poden ilustrarse para ser mellor comprendidas a través dunha expresión xeométrica do problema, e concretamente mediante unha área, é estensa (aínda que nalgúns casos, tan clásicos algúns coma os volumes de revolución ou os arcos de curva, a representación xeométrica da situación non a facemos por medio de áreas).

A pesar disto, a nosa investigación revela que son maioría os alumnos que soamente citan o cálculo de áreas entre as utilidades da integración; e entre os restantes a penas se fai referencia ó espacio percorrido por un móbil (en relación coa velocidade) ou ó volume dun corpo de revolución, xa máis raramente.

Unha característica das teorías matemáticas é o seu poder unificador: a posibilidade de tratar un extenso campo de problemas, aínda que estes teñan orixes do máis diverso.

Nese sentido, a ensinanza das matemáticas debe ser honrada matematicamente, poñendo de manifesto a estructura do contido e proporcionando a oportunidade de practica-los novos conceptos e técnicas nunha grande diversidade de contextos. Non debemos unicamente ensinar ós alumnos a facer algunha cousas, se non tamén o valor das mesmas. Elo pode redundar non soamente na calidade dunhas aprendizaxes determinadas, senón tamén estimula-la súa motivación xeral cara ó coñecemento. (Resnick e Ford, 1991).

Poderiamos dicir que a fenomenoloxía de situacións susceptibles de seren tratadas a través da integración moderna responde ó estereotipo $\Delta M(x) = f(x) \cdot \Delta x$

(máis formalmente: $dM(x) = f(x)\cdot dx$): queremos avaliar unha magnitude que depende dunha variable *x*; un elemento (diferencial) do que pretendemos calcular obtense como producto dunha función desa variable por un elemento (diferencial) da variable mesma.

- Na anterior expresión *f(x)* é unha "*densidade*" ou unha "*taxa de variación instantánea*" da magnitude *M(x)* respecto de *x*.

Aínda que, certamente, o grao de familiaridade que o resolutor teña cos obxectos que se presentan nun determinado problema pode inspirarlle un procedemento concreto e específico de resolución, que de ser correcto deberá ser aproveitado[1], consideramos que baixo as dúas acepcións anteriores podemos "pensar" a xeneralidade das situacións de integración, que responden a dúas percepcións psicoloxicamente diferentes:

- Unha estática, a densidade: cantidade de masa respecto do volume (a habitual densidade), cantidade de forza/superficie (presión), cantidade de fluxo/superficie (intensidade de campo) ..., que se conecta facilmente coa idea de "suma" de tódalas pequenas cantidades *f(x)dx*, que constitúen a integral definida.

- Outra dinámica, a taxa de variación instantánea: variación de espacio/tempo (velocidade), aumento da poboación/tempo (taxa de crecemento), ingreso/producción (ingreso marxinal) ..., que permite conectar coa idea de antiderivación (*M´(x) = f(x)*), na medida en que se teña asimilada *a derivada como a taxa de variación instantánea,* para o cal sería pertinente que a dita visión da derivada se fixese explícita cando se estudia, feito que, por outra parte, é cada vez máis frecuente.

Reuni-las dúas baixo un mesmo concepto esixe un esforzo de abstracción máis profundo. Por exemplo:

[1] Por exemplo, nos problemas de volume hai unha tendencia moi estendida entre os iniciados na integración a identificar directamente un elemento diferencial construído a partir dunha determinada sección plana do corpo, sen que nos paremos a pensar que a dita sección é precisamente a densidade de volume respecto dunha das dimensións (xeralmente perpendicular á sección considerada).

Ou tamén, na determinación da ecuación dunha curva adoita empregarse a relación que esta garda coa súa tanxente en cada punto, dando lugar a unha ecuación diferencial, sen que nos deteñamos a considerar que a pendente da tanxente é precisamente a taxa de variación instantánea.

- Se contemplamos dinamicamente a masa dun corpo (estático) que imaxinariamente imos percorrendo, a densidade indicaría precisamente o aumento de masa que vai corresponder nun novo elemento de volume.
- Reciprocamente, se contemplamos estaticamente un movemento (dinámico), como se xa tivese acontecido e o percibisemos globalmente, a cantidade de espacio "conseguida" nun elemento de tempo determinado viría indicada pola velocidade nese momento.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

7.4.- Procesos psicolóxicos subxacentes

O cálculo integral resulta dunha conxunción de dous procesos psicolóxicos fundamentais:

- Un **analítico**: estratexia ou procedemento xeral de descomposición dun todo en partes o suficientemente sinxelas como para que poidan ser tratadas dende a perspectiva do problema que se nos presenta (tramos de forza supostamente constante, figuras xeométricas simples: rectángulos ...).

  Isto, especificamente, daría lugar á obtención de aproximacións, sendo teoricamente posible diminuír tanto como se desexe o erro cometido. Levado ás últimas consecuencias, chegaríase á parcelación en elementos diferenciais (dividindo o continuo en intervalos infinitesimais nos que se poidan aplicar fórmulas coñecidas).

- Outro inverso, de **síntese:** tamén de carácter xeral, globalizando as partes nun todo único con identidade propia e que na tesitura creada polo proceso analítico anterior incorpora, especificamente, os infinitos elementos nun único obxecto: a integral definida (integrar nun todo, sumar), pola que se obtería o valor exacto (íntegro) da magnitude en cuestión.

A investigación revela que, malia que a práctica totalidade dos estudiantes recorda que tivo un contacto con estas ideas ó serlles presentado "o problema da área", para a maioría careceu da intensidade e explicitación suficientes como para producir unha toma de conciencia delas, o que vai supoñer un lastre na súa comprensión do cálculo integral, ademais de perde-la oportunidade formativa de desenvolver estes procedementos esenciais na matemática, e en xeral no pensamento.

Dende unha perspectiva metacognitiva, intentaremos que os estudiantes se pregunten[2]:

i) Se un determinado problema pode fragmentarse en pequenas partes de inferior dificultade, de maneira que a reunión das correspondentes solucións parciais proporcione unha aproximación á solución global que están buscando.

ii) Se a dita aproximación melloraría ó seren as partes máis pequenas.

iii) Se poden expresar analiticamente un elemento diferencial.

iv) Se a dita expresión responde ó modelo $dM(x) = f(x)\cdot dx$.

No epígrafe 11 deste mesmo capítulo incluímos unha proposta para unha representación máis formal desta casuística. No 2º apéndice realizamos unha revisión rigorosa, necesaria para resolve-las contradiccións en que podería incorrerse con problemas como o da lonxitude dun arco de curva, ou o da superficie lateral dun corpo, pero que xulgamos propia dun nivel formativo máis alto.

7.5.- Actividades introductorias: a potencia do método

En coherencia co anterior propoñemos unhas actividades introductorias que, nun estado aínda pre-formal, recreen o dobre proceso analítico-sintético e mostren a

[2] Os dous primeiros puntos reunen a esencia do que poderíamos chamar "integración clásica", e os dous seguintes a da "integración moderna" que nos conduce ó cálculo de primitivas.

potencia do método, ó tempo que imos adoptando a notación específica.

Moi interesante resultaría o cálculo atribuído a Keppler do volume dunha esfera, coñecida a súa superficie. Nel mestúranse dúas magnitudes non homoxéneas: volume e superficie, e o artificio de recorrer dunha á outra é inevitable, polo que se informa disto ó resolutor.

i) O proceso analítico que se segue é o de descompoñe-la esfera en minúsculas pirámides, o volume das cales deberá recordarse oportunamente.

ii) O proceso de síntese conséguese ó integra-las bases desas pirámides nun único obxecto: a superficie da esfera, magnitude previamente coñecida.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

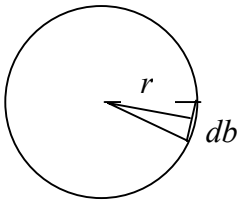
Esquematicamente, respondería ó seguinte:

$$dV = \tfrac{1}{3} dB \cdot r \qquad V_{esfera} = S_{uma}\, dV$$

$$V = S_{uma}\, \tfrac{1}{3} dB \cdot r = \tfrac{1}{3} r \cdot S_{uma}\, dB = \tfrac{1}{3} r \cdot S_{uperficie\ da\ esfera} = \tfrac{1}{3} r \cdot 4\pi \cdot r^2 = \tfrac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

Ben antes que o de Keppler, ben a continuación -como unha actividade tipicamente de reforzo e consolidación, na cal se emula á anterior a un nivel máis alcanzable-, podería propoñerse o cálculo da área dun círculo coñecido o seu perímetro.

Esquematicamente, respondería ó seguinte:



$$dA = \tfrac{1}{2} db \cdot r$$

$$A_{círculo} = S_{uma}\, dA = S_{uma}\, \frac{db \cdot r}{2} = \tfrac{1}{2} r \cdot S_{uma}\, db = \tfrac{1}{2} r \cdot 2\pi r = \pi r^2$$

7.6.- Aproximacións sucesivas

Outro feito que constatamos é que moitos alumnos rematan os estudios de secundaria sen ter realizado nunca estimacións dunha magnitude, alomenos no contexto da integración, e moi poucos viviron un proceso de aproximacións sucesivas a unha medida buscada, máis alá da explicación que o propio profesor/a lles proporciona cando introduce o concepto de integral definida, pero sen que eles se involucren nos cálculos parciais que conducen á avaliación da magnitude.

A continuación propoñemos un proceso de aproximacións sucesivas a unha magnitude sinxela de avaliar e suficientemente coñecida dos estudiantes, que responda á tipoloxía referida; proceso que emule, con total significatividade para o estudiante destes cursos, os antecedentes históricos do cálculo integral, baseados en métodos numéricos ideados a través de representacións xeométricas:

i) Presentación da situación.

ii) Cálculo individual dunha aproximación[3].

iii) Comparación das aproximacións fornecidas polos membros do grupo-clase.

iv) Valoración delas mediante o paso ó cadro xeométrico[4].

v) Mellora conxunta da aproximación, con representación gráfica.

vi) Intuición da existencia dun límite e busca del mediante o cadro analítico. Introducción significativa do elemento diferencial *dx*.

vii) Identificación dos procedementos analítico e xeométrico: límite e área.

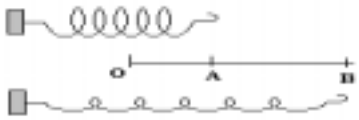
Aínda que os antecedentes históricos ós que nos referiamos trataban de cálculos de áreas, o contexto sociocultural e académico dos nosos alumnos converte o problema do resorte elástico (lei de Hooke) nun bo candidato para os estudiantes de "ciencias", que comentamos a título de exemplo.

[3] Aínda que é previsible que se realice algunha aproximación no sentido esperado, se iso non ocorre o profesor/a indicará cómo realizala.

[4] Aquí facemos vale-la máxima de Ian Stewart (1984): "as figuras axundan ó pensamento, ¿quen pode desprezar algo que lle axuda a pensar mellor?"

Esquematicamente, respondería ó seguinte:

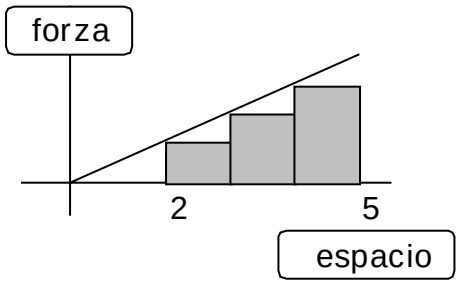
"A forza f que exerce un resorte elástico varía proporcionalmente á estirada. ¿Como calcula-lo traballo físico realizado entre dous puntos dados?"

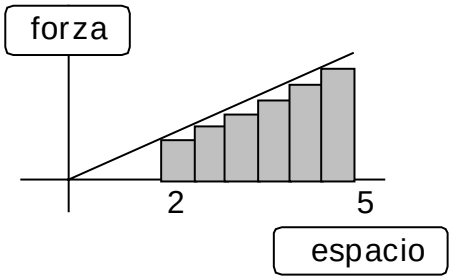


Saberiamos cómo calcula-lo traballo se a forza fose constante: $T = f \cdot e$ (coñecida por tódolos estudiantes dende cursos anteriores, e recordado agora se fose necesario).

Se considerasemos tramos moi pequenos, a forza a penas tería marxe para variar, polo que, aínda non sendo exacto de todo, indo cachiño a cachiño, poderiamos calcular con aproximación o traballo en cada anaco empregando a fórmula $T = f \cdot e$; despois sumámolo todo é teremos unha aproximación ó total entre os puntos A e B do problema.

A función (forza) que se aplica é moi sinxela (por exemplo $f(x) = \frac{1}{3}x$, onde a constante $\frac{1}{3}$ é unha característica do resorte que se utiliza) e ó trasladar ó gráfico a magnitude calculada (traballo), obtemos sumas de rectángulos que converxen a un trapecio:





- Certamente poderiamos aínda facelo máis simple e obter un triángulo: bastaría toma-lo intervalo de aplicación a partir da orixe, pero isto supón unha perda de xeneralidade que non é xustificable cando a situación xa é dabondo sinxela.
- En cambio, cando trasladémo-lo estudio á "función traballo" o grao de simplificación que se conseguiría si será realmente substantivo, como veremos.

Na tesitura formativa na que se atopan os estudiantes deste nivel académico, pensamos que, inicialmente, o tratamento máis comprensible para eles, así como máis

operativo, consiste en dividi-lo intervalo en subintervalos da mesma lonxitude, xa que permite representa-la magnitude que se quere calcular como o límite dunha sucesión, sendo relativamente accesible a expresión do seu termo xeral. Por outra parte, esta forma de enfocalo é un proceso constructivo facilmente imaxinable.

Para de facilita-la recreación visual do proceso optamos polas sumas de Cauchy: $S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot(x_{i+1} - x_i)$, nas que se considera o valor da función no extremo inferior de cada subintervalo porque o seu "debuxo" semella ser máis nítido, e intentaremos intuí-la existencia de $lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot(x_{i+1} - x_i)$ nos termos de converxencia usuais: aproximándonos a un valor tanto como desexemos, e non co criterio de converxencia do propio Cauchy, facendo que dúas sumas S e S´ difiran nunha cantidade arbitrariamente pequena.

Esquematicamente, respondería ó seguinte:

Intentaremos escribir tódolos sumandos cunha notación semellante, iso facilitaránolo achado dunha expresión xeral: se facemos *n* divisións iguais, cada unha medirá *3/n*, e corresponderán ós puntos:

$$2,\ 2+\frac{3}{n},\ 2+\frac{3}{n}\cdot 2,\ 2+\frac{3}{n}\cdot 3,\ ....\ = 2+\frac{3}{n}\cdot 0,\ 2+\frac{3}{n}\cdot 1,\ 2+\frac{3}{n}\cdot 2,\ 2+\frac{3}{n}\cdot 3,\ ....\ \rightarrow\ 2+\frac{3}{n}\cdot i,\quad i=0,1,...,n-1$$

O traballo calculado utilizando *n* tramos, que se corresponde á suma das áreas dos *n* rectángulos, virá dado por:

$$S_{uma}\, f\cdot e = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3}\left(2+\frac{3}{n}\cdot i\right)\cdot\frac{3}{n} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\cdot i\right) = \frac{2}{n}\cdot n + \frac{3}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = 2+\frac{3}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} = 2+\frac{3}{2}\cdot\frac{n-1}{n}$$

Continuando indefinidamente este proceso poderiamos diminuí-lo erro tanto como desexemos. O caso ideal virá dado polo límite:

$$Lim_{n\to\infty}\ \frac{n-1}{n} = 1 \qquad 2+\frac{3}{2}\cdot\frac{n-1}{n} = 2+\frac{3}{2}\cdot 1 \rightarrow \frac{7}{2} = 3'5$$

que se corresponde coa Área do trapecio: $\dfrac{\frac{5}{3}+\frac{2}{3}}{2}\cdot 3 = \dfrac{7}{2} = 3'5$

Neste contexto de aprendizaxe débese contempla-la posibilidade de seguir outros camiños, ós que xa aludiamos no 2º capítulo; concretamente:

- As sumas superiores e inferiores, atribuídas frecuentemente a Darboux, de cara a, posteriormente, facilita-la fundamentación da integral definida buscando a igualdade:

$$Supremo\left\{\sum_{i=0}^{n-1} m_i\cdot(x_{i+1}-x_i)\right\} = Ínfimo\left\{\sum_{i=0}^{n-1} M_i\cdot(x_{i+1}-x_i)\right\}$$

  na que non se apela ó límite, pero na que tampouco se dá unha vertente constructiva do problema por resolver, senón que se refire unicamente á existencia da solución (integral definida).

- As sumas de Riemann, nas que o proceso si se fai constructivo apelando ó límite:

$$Lim_{\max\{(x_{i+1}-x_i)\}\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i),\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

  pero onde o límite debe corresponder a calquera das sucesións formadas tomando particións sucesivas coas súas normas converxendo a 0, e elixindo arbitrariamente un punto calquera de cada subintervalo; idea bastante máis complexa que as de límite dunha sucesión ou dunha función, xa coñecidos.

En calquera caso a continuidade da función f coa que traballaremos vai garanti-la existencia do límite e a independencia dos puntos elixidos.

Así, nalgunha actividade deste apartado debera propoñerse a escolla dunha partición e de puntos "mostra" respectivamente de cada subintervalo, de maneira que o erro cometido na "suma" se reduza respecto dos cálculos anteriores -por sumas superiores e inferiores-. Nela podería deixarse aberta a posibilidade de que tódolos subintervalos teñan a mesma lonxitude, pero sen que teña que ocorrer forzosamente.

7.7.- Estudio ampliado por ordenador

A sinxeleza do exemplo anterior (lei de Hook ou semellante) estimularía a busca do límite, pero non debemos deixar que se xeren falsas expectativas: a maioría dos casos, incluso tan "humildes" que poidan debuxarse mediante unha parábola, presentarán dificultades serias.

Propoñemos un problema conceptualmente análogo, incluso coas mesmas variables có anterior, pero de maior complexidade técnica.

Neste punto, a repetición do proceso faríao máis explícito, reforzando a compoñente metacognitiva. As dificultades para controla-la tendencia dos valores obtidos fai necesario contar con maior cantidade de aproximacións. A lentitude nos cálculos e nas representacións xeométricas poderíase solucionar con algún software básico (DERIVE ou EXCEL, por cita-los máis frecuentados entre o profesorado de institutos). De non estar en condicións de realizar unha práctica na aula de informática, alomenos sería de interese mostrar unha serie o suficientemente abundante de valores e gráficos, explicando cómo foi obtida.

Percibida a utilidade do paso ó cadro xeométrico como procedemento auxiliar que nos axuda a pensar, estimularémo-lo seu uso, deixando sempre a iniciativa ós estudiantes, intervindo nós a continuación.

Unha vez que a última actividade do apartado anterior introduce a idea de que no caso de pretender calcular unha aproximación, esta podería mellorarse con puntos intermedios, é posible que os intentos se fagan neste sentido. Ademais, de novo a representación xeométrica do problema resulta clarificadora.

Por outra parte, concretamente a identificación do punto medio dun intervalo é especialmente sinxela, o que nos ofrece a posibilidade de sistematiza-lo cálculo, realizando o que se coñece como *regra do punto medio*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x_i})\cdot(x_{i+1}-x_i), \quad \overline{x_i}=\frac{x_{i+1}+x_i}{2}$$

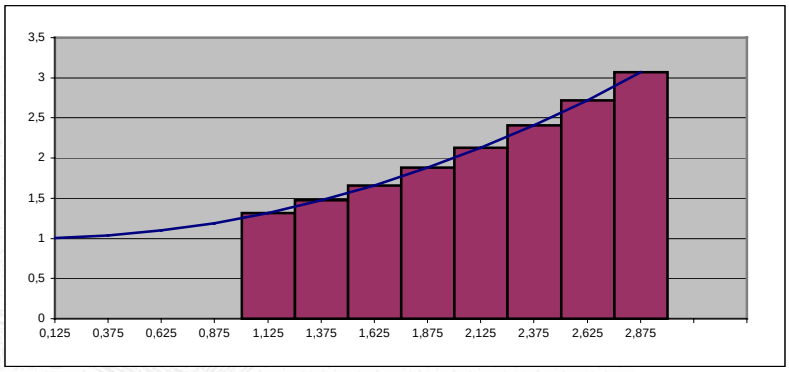
Consideramos que esta regra, moi intuitiva, podería constituír un contido de aprendizaxe específica, xunto coas razóns que xustifican o seu uso.

Por exemplo, unha función tan sinxela como $f(x)=\frac{1}{4}x^2+1$ xa supón un grao de complicación importante nas aproximacións: despois de deixar que o alumno o intente con recursos tradicionais, co ordenador complementariámo-los seus traballos.

Esquematicamente, respondería ó seguinte:

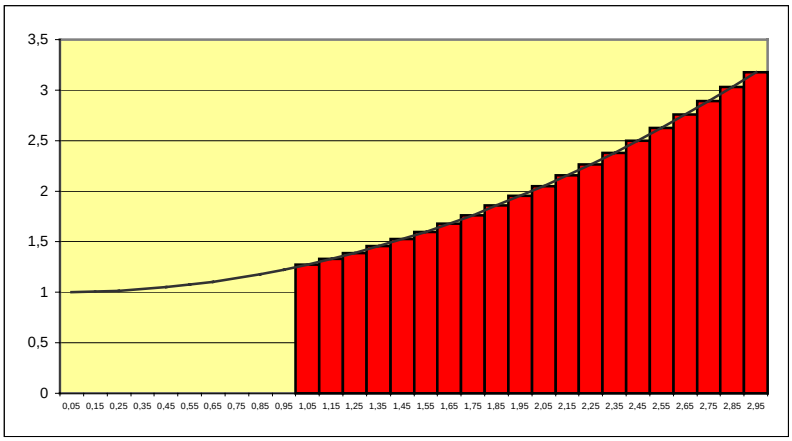
x	f(x)	f(x)·0´25
1,125	1,316	0,329
1,375	1,472	0,368
1,625	1,660	0,415
1,875	1,878	0,469
2,125	2,128	0,532
2,375	2,410	0,602
2,625	2,722	0,680
2,875	3,066	0,7666
	Suma	**= 4,1640**

Tomando intervalos de 0´25 de longo



x	f(x)	f(x)·0´1
1,05	1,275	0,1275
1,15	1,330	0,1330
1,25	1,390	0,1390
1,35	1,455	0,1455
.....	.....	.....
2,75	2,890	0,289
2,85	3,030	0,303
2,95	3,175	0,317
	Suma	**= 4,1662**

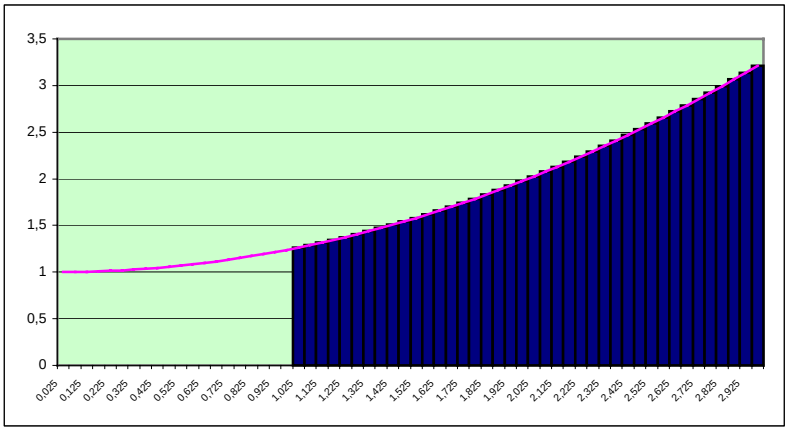
Tomando intervalos de 0´1 de longo



x	f(x)	f(x).0´05
1,025	1,2625	0,063

Tomando intervalos de 0´05 de longo

1,075	1,288	0,064
1,125	1,316	0,065
1,175	1,345	0,067
.....	.....	.....
2,875	3,066	0,153
2,925	3,138	0,156
2,975	3,212	0,160
T =	**Suma**	**= 4,1665**



Finalmente obteriámo-lo valor definitivo calculando o límite, para o cal, por resultar dunha maior complexidade, proporcionariámo-la expresión xeral:

$$1, 1+\frac{2}{n}, 1+\frac{2}{n}\cdot 2, 1+\frac{2}{n}\cdot 3, ... \rightarrow 1+\frac{2}{n}\cdot i,\ i=0,1,...,n-1$$

$$S_{uma}\, f\cdot e = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{n}\cdot i\right)^2+1\right]\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{4}{n^2}\cdot i^2+2\cdot 1\cdot\frac{2}{n}\cdot i\right)+1\right]\cdot\frac{2}{n} =$$

$$= \frac{10}{4n}\cdot n+\frac{2}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2+\frac{2}{n^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{10}{4}+\frac{2}{n^3}\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{6}+\frac{2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} =$$

$$= \frac{10}{4}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2n^2-3n+1}{n^2}+\frac{n-1}{n}$$

$$Lim_{n\to\infty}\ \frac{10}{4}+\frac{2}{6}\frac{2n^2-3n+1}{n^2}+\frac{n-1}{n} = \frac{10}{4}+\frac{2}{6}\cdot 2+1 = \frac{25}{6} = 4'16666...$$

Deteriámonos aquí en aprecia-lo grao de aproximación conseguida en cada caso, mostrando a potencia dos métodos numéricos.

7.8.- Buscando métodos xerais

Trataríamos a continuación situacións que tivesen unha evidente analoxía coa anterior, o que suxire a posibilidade de que exista tamén unha analoxía nas respostas, intentando así poñer en práctica os mesmos procedementos:

- Aproximacións alxébricas e xeométricas.
- Resultado analítico (límite).
- Resultado xeométrico (trapecio).

Un dos problemas que se presentan ó traballar con números concretos é que as operacións entre eles dan lugar a novos números, perdendo de vista, literalmente, os datos iniciais, sendo difícil apreciar en qué medida están influíndo no resultado (aínda que con menos frecuencia, tamén pode suceder isto mesmo en cálculos literais cando se realizan simplificacións).

Continuámo-la exploración tomando intervalos con extremo inferior na orixe (dando lugar a triángulos), o que permitirá identificar facilmente o valor calculado (integral definida) co extremo superior, o que nos sitúa na tesitura de describi-los cálculos feitos, e tódolos posibles desta mesma natureza, mediante un mesmo método. A explicitación disto reforza a aprendizaxe actitudinal.

Despois dalgúns exercicios de práctica, nos que intencionadamente fariamos aparecer un intervalo $[0,b]$, propoñeriamos explicitamente a actividade de busca dun método que poida ser empregado en tódolos cálculos que obedecen a situacións análogas. A continuación propoñeriámo-la utilización do método en novos casos particulares.

Diciamos "intencionadamente" referíndonos ós intervalos tipo $[0,b]$, porque o seu manexo pode suxerirlles a algúns estudiantes intentar responder previamente a esta clase de casos "máis sinxelos", antes de intentalo coa xeneralidade.

- Temos aquí outra cuestión actitudinal que pode abrir camiños de éxito: cando a dificultade de conxunto desborda inicialmente ó resolutor, afrontamos unha solución parcial.

- A similitude aritmética e gráfica dos intervalos [*0,b*] suxire intentar resolver antes estes casos (xeometricamente triángulos, para os que, no exemplo citado, obteriamos $\frac{b^2}{6}$ como resultado), para máis adiante xeneralizar a calquera intervalo.
- Sen embargo non parcelámo-lo problema a priori, senón despois de telo presentado globalmente, e en función das respostas dos alumnos.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

7.9.- En torno á regra de Barrow

Agora sería interesante facerlles explícita a reflexión anterior, acerca de que por "perder de vista" os números iniciais, non podemos apreciar en qué medida están influíndo no resultado. Isto xustifica o interese do cálculo literal (aínda que certamente poderiamos facer cálculo literal cos símbolos numéricos: para a intención que temos agora sería suficiente con non realizar operacións e conservalos como símbolos calquera).

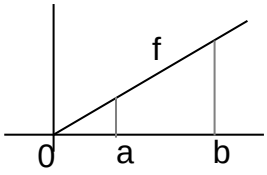
Propoñeriámo-la xeneralización que deixaramos antes pendente, entre dous puntos *a* e *b* calquera, e indicariamos que o resolvesen directamente no cadro xeométrico.

Esquematicamente responde ó seguinte:

Traballo dende *a* ata *b* = Traballo total ata *b* - Traballo xa feito ata *a*

Área do trapecio = triángulo en *b* - triángulo en *a* =

$$\frac{b^2}{6} - \frac{a^2}{6}$$



A continuación comprobamos que efectivamente os cálculos anteriores, nos intervalos concretos elixidos, responden a esta fórmula; e que tamén responden a ela os casos [*0,b*], que se engloban naquela con tal de admitir que *a* poida ser igual a 0.

Comprobar é tamén unha actitude que convén promover para que poida ser "aprendida" dende a práctica: os resultados particulares xa coñecidos deben ser confirmados pola fórmula xeral.

Intentar estender unha relación ou propiedade, de xeito que inclúa outros casos, é outra cuestión actitudinal importante, matematicamente vinculada ó concepto de dominio de validez dunha proposición ou resultado, que contribúe ó desenvolvemento da capacidade de abstracción na medida en que o concreto, o 0 neste exemplo, deixa de ser considerado como un caso particular.

É habitual nos textos presenta-la regra de Barrow como un corolario do teorema fundamental, pero o certo é que aquela foi anterior a este, aínda que nunha reconstrucción formal se prefira inverte-la orde para gañar coherencia lóxica na exposición.

Non propoñemos seguir outro camiño teórico-matemático diferente ó usual, xa que neste traballo tentamos formular alternativas didácticas, e un troco no discurso matemático-formal podería aredarnos das prácticas de aula. O que si queremos é aprender da historia do cálculo, a cal nos mostra cómo as representacións xeométricas poden facilitarnos intuicións correctas dun resultado, cómo podemos manexalo con éxito en certos ámbitos de aplicación, e cómo as ditas representación serven de soporte a construccións máis abstractas e xerais.

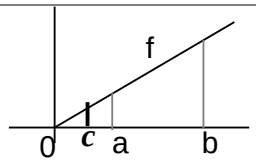
O teorema de Barrow, tal e como hoxe en día se formula, postula a validez dunha primitiva calquera no intervalo onde se integra, e a dita xeneralidade próbase a partir do feito de que as primitivas diféreńcianse dunha constante. Sen embargo, a investigación pon de manifesto que a maioría dos estudiantes non son capaces de reinterpretar en termos de integración ese último feito, polo que será necesario reflexionar sobre isto.

Esquematicamente, responde ó seguinte:

Traballo dende a ata b = Traballo dende c ata b - Traballo xa feito dende c ata a

Área do trapecio $[a,b]$ = trapecio $[c,b]$ - trapecio $[c, a]$

= triángulo en b - triángulo en a $= \frac{b^2}{6} - \frac{a^2}{6}$



7.10.- Intuición do teorema fundamental

A pesar da importancia que tivo o problema da área na creación da integral, vincular rigorosamente estes dous conceptos é un exercicio de formalización que, como mostramos no capítulo 2º, desbordaría os obxectivos desta etapa educativa.

En calquera caso as diferentes formalizacións que consultamos xorden sempre en torno ás ideas intuitivas da área dun rectángulo, da aditividade e da exhaución; o que nos abre unha vía para facer unha fundamentación "razoable".

Pero, aínda así, a área definida a partir da integral estaría supeditada a que existise unha función de contorno, á existencia da súa integral e, finalmente, só sería un coñecemento productivo se soubesemos calcula-la dita integral, cousa a miúdo moi difícil. Resultan, daquela, sorprendentes os enfoques que, case de forma xeral, se adoptaron nos textos de secundaria, ben definindo a área como a integral, ben a integral como a área.

O principal uso da integral vai ser para construír novas funcións, que virán demandadas polas ecuacións diferenciais; e, aínda que reservaremos para máis adiante un tratamento explícito delas, a perspectiva da construcción de funcións pode xa ser adoptada, aínda que didacticamente emulemos un cálculo de áreas cando "debuxamos" sobre o papel as nosas ideas moito máis xerais.

