



Universidad de Santiago de Compostela

# Influencia del ruido gaussiano correlacionado en la sincronización de sistemas caóticos

Maria de las Nieves Lorenzo Gonzalez

## Tesis de Doctorado

**Facultad:** Facultad de Física

**Directora:** Dr. Vicente Perez Muñuzuri

**Julio de 2000**

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA  
FACULDADE DE FÍSICA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA,  
GRUPO DE FÍSICA NO LINEAL

# Influencia del Ruido Gaussiano Correlacionado en la Sincronización de Sistemas Caóticos

María de las Nieves Lorenzo González  
*Julio, 2000*

D. VICENTE PÉREZ MUÑUZURI, Profesor Titular del Departamento de Física de la Materia Condensada de la Universidade de Santiago de Compostela,

INFORMA:

Que la presente memoria titulada **"Influencia del Ruido Gaussiano Correlacionado en la Sincronización de Sistemas Caóticos"** ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Física de la Materia Condensada de la Universidade de Santiago de Compostela para optar al grado de Doctor en Física

Santiago de Compostela, Julio 2000

Prof. Vicente Pérez Muñuzuri

A pa y a ma,  
por todo...

# Agradecimientos

La culminación de esta tesis es el resultado no sólo de los seis u ocho últimos meses de loca escritura y miles de programas ralentizando las estaciones de trabajo. La aventura comenzó hace poco más o menos 5 años llenos de buenos y no tan buenos momentos. Años en los que me he cubierto de deudas, deudas de gratitud de las que he ido acumulando tantas que ahora me encuentro incapaz de corresponder a todas y he de declararme insolvente. Una vez lei una cita de Alfred Tennyson, un poeta inglés que muy sabiamente dijo: *"Yo soy parte de todo aquello que he encontrado en mi camino"* Afortunadamente yo he tenido mucha suerte y en mi camino sólo he encontrado buenos compañeros de viaje o por lo menos esos son los únicos que recuerdo en este momento.

Todo esto no hubiera sido posible si en junio de 1995 Vicente Pérez Villar, un desconocido para mí en aquella época, no me hubiera brindado la posibilidad de integrarme en su grupo de investigación en el estudio y construcción de circuitos capaces de generar caos...Caos sería lo que yo tendría en mi cabeza a partir de entonces, menos mal que como se dirá en este trabajo eso es *positivo*. Tampoco esto sería posible sin mi director Vicente Pérez Muñuzuri al que dudo pueda en algún modo compensar el tiempo y la paciencia que me ha dedicado, especialmente en estos últimos meses de estrés pretesis.

También quiero mandar desde aquí mi más profundo agradecimiento al profesor Michael Peter Kennedy del University College Dublin y al profesor Geza Kolumbán de la Technical University of Budapest por la amabilidad y el afecto con el que me integraron dentro de sus respectivos grupos y por lo mucho que he aprendido de ellos y espero seguir aprendiendo.

Como dije, en 1995 entré en el grupo de física no lineal, un grupo que poco a poco se ha ido convirtiendo en una segunda familia y que jamás podré olvidar: A todos y cada uno os doy mis más sinceras gracias: Adolfo, Alberto, Bea, Diego, Edu, Elena, Gonzalo, Irene, Iván, Julio, Maite, Moncho y Pedro. De todos y cada uno podría escribir mil y una anécdotas pero ando corta de tiempo así que sin temor a que os celeis, me he reservado el derecho de mención. Si alguien

me ha acompañado por el duro camino del caos en estos años esa ha sido Inés quizás la única que realmente comprenda el significado de la finalización de este trabajo. Como ella Chus sufridora de mis altibajos durante la elaboración del manuscrito no sólo en el departamento sino también en casa, Manuel mi compañero de viaje y que también se encuentra a escasos renglones de la línea de meta, Mónica que junto con Héctor y Carlos me ha ayudado en la lucha diaria con la circuitería caótica y sobre todo Juan que con su serenidad y buen humor ha conseguido que el lado oscuro no lo fuera tanto.

Bien es verdad y todo hay que decirlo que sin la amistad y el buen hacer de Susana, Silvana, Pablo, Encina, Pili y Angel el camino se haría insoportable. Es más, estoy segura de que se me queda un mogollón de gente en el tintero pero a estas alturas las palabras valen su peso en oro, así que envío mi más sincero agradecimiento a ese tintero lleno de gente buena.