Os dous tipos de demostracións da relación fundamental que detectamos nos textos (capítulo 2º, punto 26), fan uso da continuidade da función base (que se establece como requisito no enunciado) e da aditividade da integral definida sobre o intervalo (que, loxicamente, próbase antes), e dos teoremas de Weierstrass ou Bolzano, respectivamente. Pero unha argumentación non pode consistir nun cúmulo orgaízado de felices coincidencias; esixe unha reflexión sobre os significados e unha busca intencionada das súas relacións, de maneira que o xogo simbólico posúa forza comunicativa: ¿por que queremos probar precisamente isto? e ¿que conexións podemos establecer entre as ideas de partida e as de chegada?

Poñendo a énfase nesta idea, estableceremos un diálogo co alumno en termos que lle desvelen as nosas exploracións, para formalizalas posteriormente. A pregunta que non deberamos deixar pasar dentro dun comportamento científico será: *¿que relación ten a función "traballo" coa función "forza"?*, xa que dela procede todo isto.

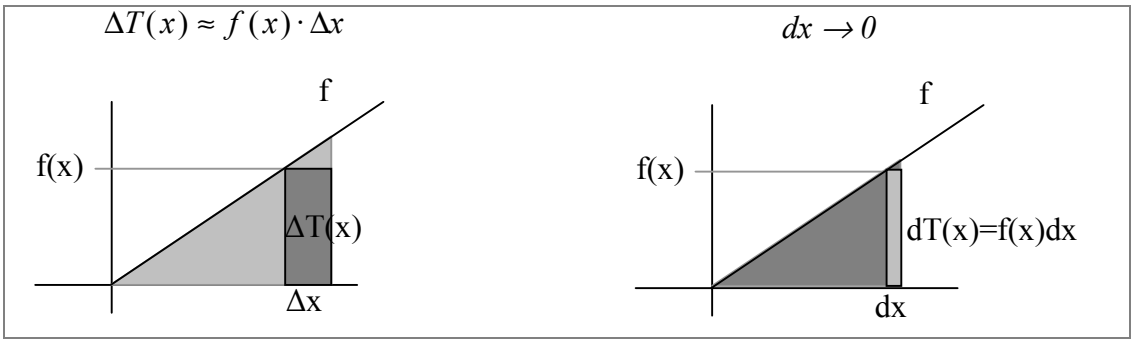
Tratarémola dende dous puntos de vista, conceptual e algorítmico:

i) Relacionando a derivada co crecemento/decrecemento, xa que é esta unha das aplicacións, clásicas, comúns, ordinarias e inexcusables da derivación, o valor da forza nun punto concreto, acerca do traballo dinos se este tende a aumentar "moito ou pouco"; infórmanos do estado de cambio do mesmo. Logo a *forza* garda relación coa *derivada* do traballo.

   Se a derivada foi estudiada como "taxa de variacións instantánea", entón a reflexión anterior traeranos ata aquí. De non haber contribucións neste sentido, sería o profesor/a quen o indicase.

ii) Estando recente o estudio das derivadas, e concretamente os exercicios de antiderivación, intentaremos ver algunha relación entre as correspondentes expresións $f(x)=\frac{x}{3}$ (función "base") e $T(x)=\frac{x^2}{6}$ (función Traballo, dende a orixe ata o punto x). En último caso, sería o profesor/a quen o suxerise, comprobándoo entón os alumnos.

Unha vez máis o cadro xeométrico axúdanos a pensar:



Atopámonos a continuación con outra cuestión actitudinal: unha vez visto que efectivamente $T' = f$, debemos tentar xustificalo, constatando que non se trata soamente dunha coincidencia.

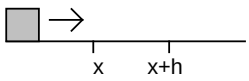
i) Analizaremos se a relación entre as funcións "traballo" e "forza", $T' = f$, ten fundamentación lóxica ou se, pola contra, é un resultado casual debido ás fórmulas concretas que estamos estudiando.

ii) Para iso situámonos no caso xeral dunha función forza calquera *f(x)*, e desenvolvémo-la derivada da función traballo.

iii) A aditividade da magnitude "traballo" sobre o intervalo, e a continuidade da función "forza" serán o soporte intuitivo do noso razoamento[5], ó que no seguinte epígrafe nos referiremos explicitamente.

Esquematicamente, responde ó seguinte:

$$T'(x) = lim_{h \to 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h}$$



O numerador expresa o traballo realizado ó desprazarnos do punto *x* ó *x*+*h*:

*T*raballo entre os puntos *x* e *x*+*h* = *T*raballo total ata *x*+*h* - *T*raballo xa feito ata *x*

Cando $h \to 0$, por tratarse dun elemento infinitesimal de espacio, a forza f a penas ten marxe para variar, xa que varía precisamente co espacio, logo *podemos supoñer* que o seu valor *f(x)* permanece constante nese tramo.

Se a forza fose constante:

[5] A combinación destas dúas propiedades permítenos salvar facilmente o caso da continuidade a anacos, que sería introducida despois de consolida-las primeiras aprendizaxes..

*T*raballo entre o punto x e o punto $x+h$ = forza · espacio = $f(x) \cdot h$

Logo $T'(x) = lim_{h\to 0} \dfrac{T(x+h)-T(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x)\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} f(x) = f(x)$.

O erro cometido nesta *suposición* pódese facer tan pequeno como se desexe; abonda con tomar h o suficientemente próximo a 0.

7.11.- Revisión crítica: modelos de integración

Nótese que a validez desa última suposición implica:

1) Que a función f sexa continua, o que nos garante que en calquera punto do subintervalo $[x,h]$:

   $f(x+\alpha\cdot h) \approx f(x)$, con $\alpha \in [0,1]$, para un h suficientemente pequeño.

   Certamente estamos a traballar con funcións continuas nun intervalo, aínda que soamente fixámo-lo seu extremo inferior (0); e pretendemos comproba-la relación $T'(x) = f(x)$ en todo o intervalo (agás, se cabe, no 0).

   E antes xa aceptaramos:

2) Que a magnitude a calcular (traballo) era aditiva no intervalo:

   traballo entre 0 e $x+h$ = traballo entre 0 e x + traballo entre x e $x+h$

3) Que no caso de ser constante a función nun intervalo de amplitude h, a magnitude buscada obtense polo producto $f \cdot h$.

O paso á xeneralización, construíndo unha función que exprese o traballo "dende un punto predeterminado a a un punto calquera x" resulta agora doado:

$T(x) = \frac{x^2}{6} - \frac{a^2}{6}$, pois xa coñecemos a expresión entre dous puntos concretos *a* e *b*, que obtivemos co mesmo suposto implícito da aditividade, suxerido pola intuición natural.

Pero na xustificación da relación fundamental $T' = f$ non se empregou ningunha propiedade concreta da magnitudes físicas en cuestión, nin sequera fórmulas matemáticas específicas. En realidade o que fixemos foi estudiar como calcular o valor, *dende unha orixe pre-establecida ata un punto determinado*, de calquera magnitude *F* aditiva nun intervalo ó que pertencen os ditos orixe e punto, se no caso de que certa función f continua nese intervalo, e coa cal se relaciona, se mantivese constante nun subintervalo de lonxitude *h* ó cal pertenza o punto, sucedese que $F = f \cdot h$.

No apartado 2º deste capítulo (Antiderivación) referiámonos á dificultade dos alumnos para comprender, fronte a problemas de aplicación, que as primitivas que obteñen "por integración" son funcións "de intervalo": están definidas para calquera punto dun certo dominio, predeterminando un punto inicial. Cada punto inicial fixado proporciona unha función da familia, e podemos empregar calquera delas, en particular aquela na que a "constante de integración" é 0, sempre que traballemos coa integral definida, pero soamente será válida unha das funcións cando apliquémo-la integral indefinida a certa magnitude, estando nese caso obrigados a determina-la constante en cuestión.

A investigación pon de manifesto que esta idea non é comprendida pola maioría dos estudiantes, nin nos aspectos teóricos implicados no teorema fundamental, nin nos problemas prácticos:

- O feito de que ó integrar funcións polinómicas (sen dúbida as máis familiares e accesibles ós alumnos) obteñamos tódolos termos "en *x*", enmascara esta cuestión, que é unha fonte de erros en problemas de aplicación, levando a considerar que hai unha "verdadeira" función, sen constante, á que logo haberá que sumarlle un valor proporcionado nos datos do problema, e aínda que perciben que se trata dunha constante, esta non se asocia ó proceso de integración.

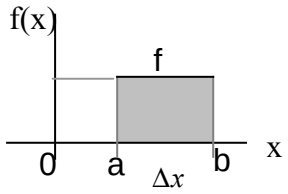
- Habitualmente o desexo de gañar simplicidade na escrita lévanos a omiti-la constante cando empregamos integrais definidas; a observación anterior recomenda non facelo. Certamente a situación máis frecuente neste caso é a de aplica-la regra de Barrow, a cal se enuncia para unha primitiva calquera, en particular para aquela con $k = 0$.
    - Isto pode levar de xeito rutineiro e non consciente a non escribila, e pode ter consecuencias negativas en actividades a penas diferentes pero cunha pequena distinción na demanda, tal como analizabamos no problema 3.11.
    - Por este motivo propoñemos que se escriba a constante nas primeiras prácticas, aínda que se eliminará nos cálculos, mentres se colle seguridade.

Agora sería o momento de facer explícitas estas ideas avanzando cara ós *modelos de integración*, e a continuación sería pertinente introduci-la *notación* conveniente e logo, a xeito de exercicio, aplicariámo-las funcións obtidas nalgúns cálculos máis. Desta maneira constituímos un protocolo que trataríamos de seguir ata que os alumnos mostrasen a suficiente familiaridade con estas ideas[6].

[6] Como xa indicabamos, inicialmente trataríamos con funcións continuas en todo o intervalo, pero deixando explícito que esta característica das funcións garántenos que poderiamos "mellora-las aproximacións tanto como desexemos"; porque así queda aberta a posibilidade de resolver esta cuestión con outro tipo de funcións (particularmente con continuas a anacos, que serían introducidas máis adiante mediante exemplos significativos, e aínda "illando" as descontinuidades recubríndoas con abertos de maneira que poidamos facer que a súa medida tenda a 0).

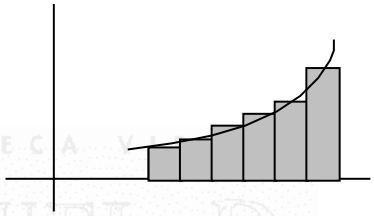
Esquematicamente, responde ó seguinte:

¿A magnitude F que pretendemos calcular obteríase como producto $f(x)\cdot\Delta x$ nun intervalo, se a función f fose constante nel?



Nese caso considerariamos tramos moi pequenos, nos que poder supoñer que a función f é constante. (*Continuidade-continuidade a anacos*).

A reunión ($\int_a^b f(x)\cdot\Delta x$) de todos eses tramos darianos unha aproximación. (*Aditividade*).



A aproximación melloraría se os tramos fosen moi pequenos, infinitesimais: dx.

En cada tramo, dx dise que é un *elemento diferencial*, porque se obtén como ***d***iferencia entre os valores de x , e o producto $f(x)\cdot dx$ dános un elemento diferencial de F: $dF = f(x)\cdot dx$.

Aludindo ás sumas (S) de productos do tipo $f(x)\cdot dx$, escribiremos: $\int_a^b f(x)\cdot dx$.

Entón, para calcula-lo magnitude nun intervalo $[a,b]$, buscaremos unha función primitiva de $f(x)$, referíndonos a calquera punto "base" c, que non é necesario especificar.

No exemplo anterior:

*T*raballo dende *a* ata *b* = *T*raballo dende *c* ata *b* - *T*raballo xa feito dende *c* ata *a*

$$T_a^b = \int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^b \tfrac{1}{3}x\cdot dx = \left[\tfrac{1}{6}x^2 + k\right]_a^b = (\tfrac{1}{6}b^2 + k) - (\tfrac{1}{6}a^2 + k) = \frac{b^2}{6} - \frac{a^2}{6}$$

(O número k non altera o resultado, pois elimínase na resta, de maneira que podemos tomar calquera primitiva, sempre que establezámo-lo intervalo).

Este valor recibe o nome de *integral definida* no intervalo $[a,b]$. (Integrar, nunha dobre acepción da palabra: sumar e obte-lo valor íntegro; e definida, no sentido de que se indica a qué intervalo se refire).

O seguinte paso, sempre didacticamente recomendable, sería o de comprobar que as nosas ideas funcionan tamén noutros casos coñecidos.

A continuación, unha situación nova permitiría contrasta-la operatividade do modelo, ó tempo que constituiría un exercicio conceptual de integración e técnico de derivación.

Unha frecuente confusión que pon de manifesto a investigación é toma-la función "taxa de variación" dunha poboación como a función que proporciona o propio valor da poboación, a pesar de que se faga mención explícita a que aquela expresa poboación/tempo, e non poboación. Este pode ser un bo momento para presentar ese tipo de situacións.

- Ademais de ser un dos problemas elementais importantes da integración, suxerimos estes exemplos porque a investigación revelou que moitos estudiantes consideran fragmentos de 1 unidade de tempo (a que se mencione no enunciado), e calculan para cada tramo unha taxa de variación que supoñen constante nel, pero non como unha aproximación, senón como a resposta correcta.
- Nun intento de clarificar esta cuestión, e tamén para reforza-la idea de que a taxa de variación instantánea é unha das acepcións da derivada, propoñerase o cálculo de aproximacións explicitamente declaradas, considerando tramos de 1 unidade para, de seguido, facelo con tramos diferentes.
- No enunciado indicaríase expresamente que se considera a situación como un fenómeno continuo, e pediríaselles que realizasen a representación gráfica para reforzar unha percepción global da situación.

Sobre a discusión continuo-discreto volveríase no seguinte epígrafe.

7.12.- Campo fenomenolóxico

Xa nos referimos a que a nosa investigación revela que a maioría dos estudiantes soamente citan os problemas de áreas entre as aplicacións do cálculo integral, ou engaden a eles os problemas de velocidade/espacio/tempo. Son esporádicas as alusións a outros fenómenos, feito moi sorprendente entre o colectivo de estudiantes "de ciencias" porque cursan unha disciplina de física onde múltiples conceptos lles son presentados mediante integrais.

Pero non é soamente iso, senón que son poucos os que recoñecen a "presencia" da integral cando, dende as matemáticas, son enfrontados a problemas que xiran en torno a conceptos físicos tan universais coma o traballo, que expresamente foron estudiados nesa materia mediante integrais.

E son aínda menos os que albiscan a integración en problemas xenuinamente matemáticos, como os volumes de revolución, que incluso eran "clásicos" nas ensinanzas medias ata hai pouco tempo, se estes non lles foron explicados previamente.

Na literatura actual especializada da psicoloxía da aprendizaxe é unha opinión común, tal como recolliamos no subcapítulo relativo á metodoloxía didáctica, que os coñecementos adquiridos nun determinado contexto non se transfiren espontaneamente a contextos diferentes; opinión coincidente coas das conferencias dos 60 ás que fixemos alusión, e que reflicte as dificultades que moitos alumnos teñen para afrontar problemas "de aplicación", dificultades incluso observables diante de problemas relativos ás mesmas técnicas por eles recentemente aprendidas e practicadas, cando nos enunciados dos problemas hai cambios escénicos respecto dos xa resoltos por eles.

O anterior recoñecemento esixe que se contemplen expresamente na planificación docente actividades que favorezan a dita transferencia. Para o cal hai, alomenos, dúas características que deberan cumprirse:

- Un abano razoablemente extenso e diverso de situacións que enmarquen os conceptos e as técnicas.
- A declaración explícita diante dos estudiantes de que pretendemos que aumenten a súa capacidade de transferencia.

Propoñemos levar a cabo unha *exploración guiada* de situacións dentro do campo de problemas da integración, que á súa vez poida ir acompasada cunha variedade ampla de funcións a integrar, constituíndo a un tempo prácticas de cálculo de primitivas.

Na medida en que avanzamos, o protocolo anteriormente exposto vaise alixeirando. Se o problema corresponde a unha situación "regular" acurtaríase:

- Identificación dun elemento diferencial.
- Expresión do mesmo da forma $f(x)\cdot dx$.
- Reunión de todo o conxunto dos elementos diferenciais mediante a integral definida.
- Busca dunha primitiva.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Entre a extensa fenomenoloxía consideramos oportuno tratar:

a) Os problemas de espacio/velocidade, porque lles son moi familiares a estes estudiantes. Con eles pretendemos inicialmente estendérlle-lo campo fenomenolóxico e, aproveitando que é deles coñecido que "a velocidade é a derivada do espacio respecto do tempo", reafirma-la relación fundamental entre os dous grandes conceptos, derivada e integral, que xa procuramos no apartado anterior.

Neste contexto intentaríase un primeiro achegamento ó "teorema do valor medio", concretamente acerca do tal *valor medio* dado que a *velocidade media* é un excelente representante desta idea; sen discutir se é ou non acadado nalgún punto para non ter que cuestionarnos neste momento a continuidade.

b) Os volumes de revolución porque nos conducen á tesitura máis xeral, que nos coidariamos de facer explícita para potencia-los aspectos metacognitivos.

Os volumes, e non soamente os de revolución, facilitan a descomposición analítica do problema ó ser doada a identificación do elemento diferencial *dV*. Pero como con calquera outro método de traballo, podemos alomenos intentar reformular determinadas problemáticas novas para ver se é posible que encaixen no modelo anterior (expresa-lo

elemento diferencial como $f(x)\cdot dx$), loxicamente cando teñamos algún estímulo para facelo.

Resulta tamén interesante dende o punto de vista de *xogo de cadros de representación*, pois sendo un exercicio xenuinamente xeométrico supón unha recreación visual novidosa, que desborda o esquema da área do recinto plano e segue a ser moi sinxela de imaxinar.

c) Os problemas de velocidade/aceleración, porque habitualmente se tratan nos libros de texto sen a reflexión suficiente, pois aínda que nocións usuais como "espacio percorrido" ou "traballo realizado" correspóndese implicitamente coas de incremento do espacio ou do traballo, respectivamente, que son as que realmente se abordan na integración, non sucede así coa velocidade que, nese sentido, é un concepto de segundo orde respecto do espacio.

- Directamente podemos percibir, en termos cualitativos, un incremento de espacio pero xa non un incremento de velocidade, que tería que vir referenciado a aquel.
- O que si nos é posible é percibir cualitativamente a velocidade nun instante. (No noso ámbito común de experiencias témo-la sensación *per se* de que algo se move con rapidez).
- Pero isto xa non sería posible coa aceleración, que vén a introducir unha terceira orde: non podemos decatarnos a través das sensacións de se un corpo ten moita ou pouca aceleración. Necesitariamos tomar referencias acerca do cambio de velocidade para facernos unha idea de se acelera moito ou pouco, e o dito cambio á súa vez teriámolo que referenciar en cambios no espacio ou lugar que ocupa (concepto primario).
- Efectivamente non é casual que as unidades respectivas sexan m, m/s, m/s^2 no Sistema Internacional: espacio, espacio/tempo, (espacio/tempo)/tempo.

Pero, paradoxalmente, esta dificultade sensorial convérteo nun bo exemplo para intentar unifica-las dúas vertentes que sinalabamos en canto á percepción dos procesos de integración: a estática (densidade) e a dinámica (taxa de variación), pois mentres que o método de aproximacións presupón o detalle dun todo en elementos que o compoñen, a

idea intuitiva de aceleración está vinculada *per se* ó aumento de velocidade (ou, en xeral, variación).

d) O problema da área, implicitamente xa afrontado, que dalgún xeito recrea visualmente todo o proceso seguido ata aquí, porque dá unha oportunidade de recuperación de "elos perdidos" e clarificación de dúbidas e, como mínimo, servirá de repaso preparatorio para a construcción teórica da integral, que se realizaría pouco despois.

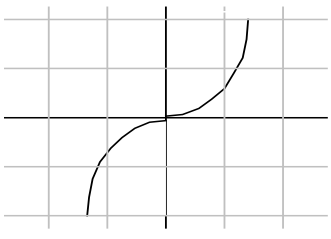
A investigación puxo de manifesto que está moi estendida a confusión en torno ó signo da área e a súa relación coa integral, a pesar de ser este un dos aspectos concretos máis manidos nos problemas de aplicación que, como xa dixemos, tratan maioritariamente de áreas.

Particularmente preocupante maniféstase a confusión cando asignan o valor 0 á área dunha rexión plana da que se visualiza claramente a zona que ocupa.

- Sería pertinente introduci-la cuestión do signo da integral relativa á área -xeneralizable a calquera magnitude-, presentando unha función cunha parte sobre o eixo de abscisas e outra simétrica por debaixo, provocando como resultado 0. Isto permitiría introducir significativamente o problema do signo, requirindo que se tome unha decisión ó respecto que debera ser consensuada, fortalecendo así as compoñentes metacognitivas da aprendizaxe, ó tempo que constituiría unha achega emocional de interese.

Esquematicamente, responde ó seguinte:

Calcula a área do recinto limitado pola gráfica da función $f(x) = \frac{1}{3}x \cdot e^{x^2}$ e o eixo horizontal entre os puntos de abscisas -1´25 e 1´25. (Sombréaa).
Se obtés 0, toma unha decisión que che permita dar un valor coherente para esa área. Xustifícao.

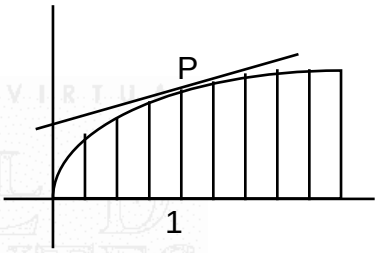


Volveremos sobre esta cuestión no epígrafe 15.

e) Os exercicios de aplicación á Economía, basicamente por tres razóns:

- 1ª. Ser un dos ámbitos de aplicación emerxentes, que gañou presencia nos tratados de divulgación máis recentes, e tamén nas aulas.
- 2ª. Tratarse dunha modelización dun proceso discreto por medio dunha función continua, o que estende significativamente o dominio da problemática susceptible de ser tratada por integración. Psicoloxicamente é moi suxerente esta situación, pois inverte a liña de desenvolvemento anterior.
- 3ª. Coincide cos avances preliminares de Leibniz na construcción do Cálculo, ós que xa nos temos referido, proporcionando unha excelente exemplificación.

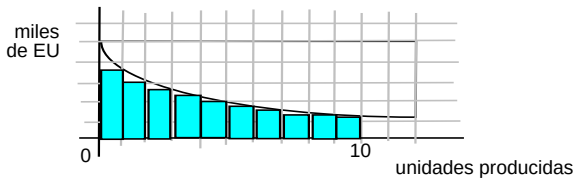
Tomando intervalos de 1 unidade, Leibniz aproximaba a área baixo a curva pola suma das ordenadas. Esta aproximación sería cada vez mellor canto máis pequena fose a unidade elixida.



Esquematicamente, responde ó seguinte:

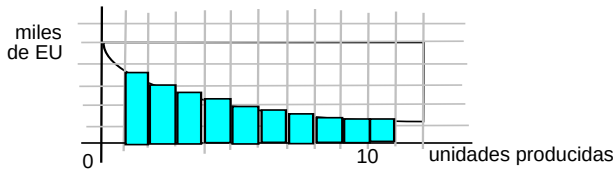
O custo de fabricar 10 artigos: $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots\ldots + f(10)$, trataríamos de expresalo como unha suma de productos:

$$f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \ldots\ldots + f(10)\cdot 1$$

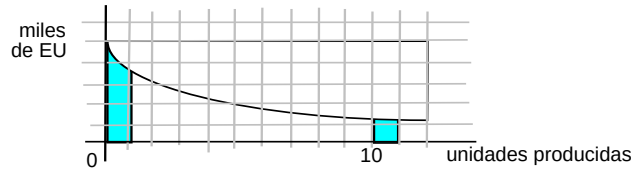


Se o facemos graficamente resulta obvio que estamos obtendo unha aproximación por defecto da área baixo a curva, o que nos sitúa no contexto da integración.

Tamén puidemos considera-la orixe no punto 1:



Isto, no cálculo discreto non tería repercusión, xa que se trata dun desprazamento do recinto graduado; pero vexámo-lo que sucedería ó aproximar mediante a integral nos 10 primeiros artigos:



A diferencia é importante: área no 1º subintervalo – área no 11º subintervalo. Pero esta situación non podemos salvala, pois cada subintervalo correspóndese cun artigo e, polo tanto, non podemos facer tramos máis pequenos que permitisen diminuí-las diferencias entre o valor discreto e a aproximación continua. Se o desexamos, podemos *compensa*-los dous valores obtidos tomando a súa *media*, aínda que nun principio non propoñeriamos entrar a discutir este asunto se non é presentado por algún dos estudiantes.

f) Poderiamos agora propoñerlles ós estudiantes que "inventen" e resolvan un problema de integración relativo a unha magnitude diferente das que ata aquí se teñen considerado.

Quizais boten man dalgunha das múltiples magnitudes que coñecen a través da disciplina de física, o cal non desmerece a súa iniciativa dado que a pregunta é moi profunda para un novicio, e vai constituír un exercicio metacognitivo importante, en canto a que someten un coñecemento por eles "admitido" a validación a través dun modelo teórico.

g) Rematariamos este epígrafe cun exercicio recreativo que nos permite "revivir" as orixes de todo o proceso analítico-sintético obtendo, por outra vía *integral*, a área do círculo.

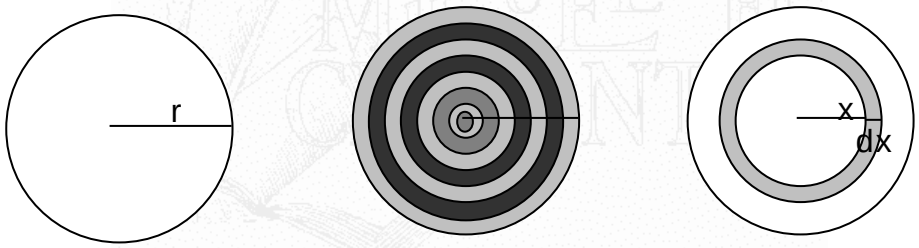
A un tempo, a "escenificación" do proceso resulta moi suxestiva para amplia-las expectativas de aplicación do Cálculo[7].

Así mesmo, dado que anteriormente (epígrafe 5) xa teriamos resolto o problema por "integración clásica" (triangulación), volveremos sobre aquela solución para presentala nos termos da "integración moderna": identificando a función pertinente.

- Isto proporciónanos, ademais, a posibilidade de realizar un cambio de variable significativo, tendo que axustar daquela os extremos de integración.

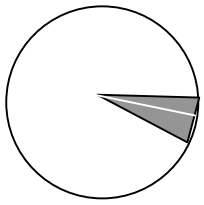
Esquematicamente, responde ó seguinte:

Descompoñémo-lo círculo en figuras das que podemos calcular facilmente a área: coroas circulares, porque son como rectángulos enrolados.



dx $\qquad \int_0^r 2\pi x\,dx$

$2\pi x$



$$dA = \frac{r \cdot dx}{2} \qquad \int_0^{2\pi r} \frac{1}{2} r\,dx$$

[7] Este exercicio foi presentado polo filósofo da Ciencia Gustavo Bueno, catedrático emérito da universidade de Oviedo, no XII Congreso ENCIGA (Gondomar, 1999).

7.13.- Táboa de primitivas: pensamento reversible

Chegado este punto o interese dun cálculo de primitivas *per se* estaría suficientemente xustificado polo amplo abano de situacións que se tratan e a noticia que se ten delas (xeometría, física, economía, sociais). Fariámolo explícito.

A un tempo foise adquirindo certa práctica nel; pero sobre todo foise xerando a conciencia de que o problema do cálculo de primitivas radica en recoñece-la función dada como pertencente a un tipo específico de derivada. Isto sitúanos diante dun procedemento xeral de enorme utilidade: trataremos de referi-lo novo ó xa coñecido, identificando analoxías entre eles.

A investigación pon de manifesto que este último aspecto metacognitivo que sinalamos non está en absoluto conseguido por moitos dos alumnos ó seren iniciados no cálculo de integrais indefinidas, cando, paradoxalmente, debera se-la referencia para desenvolvelo:

- Algúns alumnos tratan incluso de memorizar modelos de integración indefinida á marxe do correspondente modelo de derivada, a pesar de este fora recentemente estudiado por eles.
- Outros reforzan a memorización co modelo respectivo de derivada, pero asúmenos como nocións que existen independentemente unha da outra; cuestión que se ve fortalecida cando se goza dunha boa memoria semiótica, xa que permite gañar en rapidez de cálculo, o que supón un aumento de eficacia nas probas estándar, nas que non se ten que xustifica-las decisións que se toman e o tempo dispoñible para as respostas é escaso.
- Neste último caso aínda algúns alumnos demandan máis fórmulas específicas para situacións particulares, ás que lles atribúen decididamente carácter resolutivo, e móstranse desanimados cando se lles propón que intenten obtelas por si mesmos, aínda cando requiren adaptacións tan pequenas como $\frac{dx}{9x^2+4}$ a un *arctan*, mentres memorizaran sumisamente que $\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$.

Neste sentido puidemos observar que moitos alumnos centraban o seu interese en coñece-la resposta correcta, e non na maneira de conseguila. As investigacións de Whimbey (1975) puxeron de manifesto que isto acaba por converterse nunha tendencia na conducta, nunha actitude que caracteriza ós estudiantes pouco dotados. Maticemos isto:

- O risco que se corre dende o punto de vista educativo é grande; podemos pensar que a proliferación deste comportamento ó longo da vida académica dun alumno, alomenos non promove a adquisición de habilidades que permitan considerar que posúe boas aptitudes e, quizais, ó cabo do tempo a imaxe que poida ofrecer de si mesmo se corresponda coa dun estudiante pouco dotado, sendo isto máis un producto da súas vivencias formativas que dunhas deficiencias neuso-fisiolóxicas iniciais.

Propoñemos facer explícita a interrelación mediante a confección polos propios alumnos dunha "táboa de integrais" de funcións simples e compostas, a partir da táboa de derivadas; exercicio rutineiro pero que pode axudar neste propósito. O esforzo de reconstrucción, cara a atrás, fomenta o *pensamento reversible*, unha das capacidades relevantes na matemática e na actividade reflexiva en xeral. En todo caso o estudiante debera, alomenos, ser consciente disto.

Respecto das funcións compostas, está moi estendida a práctica dun troco de variable como recurso de cálculo; aínda que iso proporciona unha simplificación sintáctica, obvia o manexo das funcións compostas, o cal non parece lóxico cando estas si que foron tratadas expresamente no estudio da derivación e, ademais, resulta ser un dos conceptos máis fructíferos, así como ineludibles, na análise matemática básica. Outra cuestión son os trocos de variable "xenuínos", que conducen a verdadeiras reconversións da tipoloxía da función a integrar.

Nos primeiros exercicios de cálculo de primitivas debera mostrarse, literalmente, como se aplica a táboa para, pouco a pouco, ir asumindo que o estudiante reorganizará os procedementos ó longo da súa práctica, permitíndose certos atallos que fan máis áxil e alegre o traballo.

Graduariámo-la dificultade presentando exercicios directos, seguidos doutros que requiran simplemente dun axuste de coeficientes, e a continuación algúns nos que se necesiten pequenas adaptacións para identifica-la función composta que responda a algún dos tipos rexistrados na táboa.

Respecto da expresión da función como suma doutras funcións, nunha primeira parte limitariámonos a casos nos que o propio enunciado fose explícito, de maneira que non esixen unha manipulación previa para obte-la dita suma de funcións.

Uns exercicios finais desta fase presentarían, algúns incluso dunha maneira que resultase rechamante, a posibilidade de modificar previamente a expresión da función (conservando a igualdade), como por exemplo o seguinte, no que a simplificación é inmediata e extremadamente eficaz:

$$\frac{\cos x}{\sqrt{1-senx^2}}dx = \quad 1\cdot dx$$

(en todo caso poderiamos discuti-lo signo da raíz e os ceros do denominador).

7.14.- Expresión dunha función como combinación de funcións máis simples

Esencialmente propoñémonos traballar neste epígrafe o procedemento analítico de descomposición dunha situación en situacións máis sinxelas, agora cunha perspectiva máis abstracta e xeral, sen recorrer a ningunha técnica específica de integración.

- Se non recoñecémo-la función a integrar como correspondente a ningunha clase da táboa (esta reúne os seus coñecementos ó respecto), intentaremos transformala.

Certamente este tipo de instrucción require procesos de indagación e elaboración, que indubidablemente esixen un tempo de dedicación que non sería necesario utilizar se o profesor/a proporciona a priori esquemas para que os estudiantes os apliquen directamente.

Pero isto último, como pon de manifesto a nosa investigación, implica deficiencias formativas importantes, en varios aspectos:

- Nos metacognitivos, por carecer da consciencia das posibilidades da transformación, crendo que se trata de técnicas novas de integración.
- Nos creativos, en canto que reduce a tarefa do alumno a unha aplicación mecánica do método correspondente que, como moitos declaran, "é a maneira (única) de facelo", cando en realidade se abría diante deles un interesante abano de posibilidades.
- Nos actitudinais, en canto que se afán a satisface-las novas demandas con nova información que puntualmente lles debe ser proporcionada, e non adquiren hábitos nin actitudes proclives á "moldear" a información xa dispoñible, e a consultar textos.

Tentaremos conciencia-los estudiantes de que é o resolutor dun problema quen decide cómo actuar, elixindo a estratexia que perciba como máis útil entre un abano de posibilidades.

Especialmente interesante resultaría a transformación de funcións racionais en combinacións doutras máis simples dende a perspectiva da tarefa, no sentido de que estas últimas figuren na táboa (agás coeficientes, se é o caso), xa que dará lugar a polinómicas, logarítmicas e trigonométricas (arctan), globalizando dalgunha maneira o propio cálculo de primitivas.

- Isto é o que vén facéndose habitualmente nas clases de COU e 2º de bacharelato pero, segundo indica a investigación, presentado como un novo método de integrar, como un procedemento algorítmico que funciona, e o alumno non percibe o sentido da tarefa: "é así, e por iso se estudia".

- Posteriormente realizaríase un exercicio explícito de clasificación, de organización dun coñecemento, que remataría por conducirnos ós tópicos usuais: grao do numerador/grao do denominador, raíces reais, raíces complexas.

7.15.- Aplicacións

O enfoque xeral adoptado para estas liñas básicas mantén intimamente trenzados os aspectos conceptuais da integración e as súas aplicacións.

O interese por tratar expresamente agora das aplicacións reside na posibilidade de utiliza-las prácticas de cálculo de primitivas que os alumnos acabarían de realizar.

Poderiamos contemplar diferentes opcións que se complementarían entre si:

i) Reforza-las diferentes temáticas xa tratadas, con novos exercicios como os 3.4, 3.7, 3.8 e 3.9 da "batería xeral de problemas" (apéndice 3).

ii) Propoñer problemas nos que o propósito non se identifique cun cálculo integral, senón que este sexa un medio para determinar outro tipo de resposta (problemas 3.5, 3.6, 3.12).

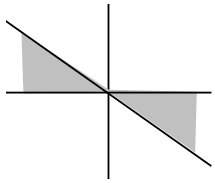
iii) Situacións que requiran, ademais de decidir realizar unha integración, determinar algúns dos elementos que interveñen nela (3.3, 3.11).

iv) Obter resultados coñecidos, a orixe dos cales non fora antes xustificada (como o volume do cono ou o da pirámide).

Un subcapítulo á parte poderían constituílo as áreas de recintos planos, limitadas total ou parcialmente por funcións elementais, que é de facto a única aplicación que se traballa nas aulas con carácter xeral.

- Un dos aspectos importantes é o do signo da integral. Para iso propoñemos confronta-los alumnos cun exercicio do tipo 1.1, cunha indicación expresa de que sinale o recinto, demandando unha estimación "visual" da súa área, previa ó cálculo da integral.

  Incluso podemos empregar como función unha recta, como $f(x) = -\frac{1}{2}x$, para que a estimación poida incluso ser exacta e realizada con absoluta seguridade. (O signo "-" obedece a un intento de romper co monótono costume de emprega-lo 1º cuadrante como referencia).



- Cando a integral proporcione o valor 0 haberá que tomar algunha decisión ó respecto (procedemento de interese en si mesmo), sendo moi probable que vaia na dirección desexada. En todo caso o profesor/a dará as pertinentes orientacións.

  - De aquí derívase a necesidade de determinar previamente qué partes do recinto a medir se sitúan por riba do eixo de abscisas e cales por baixo del, o que implica a determinación das raíces da función.

  - Esta cuestión permite interpretar resultados de xeneralizacións como que $\int_0^{2\pi} sen(nx)dx = 0$ para calquera enteiro n.

  - Permite tamén ilustrar discusións de natureza máis teórica como: "¿Pode tomar unha integral o valor 0 nun intervalo sen que a función valla *0* en tódolos puntos do intervalo? Se a función é continua ¿tomará o valor *0* nalgún punto do intervalo?", o que constitúe unha interesante cuestión, discutible no cadro xeométrico e formalizable de xeito sinxelo mediante o teorema do valor medio.

- Outro aspecto importante é a delimitación do recinto cando este se atopa situado entre varias curvas.

  - De aquí derívase a necesidade de determinar previamente en qué partes do recinto unha das funcións se sitúa por riba da outra e en cáles por baixo dela, o que nos leva ó cálculo dos puntos de corte.

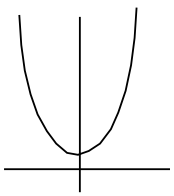
7.16.- Integración numérica: delimitación do erro

Outra característica no tratamento da integral nos textos de secundaria é a identificación *de facto* da integración co cálculo de primitivas, a pesar de que frecuentemente se ilustra aquela por medio dunha explicación de cómo se chegou a resolve-lo problema da área baixo unha curva, e incluso ás veces se dota esta explicación de certo carácter formalista (particións/particións máis finas; sumas superiores/sumas inferiores; ínfimo/supremo; integral inferior/integral superior; ...), formalismo que se presenta moito máis acusado que nas outras partes da materia.

E aínda que a énfase que se pon nos conceptos poida considerarse suficiente por parte do profesorado, a investigación sinala que non chega a selo tanto como para que efectivamente os estudiantes consideren a *integración* como algo máis que un conxunto de cuestións adheridas ó cálculo de primitivas.

Xa nos referíamos no capítulo 2º (epígrafe 28) a que a maioría das funcións elementais (combinación das elementais ó uso) non teñen derivadas elementais, o cal implica que non poderemos coñece-las súas primitivas.

- Particularmente destacable é o caso da *curva normal*, non só pola súa importancia non estudios estatísticos, senón porque é unha das distribucións que os estudiantes manexan nestes niveis académicos: concretamente utilizan as táboas correspondentes a $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$, obtidas por métodos numéricos.
- Como pode verse trátase unicamente duns axustes de coeficientes con respecto a unha curva tan sinxela como $f(x) = e^{x^2}$, que non ten primitivas elementais (moi parecida, pero aínda máis sinxela ca algunha das que se propoñen nos exercicios usuais de primitivas, e que se podería presentar ós alumnos sen sospeitar nada raro).



(a súa gráfica recorda a da parábola)

Afortunadamente, como sinala Spivak (1992), aínda que a maioría das integrais non poden determinarse con exactitude, si é posible determinalas co grao de aproximación que se desexe.

- Dende o punto de vista formal, esta apreciación responde ó teorema:

  Se existe $\int_a^b f(x)\,dx$, entón:

  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad \forall\, P \,/\, \|P\| < \delta, \left| \sum_1^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1} - x_i) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

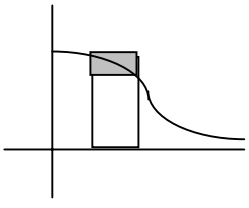
  onde *P* é unha partición do intervalo [a, b], e os ξ_i son puntos arbitrarios dos respectivos subintervalos.

Unha vez máis un programa de cálculo permitiríalles ós alumnos te-la valiosa experiencia de construír alomenos unhas pequenas táboas coas que resolver cuestións de importancia. (De non contar cos medios tecnolóxicos adecuados, poderíase alomenos realizar unha experiencia con calculadora).

O interese desta proposta non radica unicamente na posibilidade técnica de obter aproximacións, senón na conceptual de avalia-la súa calidade: ou sexa, *poder asegurar un erro máximo* e, máis aínda, decidi-lo número de subintervalos necesarios para *que o erro cometido non exceda un valor preestablecido*.

- A práctica podería facerse mesmo sobre a función $f(x) = e^{-x^2}$ no intervalo $[0,1]$, despois de explorar varias vías de obter unha primitiva (que non prosperarán):

  Tomando unha suma inferior cometemos un erro que estará entre a dita suma e a suma superior correspondente: feito facilmente perceptible en cada subintervalo. Logo, tomando *n* subintervalos iguais:

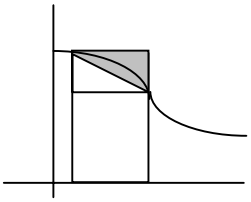
  $$erro \le \overline{\Sigma} - \underline{\Sigma} = \frac{b-a}{n} \sum_1^n \left[f(x_i) - f(x_{i+1}) \right] = \frac{b-a}{n}\left[f(a) - f(b) \right]$$

  que neste caso particular sería: $\frac{1}{n}\left[1 - \frac{1}{e}\right] \approx \frac{0'632}{n} < \frac{0'633}{n}$.

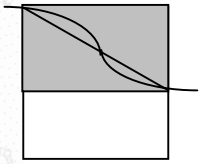
Se predeterminámo-lo erro máximo, unha sinxela desigualdade permítenos decidi-lo número de subintervalos conveniente.

- Analogamente sucedería tomando sumas superiores, sendo entón o erro por exceso.

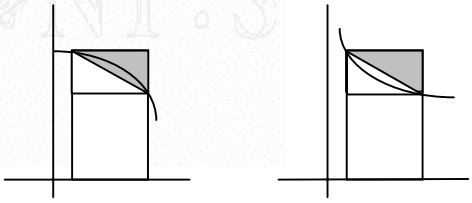
- Unha vía máis laboriosa, e que nos leva ó método dos trapecios –ó que logo nos referiremos de novo dende unha perspectiva diferente-, consistiría en toma-la media das correspondentes sumas superior e inferior.



Neste caso a cota de erro redúcese á metade, sendo aínda máis favorable se nos subintervalos se mesturan tramos cóncavos e convexos.



- En xeral non saberemos se nunha aproximación concreta é por exceso ou por defecto, aínda que poderiamos sabelo se a función fose cóncava ou convexa en todo o intervalo de estudio.

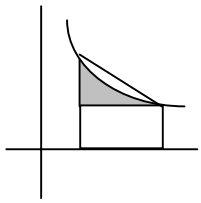


- Calquera que fose o método elixido, dende un punto de vista pedagóxico ten interese realizar un exercicio sinxelo que poida confirma-la súa eficacia. Por exemplo, construír unha táboa de aproximacións segundo n para a función $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$, onde podemos comparar co resultado obtido mediante unha primitiva.

Unha perspectiva diferente para resolver esta mesma problemática é a de aproxima-la función dada por medio doutras sinxelas. Isto, que nos sitúa de novo diante dun dos procedementos xerais, é no que se basean os coñecidos métodos dos trapecios e de Simpson[8]:

[8] Estámonos a referir a funcións continuas, ou en todo caso a continuas a trozos, coas que cubriríamo-la práctica totalidade das necesidades deste nivel educativo.
Unha función analítica daríano-la posibilidade de emprega-las series de Taylor, pero actualmente xa non se estudian nin no COU nin en 2º de bacharelato.

- A aproximación máis natural e simple dunha curva é a rectificación. O cadro xeométrico mostra con total claridade os trapecios, e cómo estes cobren con maior aproximación cós rectángulos a superficie en calquera subintervalo.



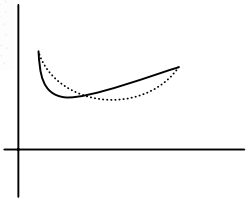
- O interese reside agora en construír un algoritmo que proporcione a aproximación, xa que sería penoso ir trapecio a trapecio realizando os cálculos. O exercicio ten en si mesmo un gran interese, xa que nos sitúa fronte a unha das facetas esenciais da matemática.

  - Tomando *n* subintervalos iguais:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_1^n \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\cdot\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_2^n f(x_i) + f(b) \right]$$

  - Fóra deste nivel estaría xa a acotación do erro que se garante se f ten 2ª derivada continua: $erro \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot máx\left|f''(x)\right|, x \in [a,b]$.

- Menos natural, pero altamente intuitivo, é o método de Simpson de aproximación por arcos de parábola. O cadro xeométrico mostra cómo estes cobren con aproximación a superficie en calquera subintervalo.



A construcción dun algoritmo que proporcione a aproximación está agora fóra das posibilidades dos alumnos en xeral; o interese en mostrárllelo de xeito ilustrativo residiría en comprobar cómo os camiños non se esgotan de contado e as posibilidades de evolución seguen abertas:

  - Tomando un número par *n* de subintervalos iguais:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + 4\sum_1^{n/2} f(x_{2i}) + 2\sum_1^{n/2-1} f(x_{2i+1}) + f(b) \right]$$

  - Fóra deste nivel estaría tamén a acotación do erro que, se f ten 4ª derivada continua: $erro \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot máx\left|f^{4)}(x)\right|, x \in [a,b]$.

7.17.- Formalización dos conceptos e propiedades

Aínda que as presentacións habituais dos contidos matemáticos están inmersas nos aspectos formais, máis ou menos profundos e rigorosos segundo o nivel ó que se traballe, aqueles formúlanse aprioristicamente e non como consecuencia dun proceso intencionado de dotar de rigor ó contido e de fornecernos dun método estricto e eficaz de analizar criticamente conxecturas e deducir resultados.

- Consideramos que unha verdadeira formación matemática debera facer explícita a dita "intención", debera facerlles sentir ós estudiantes a necesidade de organizar, explicar e xustifica-lo coñecemento, sexa cal sexa o grao de rigor que se considere pertinente desenvolver, en función do nivel académico de que se trate.

En coherencia coa situación de partida dos alumnos, que xa manexan o concepto de límite dende cursos anteriores, e coas propias actividades exploratorias precedentes (apartado 7.6 deste capítulo), as sumas de Riemann:

$$Lim_{\max\{(x_{i+1}-x_i)\}\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i),\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

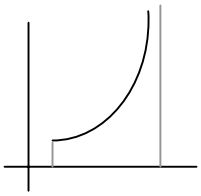
nas que o proceso de integración se fai constructivo apelando ó límite, proporcionan agora un marco teórico axeitado, xa que se traballou con sumas inferiores, superiores e arbitrarias. (Xa comentamos no capítulo 2, apartado 25, que esta idea de límite é formalmente difícil de manexar, pero pode resultar agora moi intuitiva).

Cando se introducen as sumas superiores e inferiores, establecer como requisito para falar de integral definida que a función en cuestión estea acoutada nun intervalo pechado, vén suscitado pola necesidade de asegurar que existan o ínfimo e supremo (m_i , M_i) do conxunto dos *f(x)* en cada subintervalo:

$$\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\cdot(x_{i+1}-x_i)\,; \quad \overline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\cdot(x_{i+1}-x_i)\,.$$

aínda que, lamentablemente, esta reflexión é obviada con frecuencia nos textos que revisamos.

- Ó analizar de xeito crítico a definición de Riemann, xorde naturalmente esa mesma necesidade de acotación da función, tanto dende un punto de vista técnico para evitar expresións indeterminadas do tipo $\infty \cdot 0$, como conceptual para concibi-la existencia dese propio límite.



- Máis adiante (7.21) estenderémo-la definición a funcións non acoutadas e a intervalos non pechados.

A maioría dos libros de Cálculo que manexamos decántanse polo emprego exclusivo das sumas superiores e inferiores, o que sucede habitualmente cando son de corte teórico. Outros, de exposición máis práctica, utilizan o límite, e aínda en ocasións restrínxeno ás particións de anchura constante. Algúns establecen a equivalencia entre ámbolos dous puntos de vista a xeito de teorema.

- Certamente, o tratamento da integración por sumas superiores e inferiores permite "fornecernos dun método estricto e eficaz de analizar criticamente conxecturas e deducir resultados", como referiamos unhas liñas antes, xa que supón reforza-los nosos pensamentos co cadro alxébrico.

  - A caracterización da integrabilidade mediante a condición:

    $(*)\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \,/\, \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$ virá a resultar enormemente fructífera.

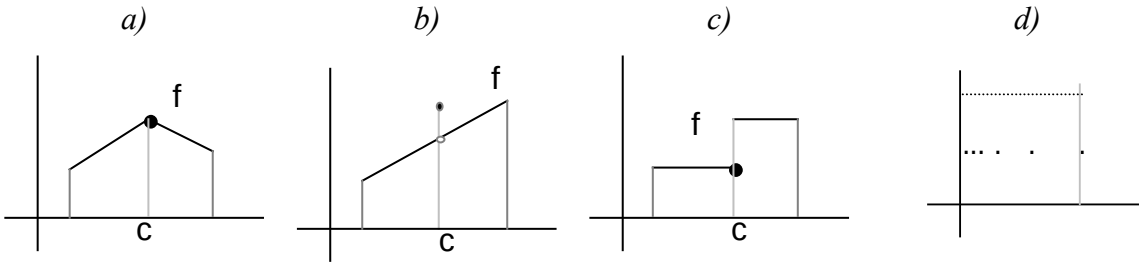
    Pero o que non parece didacticamente coherente é establece-la existencia e definición da integral na igualdade:

$$Supremo \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \bullet (x_{i+1} - x_i) \right\} = Ínfimo \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} M_i \bullet (x_{i+1} - x_i) \right\}$$

    cando unicamente se manexan funcións continuas, nas que a dita condición, que se presenta como transcendental, cúmprese trivialmente.

A nosa proposta consiste en, apoiándonos no cadro xeométrico, someter a estudio funcións con "irregularidades" que susciten precisamente esa conveniencia. Con

isto, ademais, permitiremos unha visión do tema moito máis xeral e interesante cá que habitualmente se proporciona:



- Os exemplos *a)* e *c)* permiten, en termos da caracterización (*), imaxinar particións nas que o punto *c* sexa extremo (superior ou inferior, segundo conveña) dun subintervalo, e simplemente a propiedade asociativa dos números reais soluciona todo o problema que o dito punto podería causarnos. (Nótese que esta mesma idea xustifica a aditividade sobre o intervalo).

- Pero o caso *b)* non permite ese tipo de saída, pois o punto *c* non pode por si só constituír un intervalo.

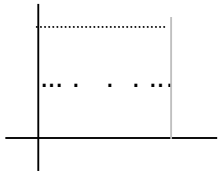
  Lonxe do que poida parecer, esta situación é a verdadeiramente interesante, pois obriga a pensar, alomenos intuitivamente, en termos de medida do intervalo que contén a descontinuidade:

  - Cando este tende a 0, aínda considerando $c = \xi_i$, no cálculo do límite teremos un único sumando "estraño": $f(c)\cdot(x_{i+1} - x_i) \to f(c)\cdot 0 = 0$.
  - Na diferencia entre as sumas superior e inferior correspondentes, teriamos tamén un único elemento "estrano": $\left(f(c) - m_i\right)\cdot(x_{i+1} - x_i) \to \left(f(c) - m_i\right)\cdot 0 = 0$.

- Continuando con esta última idea, o exemplo *d)* introdúcenos en funcións con infinitas descontinuidades, pero agás un número finito delas, pódense pechar nun intervalo tan pequeno como se desexe (hai un punto de acumulación). Combina pois as dúas casuísticas anteriores, e supón un avance cualitativo na comprensión teórica da integrabilidade; propiedade que se perdería se as descontinuidades non puidesen illarse ou pecharse nun contorno de "amplitude" desprezable.

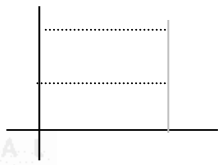
- Certamente a casuística non está esgotada, e fáltanos aínda un elo decisivo, pero que excederá polo xeral as posibilidades de imaxinación dos estudiantes deste nivel: poden quizais chegar a manexa-la situación de dous puntos de acumulación, quizais tres, quizais ..., pero da-lo salto a unha situación numerable semella non ser doado.

e)



- O estudio de funcións como a de Dirichlet sitúanos precisamente na tesitura da non integrabilidade. É agora, se non decidisemos xa facelo antes, un momento ideal para introduci-la "proximidade" entre as sumas superiores e inferiores como caracterización da integral.

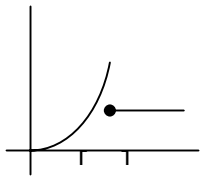
f)



- A proba formal da caracterización pode resultar difícil neste nivel educativo, aínda que se sustenta en ideas relativamente sinxelas que alomenos poderían comentarse:
    - Calquera suma de Riemann está, por definición, entre as sumas inferior e superior que corresponden á súa partición; a proximidade destas garante a proximidade daquela a elas.
    - Se tódalas sumas converxen a un límite, en particular as inferiores e superiores, o que obriga a que estas cheguen a ser practicamente idénticas a unha respecto da outra.

- Por outra parte, presenta-la sumas construídas non con valores da función, senón con ínfimos e supremos dos ditos valores, ademais de complicado -pois son conceptos que os estudiantes aínda non manexan con claridade-, resulta moi forzado se os estudiantes non coñecen razón ningunha para facelo así.
    - Pero se a función fose continua, nun pechado os ínfimo e supremo si coinciden con valores da función [$m_i = f(\xi_i), M_i = f(\xi_i')$], o que fai máis comprensible e natural o sentido das sumas.

- A proposta nosa sería, unha vez introducidas as sumas inferiores e superiores como criterio alternativo de integrabilidade, revisar algún exemplo de función acoutada que non tivese máximo (ou mínimo) nalgún subintervalo.



As propiedades de linearidade, monotonía e valor absoluto:

a.1) $\int_a^b r\cdot f(x)dx = r\cdot \int_a^b f(x)dx$ a.2) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

b) $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a,b]$ $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ c) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

resultan directamente da manipulación alxébrica da expresión do límite, e da correspondente aritmética elemental de límites.

Á aditividade sobre o intervalo xa nos referimos anteriormente.

Habería que definir, e non probar, como pretenden algúns textos, $\int_a^a f(x)dx$ como 0, e $\int_b^a f(x)dx$ como $-\int_a^b f(x)dx$, e logo xeneraliza-la propiedade aditiva a tres valores calquera *a*, *b*, *c*, non necesariamente ordenados.

Respecto dos teoremas, son tres os que tradicionalmente se inclúen neste nivel académico: o do valor medio, o fundamental e a regra de Barrow. Sobre as demostracións xa temos falado nos capítulos 2º (apartado 26) e 3º (textos de matemáticas), que se confirmaban nas tendencias observadas.

- Hai, de tódolos xeitos, un resultado de enorme importancia tanto teórica (acerca das condicións de existencia da integral definida) como práctica (sen el non saberiamos se as múltiples integrais definidas que se prodigan nos libros de texto ó realizar cálculo de áreas a través da regra de Barrow, existirían realmente). Estámonos a referir a que se unha función é continua nun intervalo pechado, existe a súa integral definida nel.

Polo xeral os textos non se ocupan da súa proba nin se cuestionan a necesidade de probalo, admitíndoo de facto, o que non invalida os teoremas que enuncian para función continuas, pero si as súas demostracións xa que fan un uso explícito da existencia de integral definida

- Certamente, algúns textos, máis discretos, antepoñen nos enunciados a condición de que a función sexa integrable.
- A proba deste esencial teorema resulta bastante sinxela a partir da caracterización (*), se manexámo-lo concepto de continuidade uniforme (por ser continua nun compacto); dende logo non máis complexa que as "probas" que se presentan dos teoremas mencionados.

Por outra parte, limita-lo pensamento acerca da integración ás funcións continuas resulta contradictorio coas introduccións ó tema que se basean na relación entre as sumas superiores e inferiores, cando a xustificación do seu estudio reside nas funcións non continuas.

- Xa nos referimos a isto no capítulo 2, apartado 27. Aínda que a situación máis común neste nivel educativo recomende resolve-lo teorema fundamental para funcións continuas, un tratamento xeneralizado levaríanos a comprender que o proceso de integración *regulariza* as funcións.
- A nosa proposta iría no sentido de formalizar en primeiro lugar os resultados xa intuídos e comentados nas actividades anteriores (apartados 7.9, 7.10 e 7.11), para a continuación explora-lo que sucede se a función non é continua.

Respecto da regra de Barrow, habitualmente emprégase na demostración que se dúas funcións teñen a mesma derivada entón diferéncianse nunha constante. Sen embargo os estudiantes confunden con frecuencia esta proposición coa súa recíproca. Sería conveniente, cando se estudia o teorema do valor medio do cálculo diferencial, clarificar esta cuestión.

- Por outra parte, sería interesante estendelo a funcións non continuas que teñan primitiva, aínda que soamente sexa por poñer un elemento máis que deixe constancia do falso trinomio: integral, primitiva, continuidade, tan estendido entre o alumnado.

O teorema do valor medio é un resultado facilmente perceptible a través do cadro xeométrico, situación que invita ademais a busca-lo punto en cuestión se a función é continua e, en calquera caso, a estima-la altura media no propio gráfico, mediante compensación de áreas.

- Unha situación ineludible no cadro físico sería en problemas de espacio/velocidade/tempo, e debe levar a tomar conciencia de que o que se postula é a posibilidade de percorrer un determinado traxecto no mesmo tempo, pero mantendo constante a velocidade.

- Respecto da "altura media" xa advertiamos no capítulo 2º (epígrafe 27) que non debe conducir a admiti-la posibilidade de sumar directamente un continuo de ordenadas, senón que pasa por obter unha nova magnitude e volver logo á magnitude inicial. $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

- Tamén sería interesante que no estudio da esperanza matemática - no tratamento estatístico de variables continuas: $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ - se reflexionase sobre o significado da expresión que aparece baixo o signo da integral: se *f(x)* é a densidade de elementos para un valor *x* da variable, *f(x)dx* é a cantidade de elementos que corresponden ó intervalo infinitesimal *dx*, e *x· f(x)dx* será o "valor total" aportado por aqueles elementos.

7.18.- Cuestións

Cando os conceptos dunha determinada temática, como é o caso do cálculo integral, están moi elaborados, na súa aprehensión pérdense moitos matices importantes ou terxivérsanse significados que, como mostra a investigación, arráiganse erroneamente nos estudiantes, converténdonse en obstáculos epistemolóxicos.

A súa detección e superación pode afrontarse por medio de cuestións puntualmente seleccionadas, que provoquen os conflictos cognitivos que deriven nunha necesaria revisión dos significados persoais atribuídos ós conceptos.

Referímonos a exercicios como os 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.8, 2.1, 2.2, 2.4, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 4.1, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14, da "batería xeral de problemas" (apéndice 3º), ou os incluídos nos cuestionarios de reforzo (capítulo 4º).

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

7.19.- Métodos de integración

Retomando a idea que sobre o cálculo de primitivas expuxemos no epígrafe 7.14: "se non recoñecémo-la función a integrar como correspondente a ningunha clase da táboa, intentaremos transformala", introduciriámo-los métodos de *integración por partes* e *cambio de variable (*tamén denominado *de substitución)*, habituais neste nivel educativo.

- O problema continúa a se-lo mesmo, pero a estratexias que se sigan van máis alá da manipulación da fórmula da función, o cal non supón necesariamente maior complexidade.

Integración por partes:

Sendo claramente conscientes de que estamos buscando unha función, primitiva, que ó derivala dea a función que se nos presenta no problema, a integración por partes xorde do recoñecemento desta función como un producto doutras dúas máis sinxelas, e de que os productos de funcións preséntansenos precisamente cando derivamos productos.

- O traballo sobre a expresión xeral da derivada do producto: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$ indícano-lo método para seguir: $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' \quad u\cdot v = u'\cdot v + u\cdot v'$. Se

identificámo-la función que imos integrar con algunha das expresións $u'\cdot v$ ou $u\cdot v'$, témo-la posibilidade de substituí-la integración pola doutra función diferente á que se nos pide.

- Na práctica estes estudiantes traballarán con funcións que teñan derivadas continuas, o que garante a existencia da integral da nova función ($u'\cdot v$ ou $u\cdot v'$), aínda que nos textos non se menciona esta circunstancia.

- Unha cuestión esencial que non debe obviarse é que a función inicial é única, e é o resolutor quen decide establecer partes nela, de maneira que a nova función que vai ser integrada lle resulte máis simple.
  - Isto orienta a elección acerca de que parte xogará o papel de *u*, e cal de *v* :
    - Para cambiar v' por v teño que integrala (primeiro obstáculo que debo salvar) e favoréceme que o resultado non se complique.
    - Analogamente para cambiar u por u' teño que derivar (en xeral é doado) e igualmente favoréceme que o resultado se simplifique.

- Particularmente interesantes son os casos tipo $\int \arctan x\,dx$, que deixan moi claro o carácter decisorio do resolutor, ó imaxinar á parte u' como a función constante 1.

- Non menos suxerentes son os do tipo $\int \sin^2 x\,dx$, nos que se decide que sin*x* xogue os dous roles, ou, nesa mesma liña $\int \sin^3 x\,dx$, distinguindo sin*x* e $\sin^2 x$.

- Ou aqueles outros como $\int x^2 \cos x\,dx$, que requiren unha nova aplicación do método, por non ser suficiente a primeira simplificación conseguida. Poden incluso xeneralizarse, dando lugar ás chamadas "fórmulas de reducción".

- Finalmente destacámo-los casos, como $\int \cos^2 x\,dx$, nos que a función que se vai integrar vólvese presentar no proceso de resolución, o que permite reorganizalo a través dunha sinxela ecuación linear.

- Unha cuestión importante é a que se refire á integral definida, pois se $u\cdot v - u'\cdot v$ é unha primitiva de $u\cdot v'$, debemos manter para a súa integral nun intervalo o

criterio xeral (Barrow) que seguimos para calquera primitiva: $\int_a^b u \cdot v' = \left[u \cdot v - \quad u' \cdot v\right]_a^b$, avaliando os dous termos nos extremos de integración.

- A falla de clarificación ó respecto disto recomenda que se realice algún exercicio de integración definida no que a expresión da función suxira con facilidade que se realice por partes.

Cambio de variable:

Xa comentabamos no epígrafe 7.13 que estaba moi estendida a práctica do troco de variable como recurso de cálculo en funcións compostas, o que sen dúbida proporciona unha simplificación sintáctica, pero obvia o manexo explícito daquelas.

- Responden ó troco $t = f(x)$, con $dt = f'(x)dx$.
- Recomendámo-la introducción do método como unha tarefa consciente de automatización para o caso de funcións compostas, xa que permite contrasta-la súa eficacia.
- Tamén resultará de grande utilidade cando non sexa fácil recoñecer na expresión dada unha función e a súa derivada, pois permiten a exploración inicial.
  - Tampouco agora debe obviarse que a función inicial é única, e que é o resolutor quen decide contemplala como unha composición doutras dúas máis sinxelas; composición que pode admitir diferentes posibilidades, das que eliximos aquela que semelle ser máis sinxela de cara á integración.
  - Para a xustificación formal da validez do método precísase que a función $t = f(x)$ teña recíproca (inversa).

Denominabamos trocos de variable "xenuínos" a aqueles que conducen a verdadeiras reconversións da tipoloxía da función que compre integrar, como:

- As racionais trigonométricas, que se transforman en racionais mediante o troco xenérico $t = \tan\frac{x}{2}$, que esixe ou ben recordar como substituír cada función trigonométrica, ou ben un laborioso proceso deductivo diso.

- Hai algúns casos particulares nos que se gaña en simplicidade:
  - Funcións de sin*x* e cos*x* con expoñentes impares: $t = \tan x$.
  - Impar en sin*x* e par en cos*x*: $t = \cos x$.
  - Par en sin*x* e impar en cos*x*: $t = \sin x$.

- Aínda que a función recíproca, no caso de existir, podería permitírno-lo mesmo formato anterior, moitos trocos responden de xeito natural á forma: $x = f(t)$, con $dx = f'(t)dt$:
  - Como $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx \to x = t^6$, que vén suxerido polo intento de desprendernos das raíces, buscando un índice múltiplo dos existentes.
  - Ou $\sqrt{1-x^2}\,dx \to x = \sin t$, que se basea no recordo da fórmula fundamental da trigonometría.
  - Ou estoutro, ó que volveremos unhas liñas máis abaixo, $\frac{\mathrm{L}\,x}{x}dx \to x = e^t$.