Con mi familia ya lo tengo más fácil o quizás más difícil, ella me sufre con la serena y gozosa confianza de quien se sabe beneficiario de una indulgencia plenaria, sin ellos todo esto sería una quimera inalcanzable, gracias es lo menos y a la vez lo más que puedo decirlos. Sobre todo a tí, Fer, por haber diseñado la primera mariposa verdaderamente caótica.

# Abstract

Towards the beginning of the 70s, chaos theory experienced a significant development. The main emphasis was on the application of the modern theory to a wide range of scientific problems in biology, chemistry, engineering and physics. This young theory has been considered as one of the most important discoveries in science in this century due to its large applications in the real world.

The present work has been focused on the characterization of the performance versus noisy signals of several communication schemes, which, based in the properties of the chaotic signals and in the ability of chaotic oscillators to synchronize, pretend to implement a competitive communication scheme with the actual telecommunication systems. The robustness of three schemes of chaotic synchronization has been studied: the Pecora-Carroll scheme, a synchronization scheme through compound chaotic signal and a synchronization scheme with dynamic output error feedback. For the most robust scheme, the sensitivity and efficiency of this scheme was studied with different modulation models aiming to determine the more competitive model for a real implementation.

In the second part of the text, the influence of low intensity noise on arrays of diffusively coupled chaotic cells was analyzed. The study was carried out with different types of noise, white Gaussian noise and Gaussian noise of the Ornstein-Uhlenbeck type and considering both an additive and a multiplicative contribution. The parameter studied in this case is the degree of synchronization between cells of the array. The work shows the cooperative effects of noise strength, correlation time, coupling parameter, boundary conditions, length of the array and the dynamics of the oscillators.

In this analysis, a resonant effect between the chaotic attractor time scale and the noise correlation time has been found. The study has been carried out for different chaotic type oscillators obtaining the same resonant dynamic that depends on the diffusion parameter and

the oscillator behavior itself. Our results open a way to possible applications of noise in the understanding and control of the chaotic oscillators.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción al Caos</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>La Sincronización en Sistemas Caóticos</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Comunicaciones y Señales Caóticas</b>	<b>17</b>
3.1	Rendimiento en un Sistema de Comunicaciones	19
3.2	Sistemas de Espectro Expandido	21
3.3	Señales Caóticas en Comunicaciones	24
3.3.1	El Porqué de Usar Portadora Caótica	24
3.3.2	El Porqué de la Sincronización Caótica	26
<b>4</b>	<b>Esquemas de Sincronización y Modulación</b>	<b>29</b>
4.1	Sincronización con el Esquema de Pecora y Carroll	29
4.1.1	Modelo Numérico	32
4.2	Sincronización a través de Señales Caóticas Complejas	33
4.2.1	Modelo Numérico	35
4.2.2	Montaje Experimental	37
4.3	Sincronización con Realimentación de Salida Dinámica	39

4.3.1	Modelo Numérico	41
4.3.2	Montaje Experimental	42
4.4	Resultados de la Sincronización	44
4.5	Esquemas de Modulación	53
4.5.1	Modulación de Enmascaramiento o <i>Masking</i>	55
4.5.2	Modulación <i>ASK</i>	62
4.5.3	Modulación <i>CSK</i>	63
4.5.4	Modulación <i>COOK</i>	67
4.6	Conclusiones	70
<b>5</b>	<b>Ruido sobre Sistemas Caóticos Extendidos</b>	<b>73</b>
5.1	Efecto del Ruido de Color	81
5.1.1	Resultados al Perturbar el Parámetro de Bifurcación	83
5.1.2	Perturbando otros Parámetros del Sistema	98
5.1.3	Contribución Aditiva del Ruido	103
5.1.4	Efecto del Ruido en otros Sistemas Caóticos	111
5.2	Efecto del Ruido Blanco	124
5.3	Conclusiones	126

<b>6</b>	<b>Conclusions and Outlook</b>	<b>129</b>
6.1	Conclusions	129
6.2	Outlook	130
<b>A</b>	<b>Circuitos Generadores de Caos</b>	<b>133</b>
A.1	Circuito de Chua	133
A.2	Circuito de Lorenz	137
A.3	Circuito de Rössler	139
<b>B</b>	<b>El Ruido y su Simulación Numérica y Experimental</b>	<b>143</b>
B.1	Ruido Blanco Gaussiano	144
B.1.1	Desarrollo Numérico	144
B.1.2	Desarrollo Experimental	145
B.2	Ruido Tipo Ornstein-Uhlenbeck	147
B.2.1	Desarrollo Numérico	147
B.2.2	Desarrollo Experimental	148
<b>C</b>	<b>Espectro de Lyapunov Transverso</b>	<b>151</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>155</b>