- En canto ós límites de integración, no caso de tratarse dunha integral definida, pode obviarse o seu troco se "devolvemos" unha primitiva en termos da variable inicial, utilizando a función recíproca. Pero tamén ten interese resolver coa nova variable, o cal ademais faise explícito en moitas situacións de matemática aplicada, xa a este mesmo nivel educativo, tal como mostramos na análise de textos de física (integrar respecto doutra variable cualitativamente diferente).

Exercicios combinados:

Dende unha óptica educativa ten moito interese a realización de exercicios que poidan ser resoltos dende varias das perspectivas estudiadas. Por exemplo:

- A integral $\int_0^{2\pi} \cos^2 \beta \cdot d\beta$ constitúe un exemplo clásico para ser resolto por partes, tendo aínda que reagrupa-los termos, pensándoo como unha ecuación.
  Sen embargo resulta enormemente simplificadora a transformación da función por medio do ángulo dobre: $\cos^2 \beta = \frac{1+\cos 2\beta}{2}$, o que nos esixe agora un elemental troco de variable ($t = 2\beta$).

- Do mesmo tipo, pero máis accesible, resulta o caso de $\frac{\mathrm{L}\,x}{x}dx$, que responde á tipoloxía $f(x)\cdot f'(x)\,dx$, reducíndoo a un axuste de coeficientes.

  Como indicábamos antes respode tamén a un cambio xenuíno de variable $(x = e^t)$, e resólvese por partes tamén recorrendo a un reagrupamento de termos.

7.20.- Ecuacións diferenciais

Xa nos referíamos na análise de textos para secundaria a que as actividades explícitas sobre ecuacións diferenciais eran moi escasas, aínda que algúns problemas de aplicación ó crecemento de poboacións ou desintegración radioactiva, por exemplo, respondían implicitamente a elas. Nos "outros textos" parece haber menos reparo ó respecto, chegando incluso nun deles a presentar ecuacións diferenciais de 2ª orde para o estudio dos movementos harmónicos.

Sendo a resolución de ecuacións diferenciais o gran campo de aplicación das técnicas de integración, sería unha pena non poder deixar constancia diso, aínda que se faga por medio de selectos exemplos de dificultade menor.

De feito é posible atopar situacións de contexto suxerinte, como os crecementos de poboacións ou a desintegración radioactiva que xa citamos, pero que ademais poden tratarse cunha metodoloxía constructiva, o que favorece a consolidación do *Cálculo* ó considerar explicitamente xuntos os problemas de diferenciación e integración ó tempo que se afonda nos procedementos xerais do coñecemento.

Os casos máis sinxelos que atopamos pertencen ó modelo $y' = a\cdot y$, (ou $\frac{dy}{dx} = a\cdot y$), que indica que a derivada é proporcional ó valor da función en cada punto.

- Corresponden a el ós procesos de crecemento e de desintegración desinhibidos, nos que é razoable supoñer que a taxa de variación é proporcional á "cantidade" dos elementos presentes:
  - Nos de crecemento é lóxico pensar que o dobre de poboación daría lugar ó dobre de novos nacementos, se non hai causas que alteren o curso natural. (Analogamente, dobre de mortes, o que leva ó dobre de crecemento: *2n–2m=2 (n-m)*).
  - Na desintegración radioactiva, coñecendo que os átomos se transfórman aleatoriamente noutros, é lóxico pensar que o dobre de átomos daría lugar ó dobre de desintegracións.

- Resolve-la ecuación diferencial equivale a responder á pregunta: ¿coñeces algunha función que sexa igual, salvo quizais un coeficiente, á súa derivada? E claro que a coñecen, ¡a función exponencial!

- Outra estratexia exitosa é a manipulación da expresión seguindo o método ordinario de reuni-las variables homólogas, inmediata neste caso, para transformala en $\frac{1}{y}\cdot dy = a\cdot dx$.
  - Isto tan maior interese, xa que nos abre unha vía que resultará fructífera: *a separación de variables*.
  - Agora a pregunta é ¿coñeces algunha situación que dea lugar a $\frac{1}{y}\cdot dy$? E claro que a coñecen, ¡a derivada da logarítmica!

Moi interesantes, aínda que un pouco máis difíciles de tratar, son os de crecemento inhibido, que dan lugar a funcións loxísticas. Pertencen ó modelo $y' = (a\cdot y + b)\cdot y$ (ou $\frac{dy}{dx} = (a\cdot y + b)\cdot y$).

- En particular, os procesos de contaxio dunha enfermidade responden á ecuación $y' = a\cdot(p - y)\cdot y$, onde y é a función (do tempo) que expresa o número de individuos que contraeron a enfermidade, sendo p o tamaño total da poboación.

- O que nos está indicando a ecuación é tamén unha situación de lóxica comprensible: a taxa de variación dos individuos contaxiados é proporcional ó

número de individuos que xa teñen contraída a enfermidade pero tamén ó número de individuos que aínda quedan sans (víctimas posibles do contaxio).

- O método de separación de variables sitúanos diante de $\frac{1}{(p-y)\cdot y}\cdot dy = a\cdot dx$, que responde a unha racional simple.

A liña de traballo suxerida nun principio permite tratar con facilidade ecuacións diferenciais de 2º orde tales como $y'' = a\cdot y$, que describen os movementos harmónicos.

- Resolve-la ecuación diferencial equivale a responder á pregunta: ¿coñeces algunha función que sexa igual, salvo quizais un coeficiente, á súa segunda derivada? E claro que a coñecen, ¡a función seno (ou coseno)!

Para a ecuación diferencial linear de 1ª orde: $y' + p(x)\cdot y = q(x)$, podemos intentar unha solución xeral por procedementos constructivos.

- Resolve-la ecuación diferencial pasa por responder á pregunta: ¿coñeces algunha situación onde sumes unha función e a súa derivada? E claro que a coñecen, ¡a derivada dun producto!

- Un caso particular, relativamente sinxelo, é a lei do arrefriamento de Newton: "a velocidade de arrefriamento dun corpo é proporcional á diferencia de temperatura entre o dito corpo e o medio no que se atopa".
  - Sendo *M(x)* a función que expresa a temperatura do medio, a ecuación ten a forma: $y' = -k\cdot[y - M(x)]$.

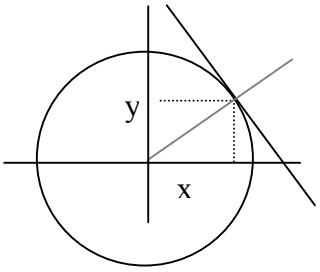
Unha actividade de especial relevancia histórica na integración, como xa referimos no 2º capítulo, foi o estudio de curvas. Particularmente accesible, e suxerinte pola súa familiaridade, sería o estudio da circunferencia.

- O exercicio, rutineiramente, podía presentarse como segue:

  "Resolve-la ecuación diferencial de primeira orde $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$."

  O alumno levaría a cabo a separación de variables: $ydy = -xdx$, e con sinxelos cálculos obtería a ecuación dunha circunferencia centrada na orixe: $y^2 + x^2 = r^2$.

- Daquela, a ecuación diferencial contén xa a información que hai nesta última ecuación. ¿Que significado ten, entón a ecuación diferencial?
  - Indica que a derivada da curva nun punto *(x,y)* é igual á pendente da recta perpendicular á recta que une a orixe co punto. Ou sexa, que a tanxente é perpendicular ó raio.



- O problema sería significativo de presentalo á inversa: queremos estudia-la curva e buscamos unha propiedade local dela relacionada coa diferenciación (a tanxente é perpendicular ó raio en cada punto, no caso da circunferencia).

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

7.21.- Integrais impropias

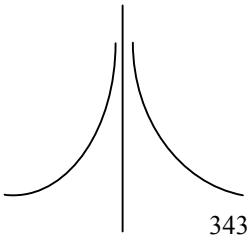
Xa nos referimos a que o concepto de límite forma parte, neste nivel educativo, dos coñecementos ordinarios dos alumnos. O seu uso para estende-lo dominio de aplicación dunha idea sería de grande interese se, como sucede coas integrais impropias, non presenta dificultades fóra do que se considera razoable para os aprendices en cuestión.

- A explicitación deste enfoque carrexa unha importante compoñente metacognitiva que non deberamos deixar de aproveitar.

- Afrontar problemáticas nas que interveñan funcións non acoutadas ou, nas que o intervalo de estudio sexa non compacto (ben non acoutado, ben non pechado) preséntano-la oportunidade de afondar na comprensión, tanto en cuestións de natureza teórica como aplicada.

- Exercicios como o seguinte, sitúannos fronte a un novo problema:

  1.4.- A función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ toma tódolos seus valores positivos. ¿É correcto o



seguinte cálculo?

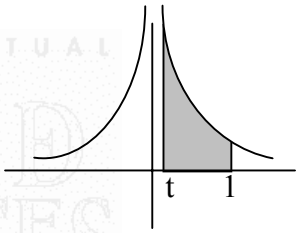
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left| -\frac{1}{x} \right|_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2 .$$

De non selo propón un cálculo alternativo.

O feito de que a función non estea definida nun punto non repercutiría na integral se no dito punto lle asignasemos calquera valor arbitrario á función. Pero as dificultades continúan, xa que non está acoutada.

A simetría permítenos simplifica-la situación a unha calquera das súas ramas.

Sendo capaces de resolvelo en calquera intervalo $[t,1]$, con $0<t<1$, o "límite" permítenos da-lo salto cualitativo cara á solución. Dita solución implica a consideración da integral definida no intervalo semiaberto $(0,1]$.



- Definiremos entón $\int_0^1 f(x)\,dx$ como $\lim_{t\to 0} \int_t^1 f(x)\,dx$, cando tal límite exista, e na práctica realizarémo-los cálculos como $F(1)-F(0)$, sabedores de que o substraendo desa resta só ten sentido como límite.

- De natureza semellante é a extensión ós intervalos non acoutados.
  - Respecto destes aínda podemos sorprendernos con curvas como $f(x)=\frac{1}{x}$, que no intervalo $[1,\infty)$ encerran unha área infinita, pero facéndoas rotar en torno ó eixo de abscisas, dan lugar a un volume finito.
    - Este exercicio constitúe un típico exemplo de estudio da converxencia da integral por comparación coas series numéricas correspondentes ós valores enteiros da variable ($A > \frac{1}{n}$, diverxente; $V < \frac{1}{n^2}$, converxente), aínda que non se presenta aquí con esa intención.
  - Definiremos entón $\int_a^\infty f(x)\,dx$ como $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, cando tal límite exista, e na práctica realizarémo-los cálculos como $F(\infty)-F(a)$, sabedores de que o minuendo desa resta só ten sentido como límite.

- Entre os aplicacións máis interesantes atopámo-lo cálculo da esperanza de vida, que desenvolvemos con detalle no 1º dos apéndices.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Apéndice 1

Estudios: unha visión holística da aprendizaxe

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

A1.0.- Actividades de globalización

Cada unidade didáctica contén diversos obxectivos, pero é nos obxectivos de maior nivel onde radican as claves para a comprensión global do tema e, con frecuencia, estes non se tratan adecuadamente ás posibilidades da maioría dos alumnos (Shayer e Adey, 1986).

A verdadeira aprendizaxe non se producirá ata que se poidan utiliza-las pequenas parcelas que constitúen o novo coñecemento nunha actividade globalizadora, na cal estas cohesiónanse ó poñérense en relación con outras aprendizaxes anteriores, as cales asemade sairán reforzadas.

A toma de conciencia de que isto non se vai producir por unha acumulación sumativa de coñecementos, senón que implica transcender cualitativamente as conceptualizacións anteriores, esixe un esforzo de deseño e planificación coidadosa por

parte dos docentes de actividades orientadas a relaciona-los diversos contidos académicos do curso, alomenos dentro das propias matemáticas, susceptibles de ofrecer unha oportunidade para unha mellora cualitativa da comprensión.

Neste sentido, deséñanse unha serie de actividades para relaciona-lo Cálculo con outros contidos que se inclúen na formación dos alumnos, propios do nivel académico que estamos considerando:

Álxebra Linear: proponse un estudio esencialmente semiótico, construíndo un algoritmo de integración por medio de matrices.

- Recréase os conceptos de aplicación linear, bases e matriz asociada, con dificultade baixa, polo que resulta un ameno exercicio de "matemática pura".

Electromagnetismo: trabállase esencialmente sobre o concepto de integral, reconstruíndoo nunha situación novidosa que a penas presenta dificultades en canto ós aspectos de cálculo de primitivas.

- Coñecida a solución ó problema cando un conductor é rectilíneo, a estratexia que se segue é a de reducir a ese caso o novo problema, determinando nel un elemento diferencial que poida considerarse recto.
- Realízase un cambio de variable significativo, utilizando o ángulo central, máis patente no problema. A visualización dos ángulos pode resultarlles difícil ós alumnos, dadas as carencias de práctica xeométrica.

Estatística e Probabilidade: trátase de redescubri-la esperanza de vida ou vida media para unha variable continua, a través dun intento de resolver un problema por integración, como extensión da estratexia ideada con éxito para a resolución do problema discretizado.

- O problema é bastante difícil, aínda que pode ser moi pertinente na nova disciplina de Métodos Estatísticos e Numéricos. Sen embargo, ten moito interese porque supón unha verdadeira reconstrucción da integral definida a partir de aproximacións por particións do intervalo que se atopan moi naturais.

A1.1.- A integración como aplicación linear

Presentamos, como unha actividade de repaso e consolidación, e non como un contido *per se*, este pequeno estudio no que tratamos de utiliza-lo producto de matrices para "automatizar" o cálculo de primitivas, onde, ademais, intervén o concepto de integral definida.

A continuación, nun intento intencionado de recrearse na teoría, recoñendo que definitivamente esta constitúe o *corpus* matemático e mostrándoa como unha creación humana na que se pode atopar un gran pracer estético, propoñeremos eleva-lo automatismo anterior á categoría de aplicación linear, concepto que, polo xeral, os alumnos soamente tiveran ocasión de apalpar no correspondiente tema de álxebra linear.

Sabedores de que tódalas funcións polinómicas son integrables, e estando o cálculo das súas primitivas entre os máis fáciles, propoñerémoslles artellar un algoritmo baseado no producto de matrices que nos proporcione o coñecido resultado:

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0)dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + ... + a_0 x + k$$

No caso de tratarse dunha integral definida no intervalo [0, x], elimínase a cte.:

$$\int_0^x (a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0)dt = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + ... + a_0 x$$

Esquematicamente, respondería ó seguinte:

$$\int_0^x (a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0)dt \equiv \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & ..... & a_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

As propiedades de linearidade da integral permítenos pensar na posibilidade de construír con ela unha aplicación linear do conxunto das funcións integrables en [a, b] no conxunto das continuas en [a,b]:

$$I : f \to F \ / \ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$I(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \int_0^x (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(t)dt == \int_0^x (\alpha \cdot f)(t)dt + \int_0^x (\beta \cdot g)(t)dt =$$

$$= \alpha \cdot \int_0^x f(t)dt + \beta \cdot \int_0^x g(t)dt = \alpha \cdot I(f) + \beta \cdot I(g)$$

Concretamente someteremos a estudio a anterior consideración no caso das funcións polinómicas, xa que precisamente os polinomios constitúen exemplos típicos de espacios vectoriais neste nivel de ensinanza, e é coñecido dos alumnos que dan lugar a funcións integrables e continuas en calquera intervalo.

- Considerando os subespacios P_n e P_{n+1} buscaremos dúas bases e a matriz da aplicación linear ID asociada a elas.
- Exercitariámonos coas funcións polinómicas de graos 3 e 4, tomando as bases canónicas: $\{x^3, x^2, x, 1\}$ e $\{x^4, x^3, x^2, x, 1\}$, respectivamente.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

A1.2.- Electromagnetismo

Unha situación frecuentemente tratada nos textos de Física de COU é a que se refire a unha corrente circular sometida ó influxo dun campo magnético.

Pero mentres que os aspectos propios do Cálculo están pouco coidados neses textos, propoñémonos aquí reconstruír rigorosamente a situación que aqueles presentan.

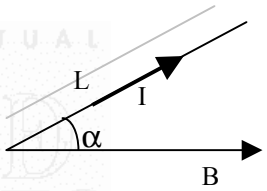
Unha vez máis, a estratexia será o dobre proceso de análise-síntese: coñecendo cómo resolve-lo problema nun conductor rectilíneo, dividímo-lo conductor circular en elementos diferencias que podamos considerar rectos, calculamos en cada tramo e logo sumamos, reunindoos todos.

O interese céntrase nos aspectos conceptuais, que supoñen a reconstrucción do concepto de integral definida, agora xa máis axilmente e cunha linguaxe máis directa, na medida en que os estudiantes chegarían a este punto cunha formación razoablemente sólida neste terreo.

Hai outros elementos de interese, como unha integración circular, un cambio de variable que esixe precisa-los extremos de integración e que implica a aplicación significativa dun resultado coñecido de límites que se estudiou nese mesmo curso, e un cambio de expresión dunha función por outra máis simple.

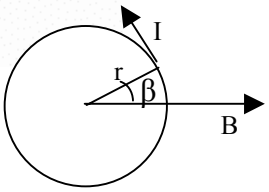
Esquematicamente, correspondería ó seguinte:

Cando un campo magnético de intensidade B actúa sobre un conductor rectilíneo de lonxitude L, polo que circula unha corrente de intensidade I, a forza producida sobre este é, en módulo:



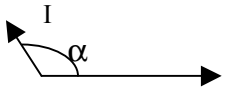
$F = I \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot L$ (sinα resulta do producto vectorial).

¿Como calcula-la forza resultante coa que o campo actuaría sobre a *espira* circular?



Considerando a circunferencia dividida en pequenos fragmentos rectilíneos poderíase aplica-la fórmula anterior a cada fragmento: $dF = I \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot dL$, e logo sumariámolos todos nunha integral.

(Nun conductor rectilíneo o ángulo era constante, e agora é variable).

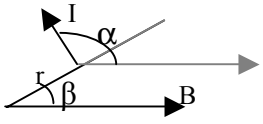


O problema adquire unha nova dimensión: a función é do ángulo, mentres o elemento diferencial de intervalo é lonxitude.

A solución vaise atopar por medio do resultado coñecido polos estudiantes de que se o ángulo é moi pequeno, tende a coincidir co seu seno.

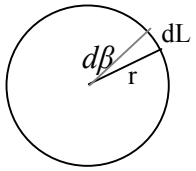
Podemos aínda adaptar esta última expresión substituíndo o ángulo α polo ángulo central β:

$\beta = \alpha - 90^o \rightarrow \text{sen}\alpha = \cos\beta$



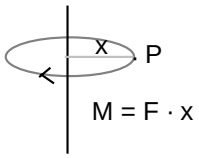
Temos, pois, unha ardua tarefa que realizar:

$$d\beta \approx 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin d\beta \approx \dfrac{dL}{r} \\ \dfrac{\sin d\beta}{d\beta} \to 1 \Rightarrow send\beta \approx d\beta \end{array} \right\} \quad d\beta \approx \frac{dL}{r} \qquad dL \approx r \cdot d\beta$$



$$F = I \cdot B \cdot \circ \cos\beta \cdot dL = I \cdot B \int_0^{2\pi} \cos\beta \cdot r \cdot d\beta = I \cdot Br \cdot \int_0^{2\pi} \cos\beta \cdot d\beta$$

Despois deste esforzo sería doado calcular tamén o momento de xiro sobre a *espira*, sabendo que sobre un punto P que xira en torno a un eixe é igual ó producto da forza que actúa sobre ese punto polo brazo de xiro.



$$dM = dF \cdot x \quad = I \cdot B \cdot r \cdot \cos\beta \cdot d\beta \cdot r \cdot \cos\beta = I \cdot B \cdot r^2 \cdot \cos^2 \beta \cdot d\beta$$

$$M = \int_0^{2\pi} I \cdot B \cdot r^2 \cdot \cos\beta^2 \cdot d\beta = I \cdot B \cdot r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \beta \cdot d\beta$$

As fórmulas do ángulo dobre permitiríannos transformar de inmediato esta integral:

$$\cos^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\beta}{2}$$

A1.3.- Esperanza de vida

No suxestivo mundo das aves atopamos un marco axeitado para deseñar unha actividade que interrelacione de xeito significativo o recén adquirido cálculo integral co diferencial, encardinándose ámbolos dous nun concepto estatístico moi próximo e intuitivo, *vida media*, pero de alta dificultade técnica para este nivel académico na súa acepción máis xeral de esperanza matemática cando a variable é continua, polo que se subdivide en actividades parciais que nos encamiñen á súa comprensión.

Non hai probas de que a idade avanzada das aves sexa unha causa importante de mortalidade. Quizais a súa vida sexa tan perigosa que non conseguen chegar a vellas.

Nun principio deixaremos que a idea de probabilidade permaneza en estado latente, referíndonos expresamente a ela soamente ó final desta unidade. A proposta didáctica é de carácter constructivo:

a) En primeiro lugar tentaremos *reconstruí-lo concepto de vida media*, tratando unha variable de "tipo continuo" por métodos discretos: agrupamento de datos e marcas de clase.

b) Despois, considerando que as aves morren aleatoriamente de xeito continuo, propoñeremos trata-lo problema por integración, para o que intentaremos segui-la mesma estratexia que resultou exitosa no apartado anterior, o que nos sitúa na tesitura de ter que *construír unha función* densidade.

a) Propoñemos aquí unha dobre xeneralización, situándonos en planos diferentes:

i) A primeira refírese á distribución das aves por períodos de vida, e seguimos un heurístico de carácter analítico: estudiar aspectos parciais, máis doadamente acometibles, tentando *inferir unha pauta* que nos permita xeneralizar, *construíndo unha función*, que virá a corresponderse coa función de distribución.

Unha vez feito isto tratarémo-lo cálculo dunha aproximación (discretizando a situación), e mostraremos unhas aproximacións melloradas, obtidas a través dunha folla de cálculo (EXCEL). Como xa dixemos en páxinas anteriores, sería idóneo que os propios alumnos asumiran a tarefa de tratar informaticamente a cuestión, se existen as condicións necesarias para que isto sexa factible.

ii) No segundo caso a intención é cualitativamente distinta, situándonos intencionadamente no plano teórico: tentaremos *obter unha fórmula*,

facilitadora de futuros cálculos independentemente das circunstancias concretas do problema inicial, que ademais se revela como un mecanismo potente xa que nos vai permitir, por *paso ó límite*, resolver un problema do que non se albiscaba unha solución clara.

A mesma potencia que revela o cálculo de Keppler, xa que a fórmula implica o proceso de síntese complementario. Estamos outra vez na fenomenoloxía da integración.

Resumo das nocións que intervirán:

A *esperanza de vida* ou *vida media* obterémola calculando a media:

$$\frac{\text{suma de tódalas idades dos paxaros}}{\text{nº de paxaros}}$$

Para que isto resulte operativo é necesario agrupalos en intervalos; cuestión que se entende como razoable e nos sitúa no mesmo contexto dos problemas de integración:

Se hai N paxaros cun índice de supervivencia s, ó cabo dun ano hai $N \cdot s$, logo aqueles que viven entre 0 e 1 anos serán $N - N \cdot s = N(1-s)$. Etc.

Así, podemos construí-la táboa seguinte:

Tempo (anos)	Nº paxaros vivos	Intervalo	Idade media	Nº paxaros mortos no intervalo	Idade total no intervalo
0	N				
1	$N \cdot s$	(0, 1]	0´5	N· (1-s)	0´5 · N(1-s)
2	$(N \cdot s) \cdot s = N \cdot s^2$	(1, 2]	1´5	N· (s-s^2)	1´5 · N(s-s^2)
3	$(N \cdot s^2) \cdot s = N \cdot s^3$	(2, 3]	2´5	N· (s^2-s^3)	2´5 · N(s^2-s^3)
.....					

Aquí xa nos damos conta de que tódolos sumandos (idades) van vir multiplicados por N e, como finalmente haberá que dividi-la suma entre N, terémo-lo mesmo resultado que se considerasemos un só paxaro. Isto simplifica os cálculos (aínda que o grao de abstracción quizais recomende que os alumnos continúen con N, a non ser quen propoña xa a simplificación):

$$0'5 \cdot (1\text{-}s) + 1'5 \cdot (s\text{-}s^2) + 2'5 \cdot (s^2\text{-}s^3) + \ldots\ldots = \; 0'5 + s \; + s^2 + s^3 + \ldots..$$

Temos unha progresión xeométrica de razón $s < 1$: $\frac{1}{2} + \frac{s}{1-s} = \frac{1+s}{2-2s}$.

Se considerámo-lo índice de mortalidade "$m = 1\text{-}s$", terémo-la fórmula equivalente: $\frac{2-m}{2m}$, que é a que se atopa frecuentemente en textos de zooloxía para iniciados.

b) A estratexia que estamos seguindo é, dende logo, a mesma que seguimos nos problemas de integración: dividi-lo intervalo en partes, calcular en cada parte, e sumar.

Agora preséntaseno-la necesidade de considerar unha integral impropia nun contexto altamente significativo, xa que non podemos acoutar a priori o tempo de vida das aves.

De aí pasamos á *situación inversa da integración*: coñecémo-lo resultado dunha integral, ¿cal era a función?, o que xera unha circunstancia paralela á inicial de antiderivación, pero agora sobre a integral definida. Isto correspóndese co problema de acha-la función densidade, coñecida a función de distribución, e temos dúas opcións xa coñecidas polos alumnos: aplicar directamente o teorema fundamental ou adecua-la expresión ó teorema de Barrow.

O problema do cálculo da primitiva resultará ser un exercicio clásico de integración por partes, e ó avaliala no intervalo (0, ∝) dará lugar a unha expresión indeterminada que resolveremos aplicando L´Hopital, recurso moi exercitado polos estudiantes no tema anterior do mesmo curso académico (Derivación).

Resumo das nocións que intervirán:

A función de distribución dunha variable aleatoria X defínese como:

$$F_X(x) = P\left[X \leq x\right], \quad \forall x \in \Re .$$

A distribución dise absolutamente continua se:

$$\exists f_X(x) \; / \; F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \text{, onde } f_X(x) \text{ é a función densidade.}$$

A esperanza matemática dunha variable aleatoria cunha distribución absolutamente continua defínese como:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx \,.$$

Nótese que se *x* é a idade, $f_X(x)dx$ expresa (respecto a 1 individuo inicial) a cantidade de individuos que viven durante *x* tempo (entre *x* e *x*+ *dx*) e, polo tanto, o producto $x \cdot f_X(x)dx$ expresa a idade total que "achegan" eses individuos. A integral ten claramente o sentido de "suma" de todas esas achegas "instantáneas".

O problema centraríase agora en cómo calcula-la suma de tódalas idades dos paxaros, suposto 1 único paxaro inicial.

O tempo teórico sería dende o instante 0 ata o infinito. Dividiriámolo en intervalos infinitesimais, *dx*, e sumariámo-las idades achegadas en cada intervalo, tal e como procediamos na táboa:

"idade media no intervalo × nº de paxaros que morreron nese intervalo".

Se o intervalo é infinitesimal, entre *x* e *x*+*dx* a idade media coincidiría con *x*.

$$Vida\ media = \int_{0}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Teriamos que construír unha función *f* tal que *f(x)dx* exprese o nº de paxaros que morren no intervalo infinitesimal *dx*, xa que o instante da morte determina univocamente o tempo vivido.

Coñecémo-la función que expresa, en termos de probabilidades, o número total de aves mortas ata o instante *x*:

No caso xeral, para un índice de supervivencia *s*:

$$P\left[X \le x\right] = 1 - P\left[X > x\right] = 1 - s^x \quad \rightarrow \quad F_X(x) = 1 - s^x$$

Máis formalmente: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \le 0 \\ 1 - s^x & se \quad x > 0 \end{cases}$

Pero o número total dos que morren, en termos de probabilidades, ata *x* é a suma dos que morren en cada un dos intervalos diferenciais anteriores. Logo:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{x} f_X(t)dt = \int_{0}^{x} f_X(t)dt = 1 - s^x, \forall x > 0$$

A regra de Barrow relaciona unha integral definida nun intervalo coa diferencia dos valores que toma unha primitiva nos extremos daquel:

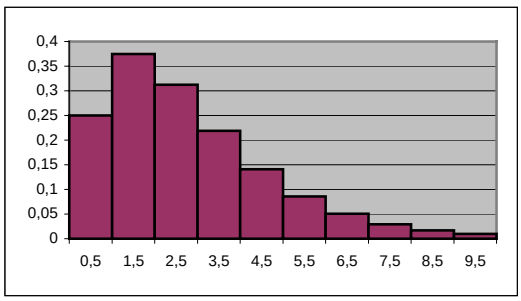
Tranformamos esa expresión en $-s^x - (-s^0)$; diferencia dos valores que toma a función $-s^t$ nos extremos do intervalo [0, x]: $f_X(x) = (s^x)' = -\ln s \cdot s^x$

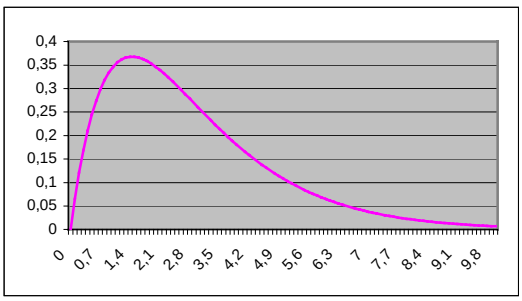
Ou ben, directamente polo teorema fundamental: $f_X(x) = (1 - s^x)' = -\ln s \cdot s^x$

Máis formalmente: $f_X(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \le 0 \\ -\ln s \cdot s^x & se \quad x > 0 \end{cases}$

A esperanza matemática será: $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx$. Neste cálculo será onde empreguémo-la integración por partes, tendo despois que salvar unha indeterminación, obtendo finalmente: $EX = \frac{-1}{\ln s}$.

Por exemplo, para o caso do ferreiro abelleiro (*parus májor*) que ten un índice de supervivencia de 0´5, temos unha esperanza de vida de 1´4427 anos, mentres que a fórmula de aproximación daranos un valor de 1´5. A diferencia, como se ve, é pequena: 0´0573 anos ≈ 21 días. Se representamos graficamente os cálculos realizados podemos apreciarlo[1]:





[1] En realidade os rectángulos da gráfica están construídos coa función $0'5^{0'5} \cdot x \cdot 0'5^x$, segundo se deduce da táboa, en vez de toma-los valores coa función que se integra: $-\ln 0'5 \cdot x \cdot 0'5^x$, sendo $0'5^{0'5} \approx 0'707$ e -ln 0´5 = 0´693.

Apéndice 2

Axuste do modelo

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

A2.1.- O problema da superficie lateral

Sobre a lonxitude dunha curva hai unha observación importante que facer: non depende puntualmente dos valores da función, senón das súas relacións, da "forma" que determinan. Logo no cálculo da lonxitude, a integral non debe conter información acerca dos valores da función, senón acerca dos da súa derivada, como de feito sucede.

Nese sentido, a superficie de revolución si que depende do "tamaño" da función, pero tamén da súa derivada. A integral debe, pois, conter información acerca de ámbalas dúas, tal como sabemos que sucede.

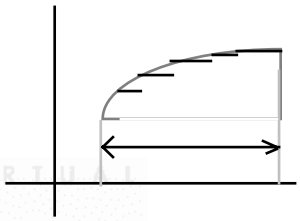
Intuitivamente poderiamos aproxima-la superficie dun corpo (non necesariamente de revolución) por medio de "bandas" cilíndricas: a aproximación melloraría ó seren estas máis estreitas, e semella ser total cando se convertesen, practicamente, en simples circunferencias.

- A opción metodolóxica de presenta-los contidos a través de problemas levoume a propoñerlles ós alumnos de COU que indagasen acerca de cono calcular unha superficie de revolución, unha vez que xa tiñamos estudiado

cono calcula-lo correspondente volume e a lonxitude dun arco. A proximidade temporal e a similitude visual da figura induciron, probablemente, a algúns estudiantes a pensa-la superficie como unión de finas franxas. Unha posibilidade que dificilmente se presentaría de coñecer *a priori* a solución.

Quizais a cuestión poida parecer trivial, independente da validez dos resultados matemáticos, pero non é así. Analicémo-lo que sucedería neste dous exemplos clásicos que estamos tratando:

i) A discusión, no caso da lonxitude dun arco levaríanos a presentala como unha suma de segmentos horizontais e, no caso límite, como unha suma de elementos diferenciais, *dx*.



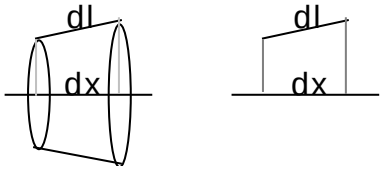
Certamente iso non funciona: a suma dos segmentos horizontais é sempre o propio intervalo, polo que o límite seguirá sendo este. Pero a intuición permítenos cubri-la curva punto a punto, con absoluta exactitude: a suma das "lonxitudes dos seus puntos" deberá ser igual á lonxitude do arco.

Quizais a facilidade visual para saír do engano (non sería posible un proceso de aproximacións sucesivas por este procedemento) e que, por outra parte, sexa bastante natural intenta-la aproximación rectificando o arco por medio dunha poligonal, lle resten interese a este exemplo.

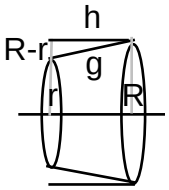
ii) O caso da superficie de revolución resultará máis apaixonante. Non está tan claro que o intuitivo sexa aproximar por troncos de cono, sobre todo se pouco antes o volume se aproximou por cilindros, xa que se trata dunha mesma figura.

Non deixa de ser curioso, ademais, que o volume se poida aproximar por cilindros ou troncos de cono indistintamente (no volume non intervén a xeratriz, se non a altura), mentres que a superficie lateral soamente admite a "rectificación" por troncos de cono (intervén a xeratriz).

Esta situación ten un claro paralelismo coa área plana, que tamén admite aproximación por rectángulos ou trapecios.



Co ánimo de afirma-la percepción, buscamos un exemplo no que a superficie lateral do tronco-cono supere á dun cilindro que o abarque:



$$S_{trono-cono} = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2}\cdot g = 2\pi\cdot\frac{R+r}{2}\cdot g > S_{tilindro} = 2\pi\cdot R\cdot h \quad \rightarrow \quad \frac{R+r}{2}\cdot g > R\cdot h$$

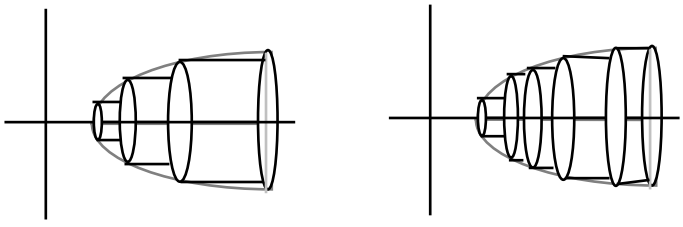
E sendo $g^2 = (R-r)^2 + h^2$, tomamos, para simplificar, $R = 1'5$ e $r = 0'5$:

$$g > 1'5h \wedge g = 1 + h^2 \qquad 1 + h^2 > (1'5h)^2 \qquad h^2 < 0'8 \qquad h < \sqrt{0'8} = 0'894...$$

para $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $g = \sqrt{\frac{3}{2}}$ $\qquad S_{trono-cono} = \sqrt{6}\pi > S_{cilindro} = \sqrt{\frac{9}{2}}\pi$.

Certamente podemos constatar cómo nunha rotación o volume é xerado polo recinto plano (área), mentres que a superficie lateral eo polo seu contorno (lonxitude). Pero a cuestión que se nos suscita podemos discutila con independencia da rotación.

Ó contrario do que sucedía coa lonxitude do arco de curva, agora si é posible un proceso de aproximacións sucesivas á superficie lateral mediante franxas cilíndricas, do mesmo xeito que procedemos cando aproximamos un volume:

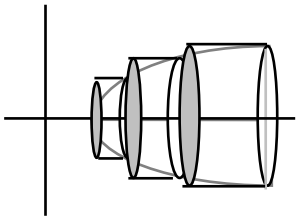


Isto presenta a posibilidade de obter unha superficie de revolución mediante a integral da función $2\pi\, f(x)$ que rexeitamos non só porque temos asimilado que iso non é así, senón polo que se comentaba ó principio deste epígrafe: a superficie depende

do valor da función e tamén da súa forma, ou sexa, da súa derivada; logo non será posible obtela se contemplamos soamente os valores da función.

¿Onde radica, pois, a dificultade?.

Se decidisemos face-las aproximacións por exceso sufriríamos un severo revés: é probable que para curva do debuxo tal aproximación non consiga maiora-la superficie de revolución que queremos medir.



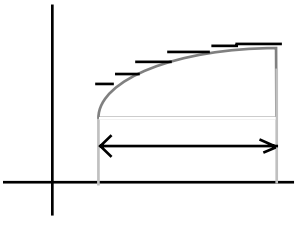
Poderiamos imaxinar curvas moito máis oscilantes para agrava-la contradicción, pero non creo que sexa necesario.

Nótese que non estamos discutindo se existe ou non integral para a función $2\pi f(x)$, senón se a dita integral responde ou non á magnitude que pretendemos calcular.

O certo é que, efectivamente, $2\pi f(x)dx$ expresa correctamente un elemento de superficie lateral cando se trata de cilindros ou sumas graduadas de cilindros, tal e como sucede nos volumes con $\pi f(x)^2 dx$; o cal ten o seu equivalente nos rectángulos ou rexións planas formadas por unións de rectángulos, con $f(x)dx$.

A diferencia estriba en que os volumes ou as áreas planas pódense estender a calquera tipo de funcións a través do principio de exhaución, precisamente pola monotonía da magnitude que se mide, que permite "encaixar" o valor buscado para un volume ou área calquera, entre os valores obtidos con funcións en esqueira respectivamente $\leq$ ou $\geq$ que a función dada.

Se reparamos de novo no arco de curva, vemos que sucede o propio, se cabe aínda máis drasticamente: utilizando unha función máis grande definida a tramos constantes, non se consegue maiora-la lonxitude, ¡en ningún caso!



A2.2.- Axuste do modelo

Volvendo ó "revés sufrido", ¿que nos garantiría que as pretendidas aproximacións á superficie dun corpo, tanto por defecto como por exceso, efectivamente son destes tipos segundo corresponda?

- Nun principio o lóxico é salva-la dificultade que temos detectada: que tomando un valor $\leq$ ou $\geq$ da función, respectivamente, o cálculo proporcione para a magnitude en cuestión, tamén un valor $\leq$ ou $\geq$ que o pretendido.

- Noutras palabras, o que está implícito é a *propiedade de ordenación ou monotonía*:
  Se *f* e *g* son dúas funcións integrables nun intervalo [a, b], entón:

$$f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b] \qquad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Un tratamento explícito dos modelos de integración como resposta ó problema de "*determinar cando fan falla as integrais*" atopámolo en Gere et al.(1972). Aínda que se desenvolve baixo diferentes premisas e require, en calquera caso, un maior rigor, proporciónanos unha pauta para seguir.

O noso desenvolvemento do tema pivotaba sobre tres ideas que se corresponderían a un estado natural de comprensión por parte dos estudiantes, dada a súa formación anterior (en Matemáticas e Física, esencialmente), e que explicitamos conscientemente:

i) No caso dunha función constante *k*, $F_a^b = k \cdot (b-a)$.

ii) Aditividade sobre o intervalo: $F_a^b = F_a^c + F_c^b$.

iii) Continuidade, que logo estendemos á continuidade a cachos.

Como coñecemos pola teoría da integración, a terceira propiedade é suficiente para garanti-la existencia da integral (no capítulo 2 referímonos a outras condicións, pero xa establecemos nesta un grao de profundidade desexable neste nivel académico). Ademais a integral ten como propiedades, entre outras, as dúas primeiras; estas, polo tanto, refírense a outros atributos máis débiles das magnitudes en cuestión, que precisamente nos orientaban cara á busca da integral.

O que nos propoñemos é engadir a esas dúas primeiras a propiedade de monotonía e estudiar se entre as tres nos poden garantir que, no caso de existi-la integral, esta é necesariamente a magnitude que buscamos.

O plan de traballo comeza por formaliza-la magnitude en termos analíticos, de xeito que sexa posible comparala coa integral. Para isto será necesario:

i) Representar en termos de funcións as propiedades relativas ó caso da función constante e a da aditividade, o que podemos facer ideando dous conceptos novos moi simples.

ii) Adapta-la propiedade de monotonía á terminoloxía anterior.

A continuación debemos decidir cál será o criterio de comparación. O máis sinxelo parece ser emprega-la seguinte caracterización: a integral se existe, é o único número que está entre a suma inferior e a suma superior, para calquera partición do intervalo Spivak (1992). Isto requirirá, entón:

iii) Adapta-las ditas sumas á terminoloxía anterior, o que implica xeneraliza-lo concepto correspondente á aditividade, cousa que faremos antes para gañar claridade expositiva.

No que segue, igual que sucedeu ata aquí, empregarémo-lo termo “función” para referirnos a funcións reais de variable real.

Sexa [a, b] un intervalo pechado en $\Re$.

Definición: unha función con dominio [*c, d*] contido en [a, b] diremos que é unha *k-función* sobre [a, b], se e só se: $\exists\, k \in \Re \;/\; \forall x \in [c,d]\;\; f(x) = k$.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Definición: se *f, g* son funcións con dominios [*c, d*] e [*d, e*] contidos en [a, b], respectivamente, chamamos función unión de f e g, e escribimos $f \cup g$, á función definida como[1]:

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x), se\ x \in [c,d) \\ g(x), se\ x \in [d,e] \end{cases}$$

Definición: se $\{f_i\}_{i=1,\ldots,n}$ é un conxunto de funcións con dominios $\{[x_{i-1}, x_i] / \ x_{i-1} < x_i, \quad i = 1,\ldots,n\}$ contidos en [a, b], chamamos

$$\bigcup_1^n f_i = \bigcup_1^{n-1} f_i \cup f_n \ , \forall n \geq 3.$$

Sexa F unha familia de funcións o dominio da cal está contido en [a, b] e tal que:

a) Toda k-función sobre [a, b] pertence a F.

b) Se f e g pertencen a F, entón se existe $f \cup g$, tamén pertence a F.

Definición: diremos que unha aplicación M: $\mathrm{F} \longrightarrow \Re$ é un *modelo*, se e só se:

i) Para toda k-función f sobre [a,b], con dominio [c,d], é $M(f) = k \cdot (d - c)$.

ii) Se *f, g* son funcións de F, entón se existe $f \cup g$, $M(f \cup g) = M(f) + M(g)$.

iii) Se *f, g* son funcións de F co mesmo dominio, entón $f(x) \leq g(x)\ \forall x \quad M(f) \leq M(g)$.

Empregaremos dous lemas triviais:

---

1 Nótese que esta definición, que preserva explícita a idea intuitiva de aditividade, podería darse por medio das funcións características dos respectivos subintervalos, restrinxíndoa ó intervalo unión: $f \cup g = f \cdot \chi_{[c,d)} + g \cdot \chi_{[d,e]}$.

Esta idea de "unión de funcións" recórdanos tamén o concepto de aplicación combinada, aínda que neste caso esíxese a condición de coincidir na intersección dos dominios, o que non responde ás nosas pretensións.

Lema 1: se $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ é un conxunto de funcións de F con dominios $\{[x_{i-1}, x_i] / \ x_{i-1} < x_i, \quad i = 1,\dots,n\}$, entón $\bigcup_1^n f_i \in$ F.

Lema 2: se $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ é un conxunto de funcións de F con dominios $\{[x_{i-1}, x_i] / \ x_{i-1} < x_i, \quad i = 1,\dots,n\}$, entón $M\left(\bigcup_1^n f_i\right) = \sum_1^n M(f_i)$.

Teorema: Se f é unha función acoutada pertencente a F e existe $\int_a^b f(x)dx$, entón $M(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Demostración:

Sexa *P* unha partición de [a, b] en *n* subintervalos, e sexan:

$I_i = \inf\{f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,\dots,n\}, \quad S_i = \sup\{f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,\dots,n\}$

definímo-las k-funcións $fI_i(x) = I_i \ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$ e $fS_i(x) = S_i \ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$

entón $M(fI_i) = I_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ e $M(fS_i) = S_i \cdot (x_i - x_{i-1})$.

Sexan $I = \bigcup_1^n fI_i$ e $S = \bigcup_1^n fS_i$, entón, para as sumas inferiores e superiores correspondentes á partición *P*:

$$I(f,P) = \sum_1^n I_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_1^n M(fI_i) = M\left(\bigcup_1^n fI_i\right) = M(I)$$

$$S(f,P) = \sum_1^n S_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_1^n M(fS_i) = M\left(\bigcup_1^n fS_i\right) = M(S)$$

Por construcción é $I(x) \le f(x) \le S(x) \ \forall x \in [a,b] \quad M(I) \le M(f) \le M(S)$

Logo $I(f,P) \le M(f) \le S(f,P)$ para toda partición de [a, b], e sendo $\int_a^b f(x)dx$ o único número con esa condición, concluímos que $M(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Apéndice 3:

Batería xeral de problemas e análise didáctica

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Expoñemos a continuación a relación completa dos problemas que chegamos a manexar nesta investigación, clasificados nas catro categorías cognitivas que convencionalmente tiñamos establecido, seguida dunhas breves análises didácticas daqueles que non figuraban xa no instrumento principal, dos que repetiremos unicamente o enunciado a xeito de recordatorio.

Interpretación da integral como medida

1.1.- Calcula a área comprendida entre a gráfica da curva *f(x) = cos x* e o eixo horizontal no intervalo $[0,\pi]$.

1.2.- Debuxa, a grandes trazos, a gráfica dunha función que exprese en cada punto a área baixo a curva *$y= x^2 +1$* , entre a orixe e o dito punto.

A cuestión versa sobre o significado xeométrico do teorema fundamental.

Ó proporcionar unha fórmula concreta quizais esteamos invitando a buscar unha primitiva e, sen máis, pintala. Atopariámonos cunha resposta válida se o resolutor ignora a cte. (quizais por non saber que facer con ela), xa que equivale a asignarlle o valor 0:

$$(x^2 + 1)dx = \tfrac{1}{3}x^3 + x + cte. \rightarrow \tfrac{1}{3}x^3 + x$$

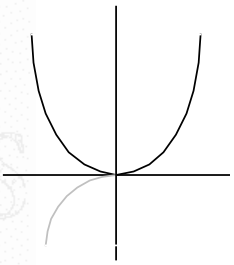
valor que se adapta ó emprego, correcto, da integral definida:

$$\int_0^x (t^2 + 1)dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3 + t + cte.\right]_0^x = \tfrac{1}{3}x^3 + x$$

pois a cte. sempre se elimina na resta.

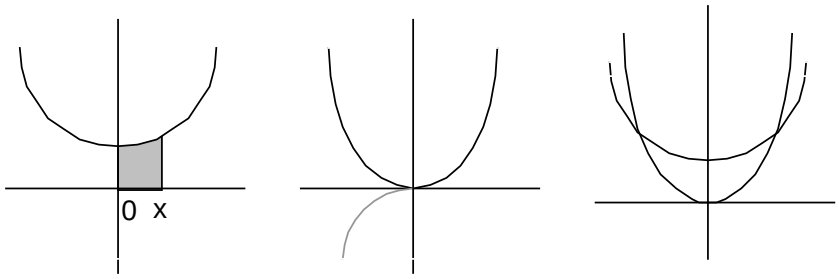
Quedándose con $y = \tfrac{1}{3}x^3 + x$, faríase unha pequena táboa de valores.

x	y
0	0
1	4/3
-1	-4/3



Unha dificultade atopámola na póla negativa da función que, no caso de representarse, indicaríanos que non se tomou o valor absoluto para a área.

É un bo exercicio para unha recreación visual por ordenador, pois permite confronta-las dúas funcións:



(Ó primeiro a área é inferior ó valor da propia función, iguálanse nun punto e logo aquela supera a esta).

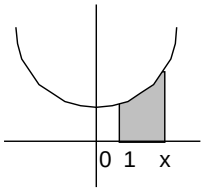
1.3.- Debuxa, a grandes trazos, a gráfica dunha función que exprese en cada punto *x* a área baixo a curva $y = x^2 + 1$, entre $a = 1$ e o dito punto, para $x \geq 1$.

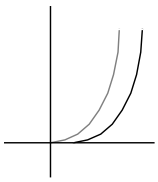
Neste caso a cte. de integración non é 0, pero tampouco é necesario determinala xa que se pide debuxar "a grandes trazos". O problema esixe ser complementado e, de novo, o paso ó cadro xeométrico proporciónanos unha oportunidade para a resolución:

a) Determinación da función área:

$$A(x) = \int_1^x (t^2+1)dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3 + t\right]_1^x = \tfrac{1}{3}x^3 + x - \tfrac{4}{3}$$

para $x \geq 1$ (para outros valores de x o problema presenta máis dificultades).





b) Estimación visual:

Este proceder obriga a asignar un valor inicial á área, o que trae a colación o da "área dunha liña" (= 0).

c) Determinación analítico-xeométrica da constante:

A constante de integración, en valor absoluto, sería a área (en xeral, é o valor da magnitude en cuestión) que vai dende o 0 ata o punto inicial; unha área que teremos que restar:

$$|k| = \left| -\int_0^1 (x^2+1)dx \right| = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \tfrac{4}{3}$$

$$\int_1^x (t^2+1)dt = \int_0^x (t^2+1)dt - \int_0^1 (t^2+1)dt$$

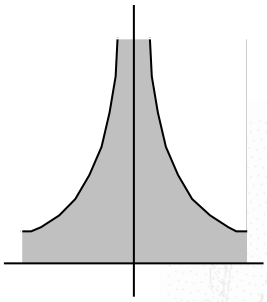
Realmente este exercicio sería moito máis profundo na interpretación do teorema fundamental. Simultanea-los dous exercicios supón crear un posible conflicto cognitivo: ¿como avalío a cte.? que, se iso non fose pedir demasiado, retrotraería ós alumnos a coñecementos que xa posúen dende 2º de BUP:

$$v = a \cdot t + v_0 \qquad e = \tfrac{1}{2}a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + e_0$$

que son as fórmulas do ineludible movemento uniformemente acelerado que, en 3º de BUP, xa se trata mediante integración, e repásanse de novo no COU; fórmulas que expresan precisamente a existencia dunha velocidade ou dun espacio "previos". Parece pertinente reclamar agora a utilización didáctica do “cadro físico".

1.4.- A función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ toma tódolos seus valores positivos. ¿É correcto o seguinte cálculo?: $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=|-\frac{1}{x}|_{-1}^{1}=-1-1=-2$. De non selo, propón un cálculo alternativo.

Veremos se aprecian a aparente contradicción entre os datos, se identifican a descontinuidade e subdividen en intervalos continuos e, nese caso, como avalían as integrais impropias.



$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx=|-\frac{1}{x}|_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{x}\right]_{0}^{1}=$$

$$=(lim_{x\to 0^-}-\frac{1}{x}\ -1)+(-1-lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{x})=\infty+\infty=\infty$$

Presentámolo na idea de que a imaxe habitual de integración implica asociar unha función positiva (por riba do eixe horizontal) cun valor positivo da súa integral definida en calquera intervalo. De non ser así, non se tiña por qué apreciar contradicción ningunha no enunciado.

De apreciala poden, sinxelamente, toma-lo valor absoluto, reacción que lles resultará familiar por algúns dos problemas estándar de áreas.

Postos sobre a sospeita, a descontinuidade pode ser relativamente fácil de ser traída a colación, xa que este tipo de dificultade están afeitos a tratala dende 3º de BUP, cando estudia dominios e asíntotas.

Un uso implícito dos límites indicaríanos un coñecemento previo deste tipo de problema e a capacidade de resolvelo mecanicamente (non hai intención pexorativa no comentario, pois poden moi ben comprender perfectamente o porqué):

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx=|-\frac{1}{x}|_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{x}\right]_{0}^{1}=(-\frac{1}{0}\ -1)+(-1+\frac{1}{0})=\infty+\infty=\infty$$

Nese caso, unha dificultade estaría no signo do primeiro ∝, que moi ben podería levar a -∝ + ∝, dificultade que se tería superado de recorrer ó cadro xeométrico.

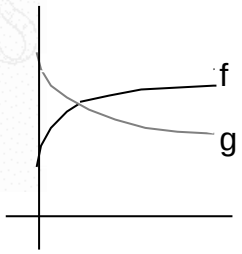
O uso explícito dos límites sería posible aínda descoñecendo o tipo de problema, podendo vir suxerido dende o plano xeométrico.

1.5.- As funcións f, g son continuas e positivas no intervalo [0,1], e a diferencia entre $\int_0^1 f(x)dx$ **e** $\int_0^1 g(x)dx$ **é moi pequena. A partir deste dato, ¿podemos afirmar que *f* e *g* toman valores moi próximos en tódolos puntos dese intervalo? Xustifica a resposta.**

Pretendemos revisa-la posible asociación entre a integral definida e un particular "modelo visual" de función.

O feito, suposto, de dar un soporte gráfico pobre á integración pode carrexar unha asociación inconsciente entre a "figura" e o "valor".

Isto non debera suceder se tivesen interpretado xeometricamente descomposicións de funcións na busca de simplificacións nos cálculos de primitivas que precisaban. Por exemplo, ó facer:



$$\int_0^1 \left(3\ln(x+2) - \frac{4}{x+1}\right)dx = \int_0^1 3\ln(x+2)dx - \int_0^1 \frac{4}{x+1}dx \approx -0'04$$

¿Que representa daquela cada membro da diferencia?

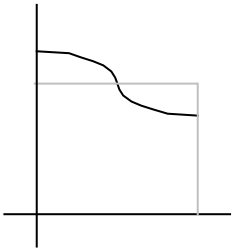
1.6.- Se $\int_0^1 f(x)dx = 2$**, e *f* unha función sempre positiva, ¿entón** $f(x) \le 2 \quad \forall x \in [0,1]$**?**

Xustifica a resposta.

¿Que teorema ou resultado matemático se relaciona con este problema?

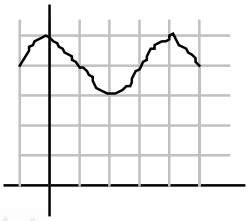
Da mesma natureza que o problema anterior, proporciónase agora o "valor" concreto, o que parece invitar a unha exploración gráfica. (Sen embargo os alumnos do CAP avaliárona como moi difícil pola dificultade de buscar contraexemplos: intentárono analiticamente, claro).

A compensación de áreas proporcionaría respostas correctas, o cal non deixa de ser unha recreación do teorema do valor medio, que pode ser evocado ou non, de aí unha segunda pregunta para, no seu caso, explicitalo.



1.7.- ¿Como calcularías, coa maior aproximación que che sexa posible, a área baixo a curva do debuxo, da que descoñecémo-la fórmula?.

Xustifica a resposta e realiza o cálculo que propós.



BIBLIOTECA VIRTUAL Miguel de Cervantes

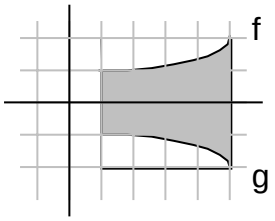
1.8.- Se *f* e *g* son continuas en [a,b], con *f(x) = -g(x)* en todo o intervalo, ¿como son entre si as áreas comprendidas entre o eixo de abscisas e as gráficas das funcións entre *a* e *b*?. ¿Como son os valores das respectivas integrais definidas en [a,b]?

A cuestión está dirixida á propiedade lineal da integración e ó signo da área.

a) A resposta analítica dáse pola linearidade da integral:

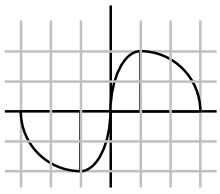
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b -g(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dx$$

$$A_f = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|-\int_a^b g(x)dx\right| = \left|\int_a^b g(x)dx\right| = A_g$$



b) A exploración xeométrica é, neste caso, un sinxelo exercicio de simetría. Podería complicarse un pouco con exemplos de funcións que cortasen ó eixe de abscisas.

1.9.- ¿Como calcularía-la área limitada pola gráfica e o eixo horizontal no intervalo [-3, 3] se coñecése-la fórmula de *f* ?

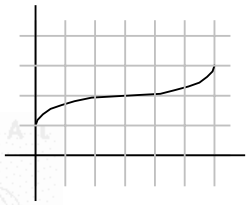


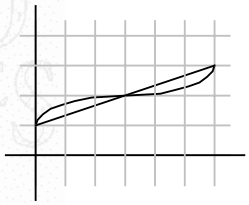
A actividade permítenos indagar sobre a asignación do signo ás áreas e a utilización da simetría en relación coa integral definida.

Unha resposta completa sería "$2 \cdot \int_0^3 f(x)\,dx$", aclarando "se soubera integrar f".

Sen a aclaración pode indicar que non se ten presente a posibilidade de que non se saiba cómo atopar unha primitiva de f.

1.10.- ¿Como calcularías, coa maior aproximación que che sexa posible, a área baixo a curva do debuxo da que descoñecémo-la fórmula? Xustifica a resposta e realiza o cálculo que propós.





A solución xeométrica é moi simple estimando a partir do "cadro unidade", aínda que esperaríamos unha compensación de áreas simplificando ó trapecio: $A = \frac{3+1}{2} \cdot 6 = 12$.

1.11.- Dada a función $f(x) = 1 + \frac{6}{x^2}$, calcula a área entre os puntos 1 e 3.

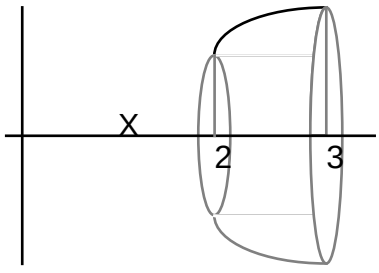
Comprobando que tódolos valores son positivos pode responderse directamente:

$$\int_1^3 (1 + \frac{6}{x^2})\,dx = \left[x - 6x^{-1}\right]_1^3 = 6$$

Noutro caso debérase intentar debuxa-la gráfica por se hai puntos de corte co eixe de abscisas.

1.12.- O corpo da figura obtívose ó xirar en torno ó eixo X o tramo da curva $y = 6x - x^2$ entre os puntos de abscisas 2 e 3.

Explica algunha idea sobre cómo nos poderiamos aproximar ó seu volume.



Se podes, calcúlao con exactitude. Xustifica por qué o método que segues para resolvelo é correcto.

Cálculo e representación de primitivas. Métodos de integración

2.1.- Calcula a ecuación dunha curva que pasa polo punto P(1, 5) e ten como derivada, en calquera punto *x*, $3x^2 + 5x - 2$**.**

Está pensado como un problema xenuinamente de antiderivación, no cal a función (polinómica) non debera representar ningunha dificultade.

Se o resolutor explicita a presencia dunha constante de integración, pero non intenta calculala, pode indicarnos que esta é asumida mecanicamente, sen significado.

Se o intenta valorariamos como boa a súa comprensión, aínda que quizais sexa o propio enunciado oque o impulse a facelo. ("¿Para que quero o punto P(1, 5)?").

Os cálculos son elementais:

$$3x^2 + 5x - 2 \quad \rightarrow \quad x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 - 2x + k$$

$$1^3 + \tfrac{5}{2}1^2 - 2\cdot 1 + k = 5 \qquad k = \tfrac{7}{2} \qquad \rightarrow \quad f(x) = x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 - 2x + \tfrac{7}{2}$$

2.2.- Determina a función ***f*** **definida en (0, ∞), que ten como derivada segunda** $f''(x) = \dfrac{6}{x^3}$ **e tal que *f(1) = 0, f(2) = 1/2*.**

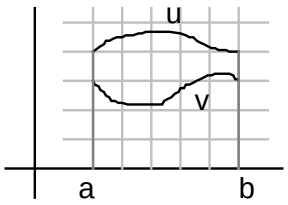
Trátase novamente dun problema directo de antiderivación, aínda que neste caso o proceso é dobre, tendo que "arrastrar" unha constante xurdida no primeiro paso, o que quizais constitúa un problema conceptual, de planificación, máis que técnico de cálculo simbólico:

$$6x^{-3} \quad \rightarrow \quad -3x^{-2} + k_1 \quad \rightarrow \quad 3x^{-1} + k_1 \cdot x + k_2$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 1^{-1} + k_1 \cdot 1 + k_2 = 0 \\ 3\cdot 2^{-1} + k_1 \cdot 2 + k_2 = \tfrac{1}{2} \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad k_1 = 2\,;\, k_2 = -5$$

2.3.- Sexan *u,v* as funcións da figura adxunta. Se $\int_a^b u \cdot dv = 1$**,**

¿que valor toma a expresión $\int_a^b v \cdot du$ **? Xustifícao.**



2.4.- ¿Cal é a función polinómica máis sinxela que pase polos puntos A(0, 2) e B(2, 4), e tal que a súa derivada segunda valla 4 en *x = 1*?.

A execución do problema realízase a través do cálculo literal de derivadas simples e de resolución de ecuacións elementais, pero a fase de planificación constitúe un interesante problema de antiderivación:

Hai que facer unha valoración para selecciona-la clase de funcións que poden responder ás condicións do problema:

- Se a segunda derivada non é nula nalgún punto, o polinomio é alomenos de 2º grao, e buscando o máis sinxelo, debemos consideralo así:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2ax + b \quad \rightarrow \quad f''(x) = 2a$$

$$f''(1) = 4 \qquad a = 2 \quad \rightarrow \quad f(x) = 2x^2 + bx + c$$

- As coordenadas dos puntos A e B proporciónannos dúas ecuacións que nos permiten despexa-las incógnitas *b* e *c*, aínda que o sistema puido ser presentado inicialmente e ter xa coñecido que *c = 2* (consideramos que isto último non supón ningún cambio substancial):

$$f(0) = 2 \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2 \quad \rightarrow \quad c = 2$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2 = 4 \quad \rightarrow \quad b = -3$$

2.5.- Calcula $\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\, dx$ **.**

Exercicio de cálculo de primitivas: responde ó modelo $f^n(x) \cdot f'(x)$, e require un sinxelo axuste de coeficientes.

Unha dificultade para recoñece-lo modelo ó que corresponde pode estar en que o expoñente sexa negativo.

$$\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \tfrac{1}{2}\;\; 2x\cdot(x^2+1)^{-3}\,dx = -\tfrac{1}{4}(x^2+1)^{-2} + cte.$$

2.6.- Calcula $5x\cos(x^2+1)\,dx$**.**

Exercicio de cálculo de primitivas: responde ó modelo $\cos[f(x)]\cdot f'(x)$, e require un sinxelo axuste de coeficientes.

$$5x\cos(x^2+1)dx = \tfrac{5}{2}\;\; 2x\cos(x^2+1)dx = \tfrac{5}{2}\sin(x^2+1) + cte.$$

2.7.- Calcula $3\cdot e^{0'2x}\,dx$**.**

Exercicio de cálculo de primitivas: responde ó modelo $e^{f(x)}\cdot f'(x)$, e require un sinxelo axuste de coeficientes.

$$3\cdot e^{0'2x}dx = \tfrac{3}{0'2}\;\; 0'2\cdot e^{0'2x}dx = \tfrac{3}{0'2}\cdot e^{0'2x} + cte.$$

2.8.- Calcula $x\cos x\,dx$**.**

2.9.- Calcula $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **(Consideramos unicamente os valores positivos da raíz).**

Exercicio de cálculo de primitivas: é unha proba unicamente de coñecementos, pois trátase dunha función elemental:

$$arc\sin x + cte.$$

2.10.- Calcula $\sqrt{1-x^2}\,dx$ **(Consideramos unicamente os valores positivos da raíz).**

Exercicio de cálculo de primitivas: cambio de variable.

A súa resolución é complexa, aínda que se trata dun exercicio bastante típico, frecuentemente asociado á determinación da área dun círculo (neste caso *r = 1*).

De non facerse por imitación, nun primeiro paso sería esencial ter unha intención simplificadora: ¿como prescindo da raíz?, e asocia-la expresión á ecuación fundamental da trigonometría, o que quizais non sexa fácil se non hai proximidade temporal co manexo das fórmulas trigonométricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{sin} t \\ dx = \cos t\ dt \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{1-x^2}\,dx = \sqrt{1-\operatorname{sin}^2 t}\,\cos t\,dt = \cos^2 t\,dt$$

A integral que se nos presenta agora ofrece dous camiños alternativos alcanzables:

i) Por partes, pero sen conseguir simplifica-la expresión, dando lugar a unha situación "cíclica" que require contemplala como unha ecuación, alongando e complicando cualitativamente o proceso de resolución:

$$\cos^2 t\,dt = \cos t\,\cos t\,dt \rightarrow \begin{cases} u = \cos t \rightarrow u' = -\operatorname{sin} t\,dt \\ v = \operatorname{sin} t \leftarrow v' = \cos t\,dt \end{cases}$$

$$= \cos t \cdot \operatorname{sin} t - \operatorname{sin} t \cdot (-\operatorname{sin} t)\,dt = \cos t \cdot \operatorname{sin} t + \operatorname{sin}^2 t\,dt =$$

$$= \cos t \cdot \operatorname{sin} t + (1-\cos^2 t)\,dt = \cos t \cdot \operatorname{sin} t + t - \cos^2 t\,dt$$

$$\cos^2 t\,dt = \cos t \cdot \operatorname{sin} t + t - \cos^2 t\,dt \quad \rightarrow \quad 2\cos^2 t\,dt = \cos t \cdot \operatorname{sin} t + t$$

$$\cos^2 t\,dt = \frac{\cos t \cdot \operatorname{sin} t + t}{2}$$

$$\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{1-x^2}\cdot x + \operatorname{arcsin} x}{2} + cte.$$

ii) Recorrendo a outra relación trigonométrica que "suaviza" a función, aínda que a expresión é aparentemente máis complexa: $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$, o que acurta notoriamente o camiño, pero que quizais non se asocie con facilidade se non se viu isto ou algo similar no propio capítulo de integración.

$$\cos^2 t\,dt = \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{t+\frac{1}{2}\sin 2t}{2} = \frac{t+\frac{1}{2}2\sin t\cdot\cos t}{2} = \frac{t+\sin t\cdot\cos t}{2}$$

2.11.- Calcula $\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$ **(Consideramos unicamente os valores positivos da raíz).**

Exercicio de cálculo de primitivas: cambio de variable.

É esencial a intención de prescindir da raíz, o que suxire un cambio de variable do tipo:

$$\left.\begin{array}{l} t^2 = x-1 \to x = t^2+1 \\ 2t\,dt = dx \end{array}\right\} \to \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \frac{1}{(t^2+1)t}2t\,dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2\arctan t = 2\arctan\sqrt{x-1} + cte.$$

2.12.- Calcula $\frac{2x+1}{3x^2+3x-1}\,dx$ **.**

Exercicio de cálculo directo de primitivas: responde ó modelo $\ln[f(x)]\cdot f'(x)$, e require un axuste de coeficientes:

$$\frac{2x+1}{3x^2+3x-1}\,dx = \tfrac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln(x^2+x-3) + cte.$$

2.13.- Calcula $\frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$ **.**

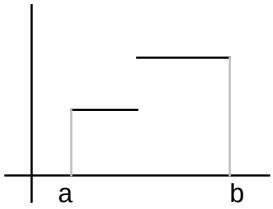
Exercicio de cálculo de primitivas: responde ó modelo $\arctan f(x)\cdot f'(x)$.

Pode resultar difícil de recoñecer se non se ten realizado ningunha práctica semellante. Require un axuste da expresión, o que en si mesmo pode representar un problema específico:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \arctan(x+1) + cte.$$

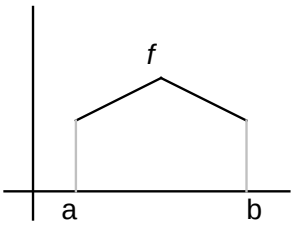
2.14.- Debuxa, se existe, unha primitiva da función representada no gráfico, no intervalo [a, b].

Xustifica a resposta que deas.



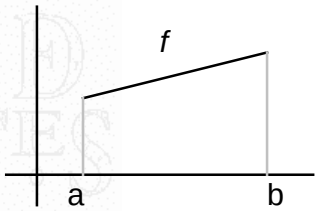
2.15.- Debuxa, se existe, unha primitiva de *f* no intervalo que se sinala no gráfico.

Xustifica a resposta.



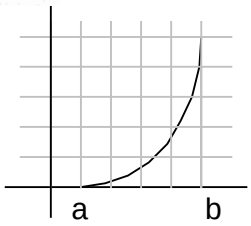
2.16.- Debuxa, se existe, unha primitiva de *f* no intervalo que se sinala no gráfico.

Xustifica a resposta.



Este tipo de exercicio esixe reversibilidade no pensamento.

Recordando o teorema fundamental, unha perspectiva xeométrica poderíanos servir para constatar que a área aumenta cada vez máis (ou cada vez máis rápido, se queremos precisa-la expresión), xa que "a liña" que se engade é cada vez máis longa. Logo a primitiva (área) debe ser curva e convexa.



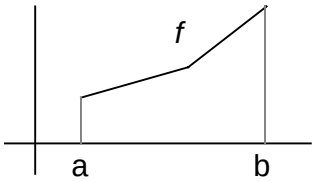
Un aspecto para ter en conta é a asignación do valor inicial 0 a área, xa que a función f non é nula no punto a.

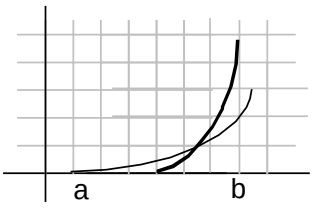
Unha visión puramente analítica sería máis simple, sempre que se identificase a función f cun polinomio de 1º grao, pois daquela as súas primitivas habían de selo de 2º.

Unha perspectiva mixta podería consistir en contemplar f como a derivada da función buscada e, polo tanto, a medida da súa "pendente" en cada punto; ó ser f cada vez maior, a función buscada debe ser cada vez máis “inclinada”.

2.17.- Debuxa, se existe, unha primitiva de *f* no intervalo que se sinala no gráfico.

Xustifica a resposta.





Recordando o teorema fundamental, unha perspectiva xeométrica poderíanos servir para constatar que en ámbolos dous tramos a área aumenta cada vez máis (ou cada vez máis rápido, se queremos precisa-la expresión), xa que "a liña" que se engade é cada vez máis longa. Logo a primitiva (área) debe ter dous tramos curvos e convexos.

É difícil representar os dous arcos de parábola, de xeito que a súa intersección sexa "suave" (a primitiva debe ser derivable no punto de unión das dúas ramas).

Un aspecto a ter en conta é a asignación do valor inicial 0 a área, xa que a función f non é nula no punto *a*.

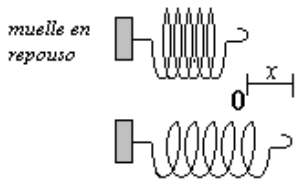
A visión puramente analítica sería máis simple, sempre que se identificase a función con dous tramos polinómicos de 1º grao, pois daquela as súas primitivas habían de selo de 2º.

Unha perspectiva mixta podería consistir en contemplar f como a derivada da función buscada e, polo tanto, a medida da súa "pendente" en cada punto; ó ser f cada vez maior, a función buscada debe ser cada vez máis "inclinada", e no punto anguloso os dous tramos deben te-la mesma "inclinación".

Aplicación a outros contextos

3.1.- O traballo físico *T* realizado ó desprazar un corpo por unha forza constante *F*, que actúa na dirección do movemento, vén dado pola fórmula: $T = F \cdot e$, onde "*e*" é o espacio percorrido.

Pero a forza *F* que exerce un resorte elástico varía proporcionalmente á estirada *x*. No noso caso, segundo a fórmula $F(x) = \frac{1}{2}x$, onde $\frac{1}{2}$ é unha constante característica do resorte que se utiliza.



¿Como calcularía-lo traballo físico realizado polo resorte se foi alongado 5 cm, cando volta á posición inicial? Xustifica a resposta.

3.2.- (Recorda que a velocidade é a derivada do espacio respecto do tempo). Un ciclista desprázase a unha velocidade v(t) = 20 - 10t .

Calcula $\int_0^4 v(t)\,dt$ **e describe brevemente cómo foi o percorrido do ciclista.**

3.3.- Moitas situacións discretas poden modelizarse por medio de funcións continuas que proporcionan un grao de aproximación razoable.

O número de persoas que saen dun cinema por minuto vén dado, aproximadamente, pola fórmula: $f(t) = t^2 - 12t + 36$ **.**

¿Canta xente había no cinema? Xustifica o método que segues para calculalo.

Unha concepción xeral e da derivada é a medida do estado de cambio, ritmo ou velocidade instantánea, referida a calquera magnitude, *M*.

O problema que se presenta aquí é o de recoñece-la integral definida como a medida, entre dous puntos dados, do incremento dunha magnitude a partir da súa "velocidade", taxa puntual de variación ou estado de cambio; o incremento total nun intervalo será a suma dos incrementos ou variacións diferenciais:

$$\text{Velocidade media } = \frac{\Delta M(x)}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad \Delta M(x) = \text{ velocidade media} \times \Delta x$$

$$\text{Velocidade instantánea} = Lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta M(x)}{\Delta x} = M'(x)$$

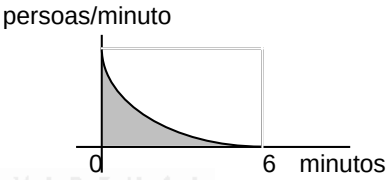
$$dM(x) = M'(x) \cdot dx$$

$$\left[\Delta M(x)\right]_a^b = \sum \Delta M(x)_{\Delta x \to 0} = \int_a^b M'(x)dx$$

O grao de abstracción desta perspectiva entendémolo máis alto que en casos como o do problema 3.1. Verdadeiramente isto mesmo é o que subxace xa no problema 3.2, pero nese caso o uso da palabra derivada e da expresión dunha integral definida, non esixen ó resolutor que posúa realmente tal conceptualización, ademais de corresponderse cunha aprendizaxe anterior moi recorrida.

A representación do problema nos cadros xeométrico e físico pode resultar fructífera:

- A imaxe visual pode suxerir, por similitude cos problemas de espacio-velocidade, que a medida da área sexa tamén a medida do número total de persoas.



- As analoxías estructurais cos problemas físicos pode levar a unha elemental simplificación, o que os alumnos seguramente terán practicado como "ecuacións de dimensións", xa dende 2º de BUP.

$$\frac{persoas}{minuto} \cdot minutos = persoas$$

- As analoxías estructurais cos problemas físicos pode levar a unha elemental simplificación, o que os alumnos seguramente terán practicado como "ecuacións de dimensións", xa dende 2º de BUP.

$$\frac{persoas}{minuto} \cdot minutos = persoas$$

Unha pregunta esencial é: ¿durante canto tempo está saíndo xente? (Máis formalmente: ¿en que intervalo de tempo se produce a saída?).

A resposta a ela é fácil de atopar, aínda que o significativo é a pregunta. Pensamos que, aínda sen ter conciencia da relevancia do dato, por manipulación mecánica (a falta doutras ideas) pode chegarse a respondela, sen continuar coa resolución do problema.

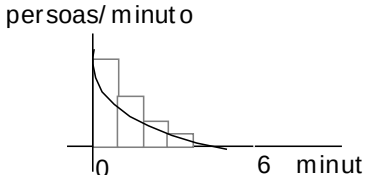
$$f(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 - 12t + 36 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 6$$

$$\int_0^6 (t^2 - 12t + 36)dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3 - 6t^2 + 36t\right]_0^6 = 72$$

Poderíase presentar un tratamento por intervalos, que indicaría un estadio de pre-cálculo, do tipo:

f(0) = 36, f(1) = 25, f(2) = 16, ...,

que dá unha suma de 91, correspondéndose en realidade a unha das sumas superiores.



3.4.- Sóltase un corpo e cae cunha aceleración de 9´8 m/s^2, ¿que distancia percorre no 3º segundo? (entre $t = 2$ e $t = 3$).

É un exercicio de aplicación a un contexto físico familiar, cun dobre proceso de integración:

$$a \quad \rightarrow \quad v \quad \rightarrow \quad e$$

Unha dificultade podémola atopar ó determina-la constante de integración ou, pola contra, pode acontecer que se obvie, o que faría aparece-la solución como correcta, xa que vale 0:

$$v = \int 9'8\,dx = 9'8t + cte. \quad \rightarrow \quad v(0) = 0 \qquad cte. = 0$$

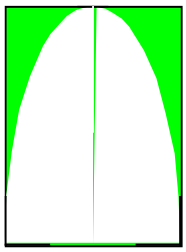
$$e = \int_2^3 v(t)dt = \int_2^3 9'8t\,dt = \left[4'9t^2\right]_2^3 = 24'5$$

Algo que tamén podería suceder é que recordasen a fórmula do movemento uniformemente acelerado:

$$e = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + e_0 \text{ , con } v_0 = 0 \wedge e_0 = 0 \quad \rightarrow \quad e = \tfrac{1}{2}at^2.$$

- Se pensan "durante un segundo é $t = 1$" non sería correcto, pois equivale a $\int_0^1$, que corresponde ó 1º segundo, no que vai máis lento.
- Tamén serían posibles os erros con $t = 3$ e $t = 2$.
- Poderíase, en cambio, considerar $\tfrac{1}{2}at_2^{\,2} - \tfrac{1}{2}at_1^{\,2} = \tfrac{1}{2}9'8 \cdot 3^2 - \tfrac{1}{2}9'8 \cdot 2^2$, que é precisamente o que se expresa mediante a integral: o que leva ós tres segundos menos o que xa levaba ós dous.

3.5.- Temos unha parcela rectangular de 20x50 metros. Nela queremos facer un espacio de xogos de 800m^2 con forma de parábola na parte superior, e rectangular na inferior. O resto resérvase para xardín, tal como se ve no debuxo.



¿Cal é a parábola que debemos trazar?

O problema esixe identifica-lo "espacio de xogos" como a superficie baixo a parábola entre os puntos extremos do recinto.

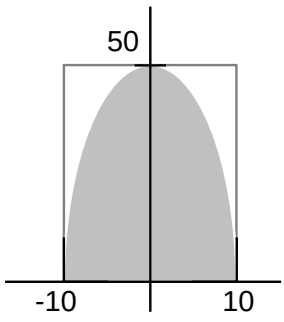
Unha dificultade para isto pode residir no tramo rectangular inferior, a pesar de que este determina os extremos de integración. Sen embargo non pode prescindirse del chegando a parábola ata abaixo, xa que daquela teriamos tres puntos coñecidos e a curva quedaría totalmente determinada, podendo obviarse a cuestión da área.

Trátese de construír unha ecuación na que intervén unha integral definida. O exercicio pode resultar cualitativamente diferente ós habituais, pois a integral non é a resposta.

Por outra parte, a utilización de unidades de superficie é un indicador directo cara á integración, o que facilitaría un enfoque apropiado do problema.

Se as prácticas anteriores con parábolas, ordinarias dende 8º de EXB, son unidireccionais no sentido de "dada a ecuación, pinta-la parábola", terán poucas oportunidades de afronta-lo problema, xa que este se sitúa nunha tesitura inversa: "a parábola está debuxada, busca-la ecuación".

Neste punto, a clave reside en situar convenientemente o sistema de coordenadas, de xeito que a ecuación resulte o máis simple posible:

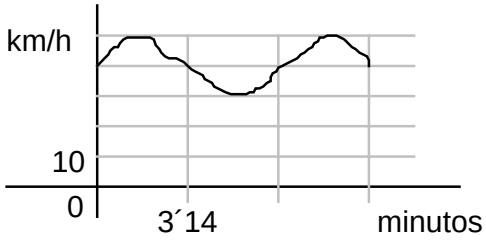


$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow V(0,50) \qquad b = 0 \wedge c = 50$$

$$y = ax^2 + 50$$

$$\int_{-10}^{10} (ax^2 + 50)dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + 50x \right]_{-10}^{10} = 800 \rightarrow a = -\frac{3}{10}$$

3.6.- O gráfico mostra a velocidade dun ciclista nun circuíto urbano, que percorre en 9´42 minutos, tomando a saída en marcha.



Pódese aproximar pola función $f(x) = 40 + 10\sin x$ **(considerando π = 3´14).**

Outro ciclista pretende percorrer todo o circuíto no mesmo tempo, mantendo constante a súa velocidade. ¿Cal debe ser esta? Xustifica xeometricamente o teu cálculo.

¿Que resultado matemático se relaciona con este problema?

O que se pide é unha aplicación do teorema do valor medio que require ser interpretado nos termos físicos do texto, polo demais familiares.

A función é facilmente integrable pero, a pesar de que nos exercicios de cálculo de primitivas son frecuentes funcións trigonométricas bastante máis complicadas, quizais os estudiantes estean pouco afeitos a velas en si mesmas, sen o "paraugas" da integración que as cubra. Isto pode supoñer un elemento de desorientación.

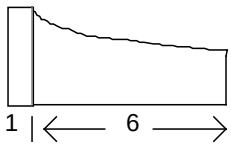
Dado que *f(x)* é a función velocidade:

$$e = \int_0^{9'42} (40 + 10 sen x)dx = \left[40x - 10\cos x\right]_0^{9'42} = 396'8$$

$$v_m = \frac{e}{t} \approx 42'12$$

A xustificación xeométrica que se demanda trata de vincula-la solución anterior, especificamente cinemática, ó problema xeral da cuadratura. Dado que a "velocidade media" é un concepto que ten para os alumnos existencia independente, decidimos indagar na última pregunta se o relacionan ou non co teorema do valor medio.

3.7.- No ribazo dunha estrada quérese construír un muro que evite os derrubamentos de terra. Para iso é necesario facer un encofrado (revestimento) de madeira.



O perfil vén dado pola función $f(x) = 3 + \frac{1}{x^2}$**, para x ≥ 1 expresado en metros. ¿Canta madeira é necesario empregar?**

Trataríase de aplica-la integral definida a unha situación supostamente real.

Aínda que non se nomea expresamente, o enunciado parece insinuar claramente o cálculo dunha área, tendo que determina-la altura da parte rectangular mediante o valor da función no punto *x=1*:

$$1\cdot 4+\int_1^7\left(3+\frac{1}{x^2}\right)dx=3+\left[3x-\frac{1}{x}\right]_1^7\approx 22'85$$

3.8.- Dada a función $f(x)=\frac{x^2}{4}$, calcula:

a) A área do recinto que limita coa recta y = x.

b) O volume xerado ó xirar ese recinto en torno ó eixe OX.

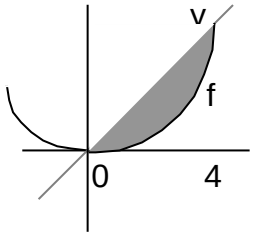
A primeira parte do problema constitúe un exercicio típico de cálculo de áreas, polo que supoñemos que se iría á integración sen máis preámbulos.

O primeiro paso sería entón determina-lo recinto mediante a intersección das dúas funcións, obtendo xa os extremos de integración.

Por tratarse explicitamente dun problema de áreas, esperariamos que se acompañase dunha figura:

$$a)\quad x=\frac{1}{4}x^2 \qquad x=0\vee x=4$$

$$A=A_y-A_f=\int_0^4(x-\frac{1}{4}x^2)dx=\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^3\right|_0^4=\frac{8}{3}$$



O segundo apartado do problema tería un enfoque semellante:

$$b)\quad V=V_y-V_f=\int_0^4(\pi x^2-\pi\frac{1}{16}x^4)dx=\pi\left|\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{80}x^5\right|_0^4=\frac{128\pi}{15}$$

O cálculo do volume de revolución foi un exercicio moi practicado no COU, pero que agora quedou bastante relegado, polo que pode resultar novidoso e quizais moi difícil.

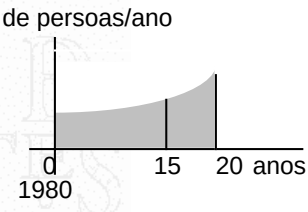
3.9.- A taxa de crecemento da poboación dun país dende o ano 1980 vén dada pola fórmula $f(t) = 0'5.e^{0'01t}$, onde *t* é o tempo en anos transcorrido a partir desa data, e *f(t)* expresa millóns de persoas/ano.

¿Que poboación aproximada podemos esperar para o ano 2000, se en 1995 era de 37´5 millóns de persoas?

De maneira semellante ó 3.3, o problema que se presenta aquí é o de recoñece-la integral definida como a medida, entre dous puntos dados, do incremento dunha magnitude a partir da súa "velocidade", taxa puntual de variación ou estado de cambio.

A representación do problema nos cadros xeométrico e físico pode resultar fructífera:

- A imaxe visual pode suxerir, por similitude cos problemas de espacio-velocidade, que a medida da área sexa tamén a medida do número total de persoas (en millóns).



- As analoxías estructurais cos problemas físicos pode levar a unha elemental simplificación, o que os alumnos seguramente terán practicado como "ecuacións de dimensións", xa dende 2º de BUP:

$$\frac{millóns\ de\ persoas}{ano} \cdot anos = millóns\ de\ persoas$$

Unha cuestión esencial é determina-lo intervalo de tempo no que imos emprega-la taxa de crecemento: do ano 1995 ó 2000, o que rompe un pouco co molde habitual xa que hai outro dato relevante: o ano 1980, que sinala o inicio do período demográfico que se estudia (sitúa o punto 0 de tempo).

Débese ter claro que unha integral definida proporciona un valor entre dous puntos dados, non un valor total. O contexto do problema debería evitar confusións neste aspecto, xa que proporciona unha poboación inicial:

$$37'5 + \int_{15}^{20} 0'5 \cdot e^{0'01t}\,dt = 37'5 + \left[\tfrac{0'5}{0'01} \cdot e^{0'01t}\right]_{15}^{20} \approx 40'478\ millóns$$

Quizais a función que se integra resulte pouco cómoda polos decimais dado que, posiblemente por unha pretensión implícita de abrevia-los cálculos, teñen moi pouca presencia en problemas que non están expresamente dirixidos á súa práctica.

Unha posible confusión sería toma-la función "taxa de crecemento" como a función que proporciona o propio valor da poboación, a pesar de que se faga mención explícita a que aquela expresa poboación/tempo, e non poboación.

Outra posible actuación errónea consistiría en considerar fragmentos de 1 unidade de tempo (a que se menciona neste enunciado é o ano), e calcula-los correspondentes valores de f para 1, 2, 3, 4 e 5 (implicitamente supón calcular unhas taxas de variación media, anualmente constantes), pero non como unha aproximación, senón na convicción de que esa é a resposta correcta.

3.10.- Nun laboratorio estase a facer un cultivo de bacterias nun medio agresivo; estas están reproducíndose aleatoriamente de xeito case continuo.

Experimentalmente estableceuse que a taxa de crecemento nun instante determinado vén dada pola fórmula $f(t) = 200 \cdot e^{0'1t}$, onde *t* é o tempo en días transcorrido dende o inicio do experimento, e *f(t)* expresa bacterias/día.

¿Que poboación aproximada podemos esperar para o décimo día, se ó inicia-lo experimento había 370 bacterias? (Toma *e ≈2´7*).

3.11.- Un automóbil de fórmula-1 queda sen propulsión por rotura do embrague. Estímase que a partir dese intre (*t* = 0) e ata que se para, a súa velocidade v, en m/s, virá dada pola expresión $v = 80 - \frac{5}{100}t^2$.

¿Chegará á meta se no momento da avaría estaba a 2100m dela?

Trátase de aplica-la integración nun contexto físico.

Do mesmo xeito que no problema 3.5, a integral non é a resposta se non que hai que construír unha ecuación na que aquela intervén.

A familiaridade coa velocidade debera insinua-la integral como medio para calcula-lo espacio.

O primeiro paso consistiría en determina-los extremos de integración, e despois avalia-la integral para comparala coa distancia á meta:

$$v = 0 \Rightarrow t = 40$$

$$e = \int_0^{40} (80 - \frac{51}{100} t^2) dt = \left[80t - \frac{5}{300} t^3 \right]_0^{40} = 2133 > 2100$$

3.12.- Nun rallye, un automóbil queda sen propulsión por rotura do embrague, cando leva 1 minuto de vantaxe sobre o seu inmediato perseguidor. Estímase que a partir dese intre (*t* = 0) e ata que se para, a súa velocidade *v*, en m/s, virá dada pola expresión $v = 100 - 2t$ **.**

¿Chegará de primeiro á meta se no momento da avaría estaba a 2500m dela?

É unha versión do problema anterior, no que a incógnita é agora o tempo: un dos límites de integración.

A función velocidade faise linear para evitar unha ecuación de 3º grao, que engadiría outro tipo de dificultade ó problema:

$$e = \int_0^x (100 - 2t) dt = \left[100t - t^2 \right]_0^x = 100x - x^2 = 2500 \quad \rightarrow \quad x = 50s$$

Propiedades e teoremas de integración

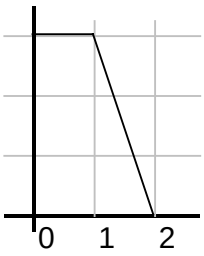
4.1.- Sabendo que $\int_0^t f(x)\, dx = 2^t - 1$ **para todo *t*, ¿de que función f se trata?**

4.2.- Escribe o enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.

Tentamos comprobar se son capaces de reproduci-lo enunciado, e con qué grao de rigor o fan.

Así mesmo poderemos valorar se se refiren a funcións continuas nun intervalo, se indican unicamente que son integrables, ou se non fan mención a estes aspectos.

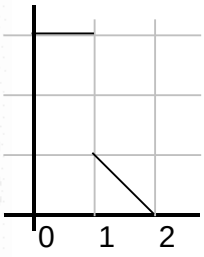
4.3.- Sendo *f* a función do debuxo, definida no intervalo [0, 2].



a) ¿Existe $\int_0^2 f(x)dx$ **? Xustifica a resposta.**

b) ¿Pódese calcula-la área entre a gráfica desa función e o eixo horizontal, nese mesmo intervalo, por fórmulas de figuras coñecidas? ¿Como?

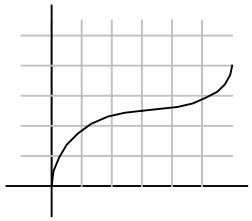
4.4.- Sendo *f* a función do debuxo, definida no intervalo [0, 2].



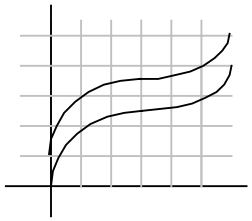
a) ¿Existe $\int_0^2 f(x)dx$ **? Xustifica a resposta.**

b) ¿Pódese calcula-la área entre a gráfica desa función e o eixo horizontal, nese mesmo intervalo, por fórmulas de figuras coñecidas? ¿Como?

4.5.- Na gráfica está representada unha primitiva de *f*. Debuxa outra primitiva de *f*. Xustifica a resposta.



Preténdese unicamente que se faga unha interpretación xeométrica do resultado coñecido e manexado de que as primitivas diferéncianse nunha constante, trasladando a curva verticalmente.



4.6.- Sexan *f, g* dúas funcións positivas, integrables no intervalo [3, 5], moi próximas entre si, de xeito que $|f(x) - g(x)| \leq 0'1 \quad \forall x \in$ **[3, 5].**

Dada a súa complicación, non sabemos cómo achar unha primitiva de *f*, ¿que erro máximo se cometería ó substituír $\int_3^5 f(x)dx$ **por** $\int_3^5 g(x)dx$ **? Xustifica a resposta.**

Preténdese indagar sobre o coñecemento e utilización das propiedades de linearidade e monotonía.

Unha dificultade quizais se presente á hora de relacionar $f-g$ co valor absoluto $|f-g|$, aínda que é posible substituír mecanicamente un polo outro sen que sexa posible percibi-la confusión.

Tamén é posible que non contemplen que un erro pode cometerse nos dous sentidos, polo que é necesario acoutalo en valor absoluto para que a referencia daquel sexa válida. Neste caso a orde de escritura, primeiro f e despois *g*, podería inducir a pensar que unha integral fora maior ca outra, o que non se deduce do enunciado.

Aínda, no caso de ter reflexionado sobre o anterior, cabe unha nova confusión: se $f \le g$ as súas integrais estarían na mesma orde, pero non necesariamente os seus valores absolutos. Resolveríase a cuestión contemplando as dúas situacións por separado, procedemento que é empregado habitualmente no estudio da continuidade, por exemplo, pero non neste tema:

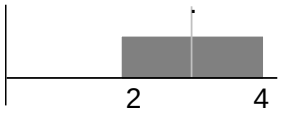
$$\int_3^5 f(x)dx - \int_3^5 g(x)dx = \int_3^5 [f(x)-g(x)]dx \le \int_3^5 |f(x)-g(x)|dx \le \int_3^5 0'1dx = [0'1x]_3^5 = 0'2$$

$$\int_3^5 g(x)dx - \int_3^5 f(x)dx = \int_3^5 [g(x)-f(x)]dx \le \int_3^5 |f(x)-g(x)|dx \le \int_3^5 0'1dx = [0'1x]_3^5 = 0'2$$

4.7.- Representa a función $f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \neq 3 \\ 2 & se\ x = 3 \end{cases}$ **no intervalo [2, 4]. ¿Existe a función área nese intervalo:** $A(x) = \int_2^x f(t)dt$ **? Xustifica a resposta.**

En caso afirmativo indica algunha propiedade importante de A.

Esta función presenta unha descontinuidade nun punto que "queda illado" dos demais, pero o feito de pedir que se represente sitúanos directamente diante da imaxe dun recinto case pechado.



A resposta á primeira pregunta pode vir dada por coñecer xa este tipo de situacións, non presentando este caso ningunha dificultade a maiores.

De non ter tratado funcións con descontinuidades, ou de non recordalas, a dificultade estaría en cómo avalia-la "liña" que falta, entrando de cheo no problema conceptual do infinitesimal, ó que cremos darían respostas diferentes: dende que non afecta, ata que aí non hai área.

Se hai unha boa conceptualización, o cadro xeométrico permitiranos apreciar cómo a área pasa dun lado ó outro do "oco" sen variación perceptible, ou sexa, sen perda de continuidade. (Nin sequera de derivabilidade, aínda que isto xa require unha análise máis detida).

Pola contra, unha resposta á primeira cuestión, baseada no recordo, pero que afirme que A sería descontinua, mostraríanos una conceptualización pobre.

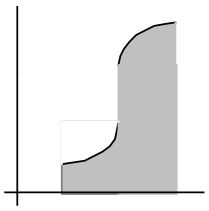
4. 8.- Sexa a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & se\ x \in [1,2) \\ -x^2 + 6x - 4 & se\ x \in [2,3] \end{cases}$ **, definida no intervalo [1, 3].**

¿Existe a función área nese intervalo: $A(x) = \int_2^x f(t)dt$ **? Xustifica a resposta.**

En caso afirmativo indica algunha propiedade importante de A.

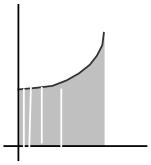
A tesitura que se presenta é conceptualmente distinta da do problema anterior, xa que as rexións son netamente "compactas".

A imaxe debería resultar agora máis familiar: función a anacos típica.



A pregunta, indirecta, acerca da continuidade de A quizais sexa agora máis difícil, xa que o salto vai producir un punto anguloso na función área.

4.9.- ¿ Existe $\int_0^1 f(x)dx$ **sendo** $f(x)=\begin{cases}1 & se\ x=\frac{1}{n},\ n\in \mathrm{N}\\ x^2+2 & se\ x\neq\frac{1}{n},\ n\in \mathrm{N}\end{cases}$ **? Xustifica a resposta.**



A función presenta un conxunto de descontinuidades numerable (polo tanto é Rieman-integrable), coa intención de poder valora-las posibilidades de exploración daqueles alumnos que fosen capaces de comprende-la situación que se presentaba nos problemas anteriores.

4.10.- ¿Pode unha función *f* definida no intervalo [1, 2] ter unha primitiva *H* tal que *H(1)=4, H(2)=5* e ter tamén outra primitiva *G*, tal que *G(1)=2, G(2)=2*? Xustifica a resposta.

Este problema considerámolo como unha aplicación concreta do coñecido resultado de que as primitivas se diferencian nunha constante, resultado que en si mesmo é un exercicio de antiderivación, pero que pode comprobarse rutineiramente:

$$G(1) - H(1) = -2 \qquad G(2) - H(2) = -3$$

Cabe tamén presentalo baixo a perspectiva da regra de Barrow, aínda que isto requeriría maior grao de elaboración:

$$\int_1^2 f(x)dx = H(2) - H(1) = 5 - 4 = 1$$

$$\int_1^2 f(x)dx = G(2) - G(1) = 2 - 2 = 0$$

(As dúas cuestións aparecen habitualmente relacionadas cando se trata de demostra-la regra de Barrow).

4.11.- ¿Cal é a derivada de $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ **para** $x\in[a,b]$**, se a función *f* é continua?**

Trátase dunha lectura diferente do teorema fundamental, aínda que moi directa.

A condición de que a función f sexa continua pode, quizais, parecerlles redundante; xa o feito de definir *F* como unha integral de f, presupón a existencia da dita integral, pero é a continuidade de f o que garante a derivabilidade de *F*.

Tamén é posible que coñezan o enunciado do teorema fundamental referido só a funcións continuas. De tódolos xeitos poderemos observar se a alusión á continuidade interfire ou non coas respostas.

4.12.- Se f é unha función continua nun intervalo [a,b], expresa unha primitiva de f definida en cada punto *x* dese intervalo.

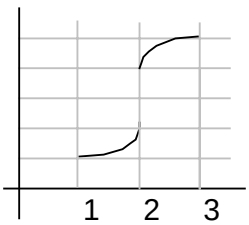
De novo témo-lo teorema fundamental, e indagamos sobre a súa conceptualización dende unha lectura inversa: a integral non se menciona e espérase que sexa o alumno quen recorra a ela.

É necesario garanti-la existencia da integral definida no intervalo e a súa derivabilidade como función, polo que se afirma que a función f é continua.

4.13.- O teorema fundamental do cálculo integral afirma que se f é unha función continua nun intervalo [a, b], a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é unha primitiva de f no dito intervalo.

Sexa *c* un punto entre *a* e *b*, definimos $G(x) = \int_c^x f(t)dt$ $\forall x \in$ [c, b] , ¿que relación ten con *F(x)* ? ¿Que representan ou expresan *F(x)* e *G(x)* ?

4.14.- A gráfica mostra a velocidade dunha partícula en función do tempo.



a) ¿Cal foi a súa velocidade media? Xustifica a resposta.

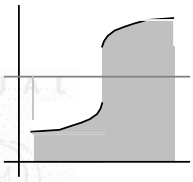
b) ¿Que espacio percorreu no intervalo [1, 3]?

c) Interpreta fisicamente o movemento.

O enunciado do teorema do valor medio considérase aquí estendido a funcións integrables nun intervalo, non necesariamente continuas. De coñecelo así, a probable asociación entre "velocidade media" e "valor medio", podería conducir a unha resposta correcta.

a) A resposta directa a este apartado require traballar coa idea de ordenada media, algo inusual e máis difícil de tratar visualmente. Proporciónase por elo unha gráfica no enunciado da que non se coñecen as fórmulas da función que representa.

b) A pregunta é inequívoca se coñecen, como se espera, a relación "integral" entre a velocidade e o espacio, o cal debera levalos ó cálculo dunha área por adición nos intervalos, cun exercicio visual sinxelo de compensación.

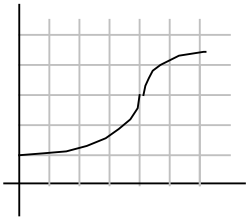


A partir de aí poderían atopa-la resposta correcta ó apartado a), que podería moi ben obterse sen sequera pensar no teorema do valor medio, polas fórmulas usuais en física: $v_m = \frac{e}{t}$.

c) Refírese a idear algún suposto que xustifique a descontinuidade que se observa na gráfica, como, por exemplo, un impacto instantáneo sobre unha partícula en movemento (suposto non só teoricamente accesible para alumnos que cursaron física en 3º de BUP, senón familiarmente representable por experiencias cotiás, como o xogo do billar, por exemplo).

4.15.- Escribe o enunciado do Teorema do Valor Medio do cálculo integral.

¿En que punto alcanza o valor medio a función do debuxo? Xustifica a resposta.



Apéndice 4

Expectativas de profesores

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Expoñemos a continuación, nunha síntese orientativa, o que os catro profesores dos catro grupos da opción de ciencias opinaban sobre cómo os seus propios alumnos se posicionarían fronte ó cuestionario.

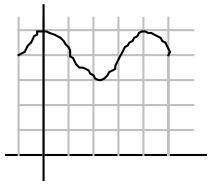
(O recadro sombreado indica unha media das valoracións expresadas polos profesores).

1.1.- Calcula a área comprendida entre a gráfica da curva *f(x) = cos x* e o eixo horizontal no intervalo $[0,\pi]$. Interpreta o resultado graficamente.

CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO: TODOS OU CASE TODOS ..... BASTANTES ..... POUCOS OU NINGÚN ..... ■	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO: TODOS OU CASE TODOS ..... ■ BASTANTES ..... POUCOS OU NINGÚN .....
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO: TODOS OU CASE TODOS ..... ■ BASTANTES ..... POUCOS OU NINGÚN	RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS: TODOS OU CASE TODOS ..... ■ BASTANTES ..... POUCOS OU NINGÚN .....

1.7.- ¿Como calcularías, coa maior aproximación que che sexa posible, a área baixo a curva do debuxo, da que descoñecémo-la fórmula?

Xustifica a resposta e realiza o cálculo que propós.

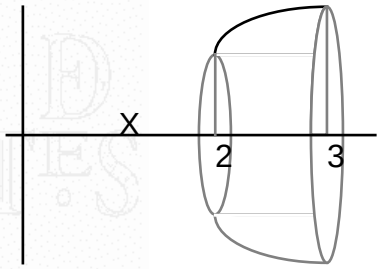


CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO:	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO:
TODOS OU CASE TODOS ..... ☐	TODOS OU CASE TODOS ..... ☐
BASTANTES ..... ■	BASTANTES ..... ■
POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	POUCOS OU NINGÚN ..... ☐
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO:	**RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS:**
TODOS OU CASE TODOS ..... ■	TODOS OU CASE TODOS ..... ☐
BASTANTES ..... ☐	BASTANTES ..... ■
POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	POUCOS OU NINGÚN ..... ☐

1.12.- O corpo da figura obtívose ó xirar en torno ó eixo X o tramo da curva $y = 6x - x^2$ entre os puntos de abscisas 2 e 3.

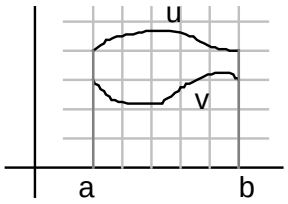
Explica algunha idea sobre cómo nos poderiamos aproximar ó seu volume.

Se podes, calcúlao con exactitude. Xustifica por qué o método que segues para resolvelo é correcto.



CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO:	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO:
TODOS OU CASE TODOS ..... ■	TODOS OU CASE TODOS ..... ☐
BASTANTES ..... ☐	BASTANTES ..... ■
POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	POUCOS OU NINGÚN ..... ☐
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO:	**RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS:**
TODOS OU CASE TODOS ..... ■	TODOS OU CASE TODOS ..... ☐
BASTANTES ..... ☐	BASTANTES ..... ☐
POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	POUCOS OU NINGÚN ..... ■

2.3.- Sexan u,v as funcións da figura adxunta. Se $\int_a^b u \cdot dv = 1$, ¿que valor toma a expresión $\int_a^b v \cdot du$? Xustifícao.



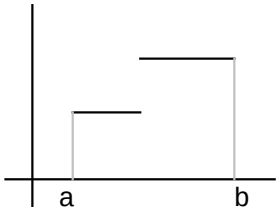
CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO: TODOS OU CASE TODOS ..... ■ BASTANTES ..... □ POUCOS OU NINGÚN ..... □	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO: TODOS OU CASE TODOS ..... □ BASTANTES ..... □ POUCOS OU NINGÚN ..... ■
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO: TODOS OU CASE TODOS ..... □ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... □	RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS: TODOS OU CASE TODOS ..... □ BASTANTES ..... □ POUCOS OU NINGÚN ..... ■

2.8.- Calcula $\int x \cos x \, dx$.

CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO: TODOS OU CASE TODOS ..... □ BASTANTES ..... □ POUCOS OU NINGÚN ..... ■	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO: TODOS OU CASE TODOS ..... ■ BASTANTES ..... □ POUCOS OU NINGÚN ..... □
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO: TODOS OU CASE TODOS ..... ■ BASTANTES ..... □ POUCOS OU NINGÚN ..... □	RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS: TODOS OU CASE TODOS ..... ■ BASTANTES ..... □ POUCOS OU NINGÚN ..... □

2.14.- Debuxa, se existe, unha primitiva da función representada no gráfico, no intervalo [a, b].

Xustifica a resposta que deas.

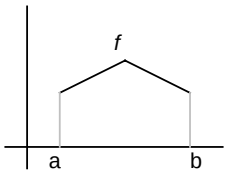


CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO: TODOS OU CASE TODOS ..... □ ■	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO: TODOS OU CASE TODOS ..... □

BASTANTES ..... ☐ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	BASTANTES ..... ☐ POUCOS OU NINGÚN ..... ■
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ☐ POUCOS OU NINGÚN ..... ■

2.15.- Debuxa, se existe, unha primitiva de *f* no intervalo que se sinala no gráfico.

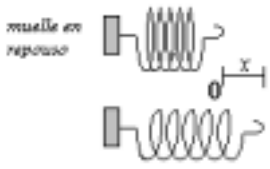
Xustifica a resposta.



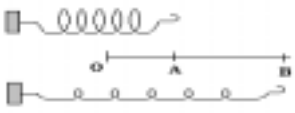
CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ☐ POUCOS OU NINGÚN ..... ■
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ☐ POUCOS OU NINGÚN ..... ■

3.1.- O traballo físico *T* realizado ó desprazar un corpo cunha forza constante *f*, que actúa na dirección do movemento, vén dado pola fórmula $T = f \cdot e$, onde *e* é o espacio percorrido.

Pero a forza *f* que exerce un resorte elástico varía proporcionalmente á estirada *x*. No seguinte exemplo varía segundo a fórmula $f(x) = \frac{1}{3}x$, onde a constante $\frac{1}{3}$ é unha característica do resorte que se utiliza.



¿Como calcularía-lo traballo físico realizado polo resorte se foi estirado dende o punto A situado a 2 cm, ó B, situado a 5 cm?



CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO:	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO:
TODOS OU CASE TODOS ..... ■	TODOS OU CASE TODOS ..... □
BASTANTES ..... □	BASTANTES ..... □
POUCOS OU NINGÚN ..... □	POUCOS OU NINGÚN ..... ■
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO:	**RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS:**
TODOS OU CASE TODOS ..... □	TODOS OU CASE TODOS ..... □
BASTANTES ..... ■	BASTANTES ..... □
POUCOS OU NINGÚN ..... □	POUCOS OU NINGÚN ..... ■

3.2.- (Recorda que a velocidade é a derivada do espacio respecto do tempo). Un ciclista desprázase a unha velocidade v(t) = 20 - 10t .

Calcula $\int_0^4 v(t)\,dt$. Describe brevemente e xustifica cómo foi o percorrido do ciclista.

CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO:	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO:
TODOS OU CASE TODOS ..... □	TODOS OU CASE TODOS ..... ■
BASTANTES ..... □	BASTANTES ..... □
POUCOS OU NINGÚN ..... ■	POUCOS OU NINGÚN ..... □
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO:	**RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS:**
TODOS OU CASE TODOS ..... ■	TODOS OU CASE TODOS ..... □
BASTANTES ..... □	BASTANTES ..... ■
POUCOS OU NINGÚN ..... □	POUCOS OU NINGÚN ..... □

3.10.- Nun laboratorio estase a facer un cultivo de bacterias nun medio agresivo; estas están reproducíndose aleatoriamente de xeito case continuo.

Experimentalmente estableceuse que a taxa de crecemento nun instante determinado vén dada pola fórmula $f(t) = 200 \cdot e^{0'1t}$, onde t é o tempo en días transcorrido dende o inicio do experimento, e *f(t)* expresa bacterias/día.

¿Que poboación aproximada podemos esperar para o décimo día, se ó inicia-lo experimento había 370 bacterias? (Toma $e \approx 2'7$).

CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO:	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO:
TODOS OU CASE TODOS ..... ■	TODOS OU CASE TODOS ..... □
BASTANTES ..... □	BASTANTES ..... □
POUCOS OU NINGÚN ..... □	POUCOS OU NINGÚN ..... ■
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO:	**RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS:**

■ □ □ ■

TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... POUCOS OU NINGÚN	TODOS OU CASE TODOS ..... BASTANTES ..... ☐ POUCOS OU NINGÚN .....

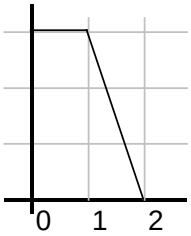
4.1.- Sabendo que para calquera t, $\int_0^t f(x)\,dx = 2^t - 1$, ¿de que función f se trata?

CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐

4.3.- Sendo f a función do debuxo, definida no intervalo [0, 2].

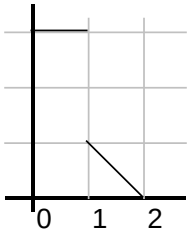
a) ¿Existe $\int_0^2 f(x)dx$? Xustifica a resposta.

b) ¿Pódese calcula-la área entre a gráfica desa función e o eixo horizontal, nese mesmo intervalo, por fórmulas de figuras coñecidas? ¿Como?



CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO: TODOS OU CASE TODOS ..... ■ BASTANTES ..... ☐ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐

4.4.- Sendo f a función do debuxo, definida no intervalo [0, 2].



a) ¿Existe $\int_0^2 f(x)dx$? Xustifica a resposta.

b) ¿Pódese calcula-la área entre a gráfica desa función e o eixo horizontal, nese mesmo intervalo, por fórmulas de figuras coñecidas? ¿Como?

CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO:	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO:
TODOS OU CASE TODOS ..... ☐	TODOS OU CASE TODOS ..... ☐
BASTANTES ..... ■	BASTANTES ..... ■
POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	POUCOS OU NINGÚN ..... ☐
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO:	RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS:
TODOS OU CASE TODOS ..... ■	TODOS OU CASE TODOS ..... ☐
BASTANTES ..... ☐	BASTANTES ..... ■
POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	POUCOS OU NINGÚN ..... ☐

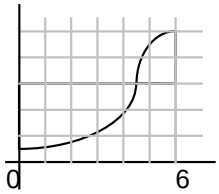
4.13.- O teorema fundamental do cálculo integral afirma que se f é unha función continua nun intervalo [a, b], a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é unha primitiva de f no dito intervalo.

Sexa c un punto entre *a* e *b*, definimos $G(x) = \int_c^x f(t)dt$ para tódolos *x* de [c,b], ¿que relación ten con *F(x)* ? ¿Que representan ou expresan *F(x)* e *G(x)*?

CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO:	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO:
TODOS OU CASE TODOS ..... ☐	TODOS OU CASE TODOS ..... ☐
BASTANTES ..... ■	BASTANTES ..... ■
POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	POUCOS OU NINGÚN ..... ☐
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO:	RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS:
TODOS OU CASE TODOS ..... ☐	TODOS OU CASE TODOS ..... ☐
BASTANTES ..... ■	BASTANTES ..... ■
POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	POUCOS OU NINGÚN ..... ☐

4.15.- Escribe o enunciado do Teorema do Valor Medio do Cálculo Integral.

Sinala aproximadamente o punto do intervalo [0, 6] ó que alude o teorema. Xustifica a resposta.



CONSIDERARÍAN O PROBLEMA COMO NOVO: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ☐ POUCOS OU NINGÚN ..... ■	SABERÍAN CÓMO AFRONTALO: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐
ENTENDERÍAN O ENUNCIADO: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐	RECORDARÍAN OS CONCEPTOS E AS FÓRMULAS: TODOS OU CASE TODOS ..... ☐ BASTANTES ..... ■ POUCOS OU NINGÚN ..... ☐

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Apéndice 5

Percepcións de alumnos

BIBLIOTECA VIRTUAL

Indagamos tamén, por medio dun pequeño cuestionario, acerca de cómo os propios estudiantes percibían o tema da integración dentro do conxunto das súas vivencias formativas. Preguntabamos a 34 alumnos de COU da opción de ciencias, 25 de 2º de bacharelato (ciencias) e 27 de 2º de bacharelato da opcións de sociais.

As dúas últimas cuestións presentábanselles xuntas, nun mesmo parágrafo, e pedíaselles unha breve explicación sobre as súas opinións:

> "¿Cres que resultaría máis interesante que as disciplinas (materias) tivesen maior relación entre si? Neste caso, ¿cres que serían máis difíciles ó ter que conxugar diferentes puntos de vista? Explícate brevemente."

A razón de facelo así, advertindo sobre un hipotético aumento da dificultade, foi o pensar que, conscientes da excesiva parcelación que se dá entre as áreas do curriculum, se unicamente presentabámo-la primeira pregunta podiamos inducir ós alumnos a unha resposta "reivindicativa" cara a unha maior interrelación entre elas. A segunda pregunta poñía un posible contrapunto que, en todo caso, obrigaría a dar unha resposta máis reflexiva.

Expoñemos a continuación os resultados (% redondeadas).

Respecto desta parte das matemáticas que chamamos Cálculo Integral:

1.- ¿Resultouche amena e interesante?

	C.O.U. (Ciencias)	2º Bacharelato (Ciencias)	2º Bacharelato (Sociais)	Total Ciencias	TOTAL
MOITO	12 %	16 %	11 %	14 %	13 %
NORMAL	59 %	60 %	44 %	59 %	55 %
POUCO	29 %	24 %	44 %	27 %	33 %
Non responden	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

2.- ¿Cres que che será útil en estudios futuros?

	C.O.U. (Ciencias)	2º Bacharelato (Ciencias)	2º Bacharelato (Sociais)	Total Ciencias	TOTAL
MOITO	35 %	32 %	7 %	34 %	26 %
NORMAL	44 %	52 %	52 %	47 %	49 %
POUCO	21 %	12 %	41 %	17 %	24 %
Non responden	0 %	4 %	0 %	2 %	1 %

3.- ¿Atópaslle relación con outras disciplinas?

	C.O.U. (Ciencias)	2º Bacharelato (Ciencias)	2º Bacharelato (Sociais)	Total Ciencias	TOTAL
MOITO	32 %	36 %	4 %	34 %	24 %
NORMAL	38 %	44 %	30 %	41 %	37 %
POUCO	18 %	20 %	59 %	19 %	31 %

Non responden	12 %	0 %	7 %	7%	7 %

4.- ¿O traballo nunha disciplina váleche para as outras?

	C.O.U. (Ciencias)	2º Bacharelato (Ciencias)	2º Bacharelato (Sociais)	Total Ciencias	TOTAL
MOITO	38 %	24 %	19 %	32 %	28 %
NORMAL	47 %	52 %	30 %	49 %	43 %
POUCO	9 %	16 %	22 %	12 %	15 %
Non responden	6 %	8 %	30 %	7 %	14 %

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

5.- ¿Cres que resultaría máis interesante se as disciplinas disciplinas (materias) tivesen maior relación entre si?

	C.O.U. (Ciencias)	2º Bacharelato (Ciencias)	2º Bacharelato (Sociais)	Total Ciencias	TOTAL
MÁIS INTER.	76 %	56 %	59 %	68 %	65 %
MENOS INT.	12 %	12 %	22 %	12 %	15 %
Non responden	12 %	32 %	19 %	20 %	20 %

6.- ¿Cres que serían máis difíciles ó ter que conxugar diferentes puntos de vista?

	C.O.U. (Ciencias)	2º Bacharelato (Ciencias)	2º Bacharelato (Sociais)	Total Ciencias	TOTAL
MÁIS DIFÍCIL	3 %	28 %	7 %	14 %	12 %
MÁIS FÁCIL	82 %	56 %	52 %	71 %	65 %
Non responden	15 %	16 %	41 %	15 %	23 %

Os comentarios ás preguntas nº 5 e nº 6 eran moitas veces redundantes nunha respecto da outra. Non apreciamos diferencias debidas ó grupo ó que correspondían os estudiantes, aínda que si unha tónica abstencionista preocupante. Poden resumirse como segue:

- Os que opinan que lles resultaría máis interesante declaran que poderán aprecia-la utilidade das matemáticas ó ver como se aplicaban nas outras materias e, engadían, en máis da metade dos casos, que tamén se adquiriría unha visión máis completa das cousas e non tan parcelada como lles sucede agora.
- Respecto dos que opinaban que, polo contrario, que lles resultaría menos interesante, indicaban que se perderían os aspectos propios de cada disciplina, que son (os máis) importantes.
- A gran maioría do primeiro colectivo, pero non todos, e unha parte pequena do segundo, crían que serían máis fáciles de estudiar, xa que o que se aprende nunha materia daba ideas ou bases para outras.
- Pola contra, os que crían que serían máis difíciles temían que esa necesidade de relacionalas lles esixira unha comprensión máis profunda da que estaban en condicións de adquirir.

Apéndice 6

Dúas experiencias de enxeñería didáctica

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Mostramos a seguir dúas experiencias de introducción ó cálculo integral realizadas seguindo adaptacións específicas das "liñas xerais" expostas no capítulo 7.

i) A primeira delas corresponde a un grupo-clase de 27 alumnos de 3º de BUP da opción de *ciencias* do I.E.S. "Ramón Aller", de Lalín.

ii) A segunda levouse a cabo nun grupo-clase de 31 alumnos de 2º curso de bacharelato da opción de *sociais* do I.E.S. do Sar, de Santiago.

6.1.- Experiencia en 3º de BUP

Comézase coa obtención da fórmula da superficie esférica, traballando baixo a dirección da profesora (fichas 5A, 5B), para continuar de forma autónoma, en pequenos grupos de tres persoas, determinando a fórmula da área do círculo (ficha 5C), que todos

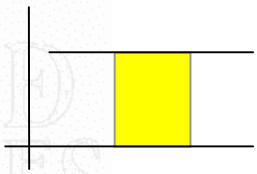
realizaron con éxito (soamente un dos grupos precisou de indicacións) e nalgúns casos explicitando netamente e xustificando o proceso seguido (ficha 5D).

Unha vez rematado o tema sen ter feita alusión ningunha ós problemas de velocidade, no correspondente exame propónselle-lo seguinte problema:

"a) Un móbil desprázase con velocidade constante $v = 25\ m/s$. Fai unha representación gráfica da velocidade en función do tempo. ¿Cal é o espacio percorrido entre os instantes $t = 4s$ e $t = 7s$?

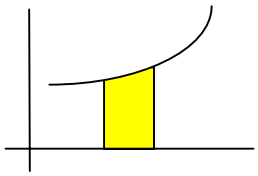
b) Un móbil desprázase con velocidade que varía co tempo segundo a función: $v(t) = t^2 + 4$. ¿Que espacio percorre entre os instantes $t = 3$ e $t = 5$ segundos?"

- No apartado a) todos aplican a fórmula $e = v \cdot t$ sen dificultade; pero o relevante para nós é que a maioría non soamente representa a función velocidade e calcula o espacio, senón que *motu propio* indica este como a área baixo a gráfica no intervalo.

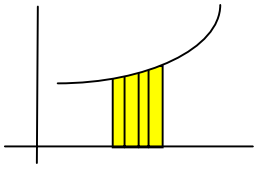


- En varios casos, o recinto móstrase dividido en unidades.

- Máis dun tercio dos alumnos[1] estenden este procedemento ó apartado b), representando agora a función velocidade sen que se llelo demande no enunciado, e identificando o espacio coa área baixo a curva (paso ó cadro xeométrico), e resolven por integrais.



- A metade destes incluso xustifican a integración aludindo á división en finos rectángulos.

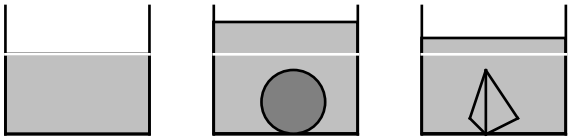


[1] Outros, sen embargo, empregaron erroneamente a fórmula estudiada en Física do movemento uniformemente acelerado, probablemente ó ver "un cadrado no t do tempo", o que efectivamente se corresponde, pero cando se expresa o espacio; perdéndose así a oportunidade de relacionalo coa integración.

Aínda que non é obxecto desta investigación, pode que o historiador Boyer (1992) atope aquí unha resposta á pregunta de cómo Nicolás de Oresme, alá polo século XIV, chegou a admitir como idea xeral que a área coincide coa distancia: quizais por extensión do resultado evidente cando se trata dun movemento uniforme, quizais porque manexou aproximacións por rectángulos.

FICHA 5 A - PROBLEMA ALUMNO/A:

Un procedemento moi antigo para calcular volumes consistía na inmersión en auga dos obxectos:

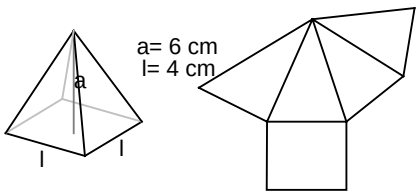


$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ $V = \frac{1}{3}B \cdot a$

O volume da auga desprazada coincide en cada caso co volume do corpo.

As fórmulas anteriores, que tamén se deduciron teoricamente, poderían obterse experimentalmente realizando varias probas para cada caso e vendo como variaba o volume segundo as dimensións da esfera (raio) e da pirámide (base e altura).

Pero non ía resultar tan fácil o cálculo das superficies, pois malia que unha pirámide podemos desenvolvela sen dificultade no plano, o caso da esfera preséntase máis confuso.



(Calcula ó dorso a superficie da pirámide).

Unha estratexia que podemos seguir é a de imaxinar que a esfera podería formarse unindo pirámides moi pequenas, todas iguais entre si.

Para que isto tivera sentido as pirámides deberan ser moi, pero que moi, estreitas, case variñas, pero con volume: así a súa *mini* base poderiámola considerar como un cadrado, e a súa altura sería practicamente o raio da esfera.

Chamaremos *dV* a ese volume pequeniño da pirámide imaxinaria, *dB* á súa tamén pequeniña base. A altura, en cambio, segue a se-la mesma, *r*. Segundo a fórmula do volume dunha pirámide teriamos:

$$dV = \quad .....$$

$$V_{esfera} = S_{uma}\ dV = \quad .....$$

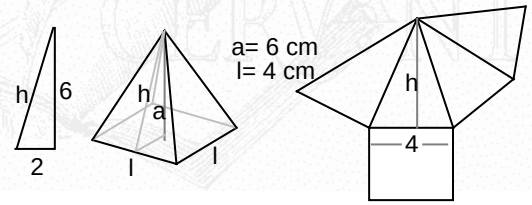
Substituíndo o volume da esfera pola fórmula xa coñecida, e despexando a superficie da esfera na igualdade:

$$\tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \tfrac{1}{3} r \cdot S_{uperficie\ da\ esfera}\ , \quad \text{obteremos:} \quad S_{uperficie\ da\ esfera} = ...$$

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

FICHA 5 B - RESPOSTAS

Superficie da pirámide:



$$h = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} \quad ; \quad S = 4Tr. + 1Cua. = 4 \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{40}}{2} + 4^2 = 16(1 + \sqrt{10})$$

Chamando *dV* a ese volume pequeniño da pirámide imaxinaria, *dB* á súa tamén pequeniña base. A altura, en cambio, segue a se-la mesma, *r*. Segundo a fórmula do volume dunha pirámide teriamos:

$$dV = \tfrac{1}{3} dB \cdot r$$

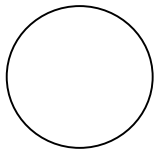
$$V_{esfera} = S_{uma} dV = \quad dV = \quad \tfrac{1}{3} dB \cdot r = \tfrac{1}{3} r \cdot \quad dB = \tfrac{1}{3} r \cdot S_{uperficie\ da\ esfera}$$

Substituíndo o volume da esfera pola fórmula $V = \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3$, e despexando na igualdade:

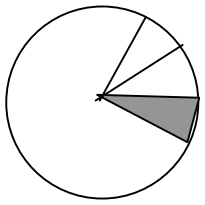
$$\tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \tfrac{1}{3} r \cdot S_{uperficie\ da\ esfera}\ , \quad \text{obteremos:} \quad S_{uperficie\ da\ esfera} = 4\pi \cdot r^2$$

FICHA 5 C - PROBLEMA ALUMNOS/AS:

Utilizando o procedemento anterior, deduci-la área dun círculo coñecendo que o seu perímetro (circunferencia) ten de lonxitude 2πr.



FICHA 5 D – RESPOSTAS (Reproducimos literalmente o entregado por un dos grupos).



$h = r$

$b = db$

$L_{círc.} = 2\pi r$

$Sup._{trian.} \frac{db \cdot r}{2}$

i) Descompoñémo-lo círculo en triángulos infinitesimais.

ii) Cando as bases sexan moi pequenas, cubriremos con elas a circunferencia.

iii) A altura de cada triángulo será practicamente o raio do círculo.

iv) Sumamos tódolos triángulos :

$$Sup._{circ.} = S_{uma} \frac{db \cdot r}{2} = \quad \frac{db \cdot r}{2} = \frac{1}{2} r \cdot \quad db = \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r = \pi r^2$$

6.2.- Experiencia en 2º de bacharelato

Para comprender mellor o carácter da adaptación realizada neste curso, así como dos resultados obtidos, é conveniente ter unha referencia do nivel de competencia matemática dos alumnos, o cal pode esclarecerse a partir dos resultados dunha proba de avaliación inicial:

- Menos dun cuarto dos estudiantes deste grupo souberon expresa-lo lado dun cadrado en función da área.

- Fronte á función polinómica de 2º grao $f(x) = x^2 - 4x + 6$, soamente dous tercios a identificaban como "parábola", pero non chegou a un tercio a parte do alumnado que para representala intentou identifica-lo vértice.
- Soamente dous estudiantes do grupo representaron correctamente a hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$; os demais facían unha táboa de valores calquera, sinalaban os puntos e uníanos cun trazo.
- Algo máis da metade obtiveron correctamente a derivada da función $f(x) = \ln(3x^2 + 1)$.
- Case as tres cuartas partes calcularon o límite no infinito de $\frac{x}{x-4}$, resolvendo correctamente a indeterminación.

Ó ir comentando os exercicios observamos bastante facilidade para recupera-las técnicas de derivación e de cálculo de límites, pero maior dificultade para admitir, por exemplo, que $f(x) = +\sqrt{x}$ podía representar o lado do cadrado en función da área -considerando daquela que sería $f(x) = +\sqrt{x^2}$ -, e gran resistencia a troca-la actitude de "debuxar puntos" pola de representar funcións: comezando por identifica-los elementos relevantes (vértice nun caso e descontinuidade no outro), ou realizando a exploración da función $f(x) = \frac{x}{x-4}$ en torno ó punto $x=4$, unha vez advertidos que a función non existía nel, non recorrendo sequera a procedementos tan elementais como unha táboa de valores próximos.

Comézase cunha actividade de antiderivación (ficha 3A). Ó primeiro non se propoñen solucións ningunhas ata que, pasados uns minutos, un alumno resolve e explica a polinómica. A partir dese momento sucédense rapidamente as respostas, chegándose incluso a resolve-la correspondente ó *arctan*, función para eles descoñecida que intencionadamente se facía figurar na táboa. Neste contexto introducimos significativamente o termo "primitiva".

Continúase cun problema "de enunciado", na liña dos que son habituais nesta materia de bacharelato, que pretende recrear nun contexto familiar ós alumnos o proceso analítico inherente á integración (ficha 3B).

- Preséntase intencionadamente unha parte que permite obte-lo valor íntegro mediante un rectángulo, xunto con outra na que iso non é posible, incitando a obter aproximacións.
    - As primeiras delas responden a subintervalos unitarios, e son melloradas considerando anacos que se identifican cos puntos onde a gráfica corta a trama, o que, aínda que supón un avance inicial, acaba por se converter nun lastre para concibi-la posibilidade de mellorar indefinidamente as aproximacións.
- O paso ó cadro xeométrico, lonxe de ser natural, resultou moi custoso a pesar de que no primeiro anaco literalmente multiplicaban "base" por "altura": ningún alumno achegou a resposta ata que o profesor interveu preguntando se recordaban algunha situación escolar na que algunha figura se relacionase co producto de dous factores.
- Finalmente intentábase relaciona-lo prezo coa derivada dos ingresos respecto do número de unidades vendidas: a pregunta foi respondida sen dificultade pola maioría, pero ningún o relacionou coa derivada a pesar de ter definida esta, no curso anterior, como a taxa de variación.

Seguimos cunha pequena incursión no campo fenomenolóxico da integración, con dúas actividades referidas ó crecemento de poboacións e á velocidade, respectivamente, que intentamos deixen translucir sen dificultade o paralelismo que gardan coas anteriores (incluíndo nestas o problema da área). Resultaron moi motivadoras e claras, resolvéndose con éxito xeneralizado.

- O feito de da-lo dato actual da poboación da India, contradicindo as previsións, fortalece a comprensión do carácter local do estado de variación.

Rematamos nun estadio aínda pre-formal, establecendo as conclusións e presentando un horizonte emerxente sobre o que se volverí unha vez se realizase un estudio máis fondo das funcións (ficha 3D).

FICHA 3A ALUMNO/A PROBLEMA

En primeiro lugar repasa a táboa de derivadas[2]:

$x^n \overset{'}{\longrightarrow} n \cdot x^{n-1}$	$f(x)^n \overset{'}{\longrightarrow} n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$\ln\lvert x\rvert \overset{'}{\longrightarrow} \frac{1}{x}$	$\ln\lvert f(x)\rvert \overset{'}{\longrightarrow} \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
$e^x \overset{'}{\longrightarrow} e^x$	$e^{f(x)} \overset{'}{\longrightarrow} e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$\sin x \overset{'}{\longrightarrow} \cos x$	$\sin f(x) \overset{'}{\longrightarrow} \cos f(x) \cdot f'(x)$
$\cos x \overset{'}{\longrightarrow} -\sin x$	$\cos f(x) \overset{'}{\longrightarrow} -\sin f(x) \cdot f'(x)$
$\tan x \overset{'}{\longrightarrow} \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan f(x) \overset{'}{\longrightarrow} \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$\cot x \overset{'}{\longrightarrow} \frac{1}{\sin^2 x}$	$\cot f(x) \overset{'}{\longrightarrow} \frac{1}{\sin^2 f(x)} \cdot f'(x)$
$\arctan x \overset{'}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x^2}$	$\arctan f(x) \overset{'}{\longrightarrow} \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$
$\arcsin x \overset{'}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin f(x) \overset{'}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$

Dúas propiedades importantes de derivación resultarannos moi útiles:

$$a \cdot f(x) \overset{'}{\longrightarrow} a \cdot f(x)' \qquad f(x)+g(x) \overset{'}{\longrightarrow} f(x)'+g'(x)$$

A primeira indícanos que podemos multiplicar (ou dividir) a conveniencia unha función por un número, e este seguirá multiplicando (ou dividindo) á súa derivada.

A segunda, que se podemos expresar unha función como suma (ou resta) doutras, abonda con derivar cada parte por separado.

Despois de derivar unhas funcións obtivemos, respectivamente:

a) $3x^2 - 4x$ b) $-\cos x$ c) $\frac{2x-1}{x^2-x}$

d) $6x(x^2+1)^2$ e) $x \cdot e^{x^2}$ f) $\frac{-5}{x^2+1}$

¿De que función se trataba en cada caso?

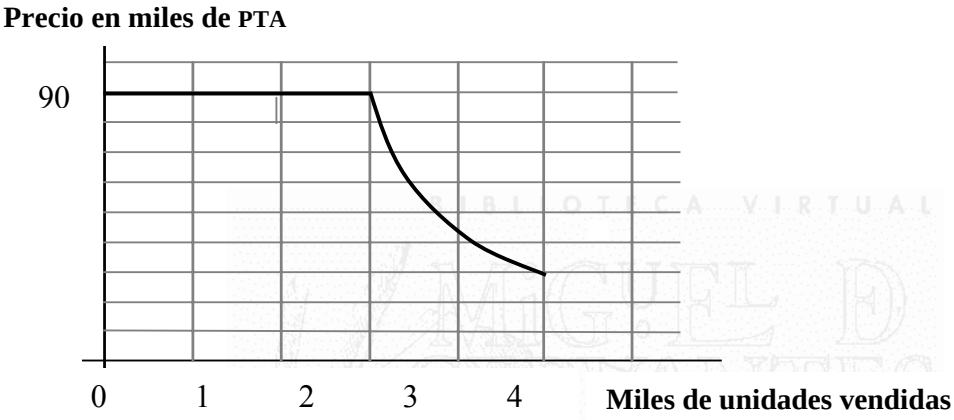
[2] Recorda que se deben excluí-los casos nos que a función dada ou a súa primitiva non estean definidas: ceros no denominador, negativos en raíces e logaritmos, nestes o 0, ...

FICHA 3B PROBLEMA ALUMNO/A

Unha compañía saca á venda 5000 teléfonos móbiles de 3ª xeración, nunha operación comercial pioneira en España.

Inicialmente estipula un prezo de venda de 90 000 PTA/unidade, pero cando leva vendidos 3000 aparellos unha segunda compañía irrompe no mercado, entrando ámbalas dúas nunha competencia que os obriga a baixar continuamente os prezos.

Na seguinte gráfica recollémo-lo sucedido:



A pregunta principal é:

1.- ¿Canto ingresou en total?

Unha reflexión que nos pode ser útil:

2.- ¿Canto gañou nos primeiros 3 mil teléfonos vendidos?

Se non podemos dar a resposta exacta, intentemos unha aproximación:

3.- ¿Canto ingresou aproximadamente?

4.- ¿Poderías mellora-la túa aproximación? Fai as contas.

5.- ¿Poderías volver mellorala? Non o fagas, pero explícao.

Debuxar axúdanos a pensar:

6.- ¿Como poderiamos reflectir no debuxo os ingresos obtidos?

Relacionando:

7.- Vendendo uns poucos teléfonos, ¿cando aumentan máis os ingresos?

FICHA 3C PROBLEMA ALUMNO/A

1.- A finais de 1950 a India tiña uns 500 millóns de habitantes. Durante ese ano a poboación aumentou nuns 6 millóns. De manterse esa taxa anual de crecemento (6 millóns persoas/ano), ¿que poboación tería a finais do ano 2000?

Unha taxa de crecemento elevada, ¿de que nos advirte?

2.- Ía de Ferrol a O Porto pola autoestrada e fixeime en que ó pasar baixo o Estadio de San Lázaro (Santiago), o velocímetro marcaba 120 km/h. De manterse esa velocidade, ¿canto percorrería nas 2´5 horas seguintes?

¿Que pode supoñer para un automobilista ir a esa velocidade durante os próximos minutos, respecto doutro que vaia a 100 km/h?

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

FICHA 3D LECTURA

Hai cálculos que resultan moi sinxelos cando un factor se mantén constante: un simple producto dáno-la solución. (O mesmo sucedía no problema dos teléfonos móbiles: se o prezo era fixo, abondaba con multiplicar polo número de aparellos vendidos para obter os ingresos).

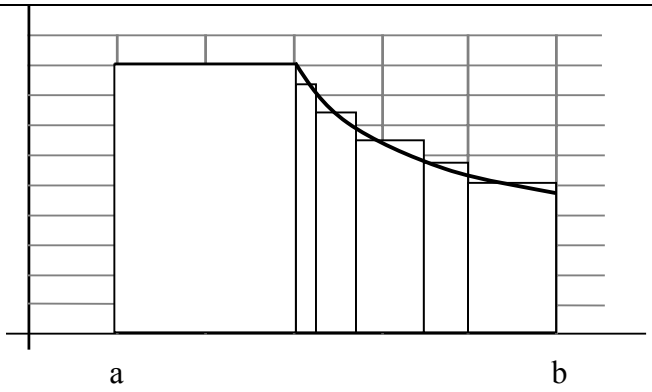
Pero se ese factor varía continuamente a cousa complícase:

- A competencia fai varia-lo prezo dos teléfonos móbiles.
- A taxa de crecemento da poboación da India aumentou de forma natural, de maneira que a data de hoxe xa se superaron os 1000 millóns de habitantes.
- Nunha viaxe hai múltiples circunstancias que nos fan alterar a velocidade.
- A altura dun recinto plano cambia se este non é rectangular.

Daquela, o que podo facer é considerar *pequenos tramos* e *supoñer* constante ese factor en cada tramo (o prezo, a taxa de crecemento da poboación, a velocidade, a altura ...), co que consigo unha aproximación.

A aproximación podo mellorala facendo os tramos cada vez máis pequenos.

Estes problemas *pódense debuxar*, pois os cálculos realizados correspóndense coas áreas delimitadas polas gráficas. *Isto axúdanos a pensar*.



A posibilidade de expresar mediante funcións os procesos que estamos estudiando abre un novo horizonte:

- A taxa de crecemento é unha derivada da función "poboación".
- A velocidade é unha derivada da función "espacio".
- O prezo é unha derivada da función "ingresos".
- A altura é unha derivada da función "área".

Dende esta perspectiva, os nosos problemas, e todos aqueles que respondan á mesma estructura, pasarían por atopar funcións primitivas.

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES

Bibliografia

ALESANDROV, A.; KOLGOMOROV, A.N.; LAURENTIEV, M.A. et al. (1979): *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid. Alianza Universidad.

ANDERSEN, K. (1984): Las técnicas del cálculo, 1630-1660. En Grattan-Guinnes (ed.). Capítulo 1. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*. Madrid. Alianza Universidad.

APOSTOL, T. (1984): *Calculus*. Barcelona. Reverté.

ARSAC, G. (1989): Le rôle du professeur: aspects pratiques et théoriques, reproductibilité. *Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématiques et de l´informatique. Thèse d´Etat*. Université Paris VII. (Citado por Artigue).

ARTIGUE, M. (1989): *Procedures différentielles en mathématiques et en physique au niveau du primer cycle de l'enseignement supérieur*. Rapport de recherche. IREM. Universidad de París VII.

ARTIGUE, M. (1990a): Epistemologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10 (2-3), (pp. 241-283).

ARTIGUE, M. (1990b): Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 9 (3), (pp. 241-283).

ARTIGUE, M. (1991): Analysis. En Tall, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Capítulo 11. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers. (pp. 167-198).

ARTIGUE, M. (1995): La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M, Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (eds.) *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. México. Grupo Editorial Iberoamericano. (pp. 98-140).

ARTIGUE, M. e SZWED, T. (1983): *Représentatios graphiques*. Paris Sud. IREM.

ARTIGUE, M., e VIENNOT, L. (1987). Students' conceptions and difficulties about differentials. *Proceedings of the 2nd International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, III*,1-7. Cornell.

AUDREY, J. (1989): *Finding out: conducting and evaluating research*. Belmont. Ca. Wadswoth Publishing Company.

AZCÁRATE, C. (1990): *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tese doutoral. Barcelona. Universidad Autónoma.

AZCÁRATE, C. (1995). *Acerca del Pensamiento Matemático Avanzado*. Univ. Autónoma de Barcelona. Dpto. Didáctica de la Matemática.

AZCÁRATE, C. e DEULOFEU, J. (1990): *Funciones y gráficas*. Madrid. Síntesis.

AZCARATE, C. et al. (1996): *Cálculo diferencial e integral*. Madrid. Síntesis.

AZCÁRATE, C.; CASADEVALL, M.; CASELLAS, E. e BOSCH, D. (1996): *Cálculo Diferencial e Integral*. Madrid. Síntesis.

BACHELARD, G. (1975): *La formation de l'esprit scientifique*. París. De Vrin. Versión castellana (1985): *La formación del espíritu científico*. México. Siglo XXI.

BALACHEFF, N. (1990): Towards a "problématique" for reseach on mathematics teaching, *Journal for Reseach in Mathematics Education*. 21 (4), (pp. 259-272). (Citado por Cajaraville).

BARTLE, R., DONALD, R. e SHERBER,T. (1992): *Introducción al análisis matemático de una variable*. México. Limusa.

BOS, H.J.M. (1984): Newton, Leibniz y la tradición leibniziana. En Grattan-Guinnes (ed.). Capítulo 2. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*. Madrid. Alianza Universidad.

BOYER, C. (1986): *Historia de la Matemática*. Madrid. Alianza Editorial.

BRADLEY, G.L. e SMITH, K.J. (1997): *Cálculo de una variable*, 2 (1). Madrid. Prentice Hall.

BROUSSEAU, G. (1983): Les obstacles epistemologiques et les problémes en Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 4 (2), (pp. 165-198).

BROUSSEAU, G. (1986): *Théorisation des phénomènes d'enseignement des Mathématiques.* Tese de estado. Université de Bordeaux Y.

BROUSSEAU, G. (1989): Utilité et intérèt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit X*. 21, (pp. 47-68).

BROUSSEAU, G. (1990): Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*. 9 (3), (pp. 309-336).

BROUSSEAU, G. (1991): *La mesure en Cours Moyen, 1ère année*. Burdeos. IREM de Burdeos.

BROUSSEAU, G. (1998): *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage. Grenoble.

BROWNELL, W. (1935): Psychological considerations in the learding and teaching of arithmetic, en *The teaching of arithmetic: tent yearbook of de National Council of Teachers of Mathematics*. Nova Iorque, Columbia University press. (Citado por Mayer).

BRUNER, J. (1956): A study of thinking. Mova Iorque. Wiley. Traducción ó castelán (1978): *El proceso mental en el aprendizaje*. Madrid. Narcea.

CAJARAVILLE, J. (1996): *Evalución del significado del cálculo diferencial para estudiantes preuniversitarios. Su evolución como consecuencia de una ingeniería didáctica alternativa*. Tese doutoral. Universidade de Santiago.

CAVANAGH, M. (1997): *Students' understandings in differential calculus.* Unpublished essay through correspondence with M. Thomas. University of Auckland: New Zealand.

CENTENO, J. (1988): *Números decimales ¿Por qué?, ¿Para qué?*. Madríd. Síntesis.

CHEVALLARD, Y. (1985): *La transpositión didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble. La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1989): Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. IREM d'Aix Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1991): Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l´áctivité nathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. IREM d'Aix Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1997): Concepts foundamentaux de la Didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12 (1), (pp. 73-112).

CHEVALLARD, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathematiques*. 19 (2) (pp. 221-2669.

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M. e GASCÓN, J. (1997*)*: *Estudiar Matemáticas: el eslabón perdido entre Enseñanza y Aprendizaje*. Barcelona. ICE-Horsori Editorial.

CORNU, B. (1982): Quelques obstacles à l'apprentissage de la notion de limite. *Séminaire de Didactique et Pédagogie des Mathématiques. Grenoble.* 34. p. 230-268.

CORNU, B. (1983): *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Thèse de 3ème Cycle. Université de Grenoble.

CORNU, B. (1989): Recherche sur l'enseignement et formation des enseignants. En Laborde, C. (ed.). *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand des Mathématiques et l'Informatique*. Grenoble. La Pensée Sauvage. (pp. 297-306).

CORNU, B: (1991). Limits. En Tall, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking. Cap. 10*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers. (pp. 153-166).

COURANT, R. e ROBBINS, H. (1941): *What is Mathematics*?. London. Oxford University Press. Versión castellana (1979): *¿Qué es la Matemática?*. Madrid. Aguilar

DANE, F. (1990): *Research Methods*. Pacific Grow. Ca. Thompson Information Publishing Group.

DENZIN, N. e LINCOLN, Y. (1994): *Handbook of qualitative research*. California. Sage Publications Inc.

D'HALLUIN, C. e POISSON, D. (1988): *Une stratégie d'enseignement des mathématiques: la mathématisation de situations intégrant l'informatique comme outil et mode de pensée*. These de Doctorat. Université de Lille.

DIJKSTERHUIS, E. J. (1956): *Archimedes*. Copenhague. (Citado en GRATTAN-GUINNES, I. et al.)

DOUADY, R. (1980).: Approche des nombres reéls en situation scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en didactique des mathématiques*. 1 (1), (pp.36-51).

DOUADY, R. (1984): *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse d'État. Université de Paris VII.

DOUADY, R. (1986): Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2), (pp. 5-31).

DOUADY, R. (1991): Tool, objet, setting, window: elements for analysing and comstructing didactical situations in mathematics. En Bishop, A. e Melling Olsen, S. (eds.). *Mathematical knowlegde: its grouth through teaching*, (pp.100-140). Dordrecht. Kluwer Academic Press.

DOUADY, R. (1995): La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Artigue, M, Douady, R., Moreno, L. e Gómez, P. (eds.) *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. México. Grupo Editorial Iberoamericano, (pp. 61-97).

DOUADY, R. e PERRIN, M.J. (1983): Mesure des longueurs et des aires. *Brochure*, 46. París. IREM de París VII.

DOUADY, R. e PERRIN, M.J. (1989): Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Educational Studies in Mathematics. 20 (3), (pp.387-424).

DREYFUS, T. (1990): *Advanced mathematical thinking.* In P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition. A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education.* ICMI Study Series.

DREYFUS, T. (1992): Aspects of computerized learning environments which support problem solving. In J. P. Ponte, J. F. Matos and D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem-solving and new information technologies: Research in contexts of practice*. F89. New York: Springer-Verlag.

DREYFUS, T. e EISENBERG, T. (1982): Intuitive functional concepts: a baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*. 13 (5), (pp. 360-380).

DUBINSKY, E., e TALL, D. O. (1991): Advanced mathematical thinking and the computer. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking.* The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

DUBINSKY, E.; HAWKS, J. e NICHOLS, D. (1989): Development of the process conception of function by pre-service teachers in discrete mathematics course. *Proceedings of the 13th Annual Conference for the PME*. Universidade de París, (pp. 291-298).

ECO, U. (1976): *Tratado de semiótica*. Barcelona. Lumen.

EISENBERG, T. (1991): Functions and learning difficulties. En Tall, D. (ed.*) Advanced Mathematical Thinking. Cap. 9.* Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, (pp. 140-152).

EL BOUAIZZAUI, H. (1988): *Conceptions des eleves et des profeseurs á propos de la notion de continuité d'une fonction*. Thése. Ph. D. Université Laval.

ENTWISTLE, N. (1988): *La comprensión del aprendizaje en el aula*. Barcelona. Paidos/MEC.

FIELKER, D. (1987): *Rompiendo las cadenas de Euclides*. Madrid. M.E.C.

FOX, D. (1981): *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona. Eunsa.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as educational task*. Dordrecht-Holland. D. Reidel Publishing Company.

FREUDENTHAL, H. (1983): *Didactical phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht-Holland. D. Reidel Publishing Company.

GANDT, F. (1983): Les indivisibles de Torriceli. Cahier nº 17 du *Séminaire d´Epistemologie et d´Historie des Sciences. Université de Nice*. (Citado por Scheneider).

GASCÓN, J. e FONSECA, C. (2000): Reconstrucción de las organizaciones matemáticas en las Instituciones Didácticas. *XIV Jornadas del SIIDM*. Cangas do Morrazo.

GERE, B.H. et al. (1972): *Curso programado de cálculo*. Barcelona. Ed. Reverté.

GHIGLIONE, R. e MATALON, B. (1989): *Las encuestas sociológicas*. México. Trillas.

GODINO, J.D. (1999): Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en Didáctica de las Matemáticas. *III Simposio de la SEIEM*. Valladolid.

GODINO, J.D. e BATANERO, M.C. (1994): Significado Institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. 14 (3), (pp. 325-355).

GODINO, J.D. e BATANERO, M.C. (1997): Clarifyng the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En Sierpinska, A. e Kilpatrick, J. (eds.) *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, (pp. 177-195).

GODINO, J.D. e BATANERO, M.C. (1998): Meanings of mathematical objects as analysis units in didactics of mathematics. *First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Alemania. Orsnabrueck.

GRATTAN-GUINNES, I. et al. (1984): *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*. Madrid. Alianza Universidad.

GRAY, E. e TALL, D. (1993): Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 72-79). Assisi, Italia.

GRAY, E. e TALL, D. (1994): Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 26, nº 2, (pp. 115-141).

GREENO, J. (1978): Natures of problem solving abilities, en W. K. Estes (comp.), *Hand book of learning and cognitive processes*. Hisllsdale, N.J. Erlbaum. (Citado por Mayer).

GRENIER, D. (1988): Construction et étude du foncitionnement d´un processus d´enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième. *Thèse, Université de Grenoble I*, Grenoble. (Citado por Artigue).

GROUWS, D. A. (ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York. MacMillan.

GUZMAN, M. e RUBIO, B. (1979): *Integración: teoría y técnicas*. Madrid. Alhambra.

HAWKINS, T. (1984): Los orígenes de las teorías de integración modernas. En Grattan-Guinnes (ed.). Capítulo 4. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*. Madrid. Alianza Universidad.

HEGEDUS, S. (1998): *A study of the metacognitive behaviour of mathematics undergraduates in solving problems in the Integral Calculus*. Doctoral Thesis. University of Southampton. UK.

HIEBERT, J. e CARPENTER, T. (1992): Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (ed.): *Handbook of research in teaching and learning of mathematics* . New York. MacMilan, (pp. 65-97).

HUBERMAN, A. e MILES, M. (1984): *Qualitative Data Analysis. A sourcebook of new methods*. London. Save Publications.

JOSHUA, S. (1989): La perdurance des obstacles épistémologiques: un révelateur de leur nature. En Bednarz, N. y Garnier, C. (eds.) *Constructions des savoirs: Obstacles & conflicts*. Agence D'Arc, (pp. 110-116).

KIRK, J. e MILLER, J. (1986): *Reliability and validity in qualitative research*. California. Sage University Press.

KLARH, D. e WALLACE, J. (1976): *Cognitive development: an information processing view*. Hisllsdale, N.J. Erlbaum. (Citado por Mayer).

KLINE, M. (1972): *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. (2. vol.).New York. Oxford University Press. Traducción al castellano (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros dias* (2 vol.). Madrid. Alianza Universidad.

KLINE, M. (1985): *La pérdida de la certidunbre*. Madrid. Siglo veintiuno.

KUSTCHERA, F. (1971): *Filosofía del lenguaje*. Madrid. Gredos.

LABRAÑA, A. (1996): Supervivencia das aves. *Boletín das Ciencias-ENCIGA*. 32, (p.55).

LABRAÑA, A. (1998): Medida e estimación de superficies: a cidade amurallada de Lugo. *Boletín das Ciencias-ENCIGA*. 34, (pp.31-36).

LABRAÑA, A. e CAJARAVILLE, J. (1997): A medida de superficie a través de procesos de indagación que conxugan métodos estimativos e formais. *Adaxe*. 13, (pp. 141-161).

LABRAÑA, A.; RODRÍGUEZ, M. e CACHAFEIRO, L. (1994): *Sobre integrais*. Muros. Toxosoutos.

LAKATOS, I. (1976): *Pruebas y refutaciones*. Madrid. Alianza Universidad.

LAKATOS, I. (1981): *Matemáticas: ciencia y epistemología*. Madrid. Alianza Universidad.

LARSON, R.E., HUSTETLER, R.P. e EDWARRDS, B.H. (1999): *Cálculo*, 2 (1). Madrid. Mc. Graw Hill.

LINÉS, E. (1991): *Principios de Análisis Matemático*. Barcelona.Ed. Reverté.

MAYER, R.E. (1986): *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona. Paidós.

MOORE, D. (1995): *The basic practice of statistics*. New York. Freeman.

NICKERSON, R., PERKINS, D. e SMITH, E. (1990): *Enseñar a pensar*. Barcelona. Paidos/MEC.

ORTON, A. (1980): *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*. Ph. D. Thesis. Leeds University. UK.

ORTON, A. (1983a): Student's understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*. 14 (1), (pp. 1-18).

ORTON, A.(1983b): Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*. 14 (3), (pp. 235-250).

PIAGET, J. (1950): *Introduction á l´épistémologie genétique*. Presse Universitaries de France. Traducción ó castelán (1987): *Introducción a la epistemología genética*. México. Paidós.

PISKUNOV, N.S. (1977): *Cálculo diferencial e integral*. H.C. Пhckyhob. Moscú.

PÓLYA, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press. Traducción ó castelán (1986): *Cómo plantear y resolver problemas.* México. Trillas.

PÓLYA, G. (1954). *Matemáticas and plausible reasoning*. Volume 2. Princeton University Press. Traducción ó castelán (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid. Tecnos.

PÓLYA, G. (1966). *Mathematical discovery* (2 vol.). New York. John Wiley and Sons.

POLYA, G. (1994): *Métodos matemáticos en la Ciencia*. La tortuga de Aquiles, 3. Madrid. Euler.

PUIG ADAM, P. (1979): *Cálculo integral*. Madrid. Gómez Piug Ed.

PUIG, L. (1997): Análisis fenomenológico. En Rico, L. (coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Cuadernos de Formación del Profesorado. Barcelona. ICE- Horsori Editorial, (pp. 61-94).

RESNICK, B. e FORD, W. (1991): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos spsicológicos*. Barcelona. Paidós-MEC.

RICO, L. (1997): Consideraciones sobre el curriculo de Matemáticas para Educación Secundaria. En Rico, L. (coord.):*La Educación Matemática en Secundaria*. Cuadernos de Formación del Profesorado. Barcelona. ICE-Horsori Editorial, (pp. 15-38).

ROBERT, A. e ROBINET, J. (1989): Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier de DIDIREM Nº 1, IREM Paris VII*. Paris. (Citado por Artigue).

ROBINSON, A. (1996): *Non standard analysis*. Princenton-New Jersey. Princenton University Press.

ROMBERG, T., ZARINNIA, E. e COLLIS, K. (1991): A new world view of assesment in mathematics. En Kulm, G. (ed.) *Assessing higher order thinking in mathematics.* Washington. AAAS.

RUIZ, L. (1993): *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

SACHS, S. (1983): *Medición y evaluación en educación*. Barcelona. Herder.

SCHNEIDER, M. (1988): *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*. Tese doutoral. Universidad Católica de Lovaina.

SCHNEIDER, M. (1992): Un obstácle épistémologique soulevé par "découpages infinis" des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 11 (2-3), (pp. 241-294).

SCHOENFELD, A. H. (1980): Teaching problem-solving skills. *American Mathematical Monthly, 87 (10),* (pp.794–805).

SCHOENFELD, A. H. (1982): Some thoughts on problem-solving research and mathematics education. In F. K. Lester (Ed.), *Mathematical problem-solving.* Philadelphia: Franklin Institute Press

SCHOENFELD, A. H. (1985a): *Mathematical problem-solving.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

SCHOENFELD, A. H. (1985b): Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In E. Silver (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem-solving: Multiple research perspectives.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

SCHOENFELD, A. H. (1987): What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematical education* Philadelphia: Lawrence Erlbaum.

SCHOENFELD, A. H. (1992): Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grows (Ed.), *Handbook on research on mathematics teaching & learning.* New York: Macmillan Publishing Company.

SCHOENFELD, A.H. (1997): *Student assessment in calculus.* MAA Notes Series Number 43.

SCOTT, P. (1988): *Introducción a la investigación y evaluación educativa*. México. UNAM.

SFARD, A. (1989): Transition from operational to structural conceptions: the notion of function revisited. *Proceeding of the 13th Annual Conference for the PME*. Universidad de París, (pp. 151-158).

SFARD, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22(1), (pp. 1-36).

SFARD, A. (1992): The case of function. En Harel G. y Dubinsky, E. (eds.*) The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America, (pp. 85-106).

SHAYER, M. e ADEY, R. (1986): *La Ciencia de enseñar Ciencia*. Madrid. Narcea Ediciones.

SHULMAN, L. S. (1989): Paradigmas y Programas de Investigación en la Enseñanza: Una perspectiva contemporánea. En Wittrock, M. (ed.): *La investigación en la enseñanza*. Vol I, (pp. 9-92). Barcelona. Paidós.

SHULMAN, L.S. (1988): Disciplines of inquire in education: an overview. En Jaeger, R. (ed.). *Complementary Methods for research in Education*. Washington. AERA.

SIERPINSKA, A. (1985a): Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. 6 (1), (pp. 5-67).

SIERPINSKA, A. (1985b): La notion d'obstacle épistémoligique dans l'enseignement des mathématiques. En *Proceedings of the 37th CILAEM Meeting.* Leiden.

SIERPINSKA, A. (1987): Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18 (4),* (pp. 371–387).

SIERPINSKA, A. (1989): Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. En Bednarz, N. y Garnier, C. (eds.) *Constructions des savoirs: Obstacles & conflicts*. Agence D'Arc, (pp. 130-148).

SIERPINSKA, A. (1990): Some remarks on understandig in mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 10 (3), (pp. 24-36).

SIERPINSKA, A. (1994): *Understanding in mathematics*. London. The Falmer Press.

SIMON, H.A. (1980): *Problem solving and education*. Hillsdale. N.J. Erlbaum. (Citado por MAYER).

SPIVAK, M. (1992): *Calculus*. Barcelona. Reverté.

STEWART, I. (1984): *Conceptos de matemática moderna*. Madrid. Alianza Universidad.

STEWART, J. (1999): *Cálculo diferencial e integral*. México. Internacional Thomson.

TALL, D. (1986a): A graphical approach to integration and the fundamental theorem. *Mathematics Teaching, 113,* (pp. 48–51).

TALL, D. (1986b): *Building and Testing: a cognitive approach to the Calculus using Computer Graphics*. Ph. D. Thesis. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick.

TALL, D. (1986b): *Graphic Calculus I, II, III* (software para BBC). London. Glenton Press.

TALL, D. (1991b): Intuition and Rigour: The Role of Visualization in the Calculus. En Zimmermann e Cunnighman (eds.) *Visualization in Mathematics*, (pp. 105-119).

TALL, D. (1992): The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp. 495–511). New York: Macmillan.

TALL, D. (1993): Computer environments for the learning of mathematics. In B. Biehler, R. Scholtz, R. Straber and B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline - the state of the art*, 189–199. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

TALL, D. (1994): Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. Conferencia en el *International Congress of Mathematics*. Zurich.

TALL, D. (1995): *Functions and Calculus*. Mathematics Educational Research Centre. University of Warwick.

TALL, D. (ed.) (1991a): *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

TALL, D. e BAKAR, E. (1992): Student's mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematics Education Science and Technology*. 23 (1, (pp. 39-50).

TALL, D.; BLOCKLAND, P. e KOK, D. (1990): *A Graphic Approach to the Calculus* (software para BBC). Sunburst. Pleasantville.

THOMPSON, P. (1994): Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus, *Educational Studies in Mathematics*, 2, (pp. 229-274). Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

THORNDIKE, R. (1989): *Psicometría aplicada*. México. Limusa.

TURÉGANO, P. (1996): Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida. *UNO*. 10, (pp. 9-28). Barcelona. Graó.

TURÉGANO, P. (1997): El aprendizaje del concepto de integral. *SUMA*. 26, (pp. 39-52). Zaragoza. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

VERGNAUD, G. (1982): Cognitive and developemental psychology and research in mathematics education: some theorical and metodological issues. *For the learning of mathematics Education*, 3 (2), (pp. 31-41).

VERGNAUD, G. (1990): Epistemology and psycology of matemathics education, *Nesher, P. & Kilpatrick, J. Eds., Mathematics and cognicion: A reseach synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 14-30), Cambrigde University Press. (Citado por Cajaraville).

VINNER, S. (1983): Concept definition, concept image and the notion of funtion. *International Journal of Mathematics Education in Sciencie and*, 14, (pp.133-170).

VINNER, S. E TALL, D. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in Mathematics*, l 12 (2), (pp.151-169).

WEBB, N. (1992): Assesment of student´s knowlegde of mathematics: step toward a theory. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York. McMillan.

WHIMBEY , A. (1975): *Intelligence can be taught*. Nova Iorque. E. P. Dutton. (Citado por NICKERSON, R., PERKINS, D., SMITH, E).

WHITE, P. e MITCHELMORE, M. (1996). Conceptual knowlegde in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (1), (pp.79-95).

BIBLIOTECA VIRTUAL MIGUEL DE CERVANTES