# Capítulo 1

## Introducción al Caos

---

La ciencia clásica acaba donde el caos empieza. Mientras los físicos indagaron las leyes naturales, el mundo adoleció de una ignorancia especial en lo que concierne a los desórdenes de la atmósfera y del mar; a las fluctuaciones de las poblaciones de animales y plantas; y a las oscilaciones del corazón y el cerebro. El comportamiento irregular de la naturaleza, su parte discontinua y variable, ha sido un rompecabezas a los ojos de la ciencia.

En la década de los 70, un grupo de científicos estadounidenses y europeos comenzó a fraguarse camino en el desorden, eran matemáticos, físicos y biólogos, y todos buscaban nexos entre las diferentes clases de irregularidades. Junto con la teoría de la relatividad y la cuántica, la moderna teoría del caos en sistemas dinámicos forma parte de la gran evolución de la física del siglo XX. Al igual que las otras dos teorías, el caos ataca a los principios newtonianos. La relatividad eliminó la idea del espacio y el tiempo absolutos; la teoría cuántica acabó con la posibilidad de un proceso de medición controlable; y el caos termina con las teorías de Laplace de la predictibilidad determinista. De las tres revoluciones, la del caos importa al mundo que vemos y tocamos, a los objetos de proporción humana. La experiencia cotidiana y las imágenes reales de cuanto nos rodea se han convertido en objeto de investigación.

Las matemáticas sobre teoría de sistemas dinámicos engoblando los conceptos de multiplicidad de solución y caoticidad de una trayectoria dinámica, tienen una historia relativamente corta pero a su vez importante. Los orígenes de la teoría de sistemas dinámicos se remontan a un siglo atrás. Los componentes básicos de la teoría de multiplicidad de soluciones de ecuaciones de evolución no lineal fueron agrupados en tres áreas distintas: soluciones críticas, estabilidad, y estabilidad estructural. Éstas formaron una rama de las matemáticas conocida como teoría de bifurcaciones. El desarrollo de la teoría de bifurcaciones ha mejorado la comprensión de la existencia de múltiples soluciones en sistemas no lineales y de cómo el número y la estabilidad de dichas soluciones cambia cuando se

varía algún parámetro. La cuestión crucial sobre la estabilidad de una solución, esto es, si una solución persiste o no bajo una perturbación infinitesimal y cómo se modifica cuando el número de soluciones varía, ha ocupado el tiempo de muchos matemáticos durante los siglos XVIII y XIX. Hacia finales del siglo XIX se formuló la teoría de bifurcaciones, debida a Henri Poincaré [Poincaré, 1880]. Poincaré fue uno de los padres de la teoría de bifurcaciones e incluso inició el desarrollo de la teoría de los sistemas dinámicos. Importantes contribuciones a las matemáticas relacionadas con el estudio de sistemas dinámicos ocurrieron durante el siglo XX. Julia contribuyó en 1917 al inicio y comprensión de complejos mapas analíticos; este trabajo fue más tarde mejorado por Mandelbrot [Mandelbrot, 1975]. Mucho más recientemente, un desarrollo significativo del caos (algunos dicen que su nacimiento) ocurrió en 1963 tras la publicación por parte de Lorenz [Lorenz, 1963] de un artículo sobre flujo no periódico relacionado con la turbulencia en el que se descubría la existencia de soluciones aperiódicas en un modelo simplificado de las ecuaciones de Navier-Stokes.

La contribución de Lorenz junto con los trabajos realizados sobre mapas en los años 70 por Yorke, May, Oster [May, 1976; May et al., 1980] y otros muchos investigadores de la época proporcionaron dos caminos de estudio diferentes en los que sistemas determinísticos muy simples generan trayectorias dinámicas fuertemente influenciadas por la sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto significa que incluso conociendo exactamente la definición de las reglas de evolución de un sistema dinámico, si éste es caótico, la predicción a largo plazo resultará imposible no sólo ya por la complejidad de la solución sino por la divergencia exponencial que dicha dinámica experimenta ante pequeñas perturbaciones.

En los últimos años se ha llegado a la conclusión de que la sensibilidad de ciertos sistemas no lineales a pequeños cambios en las condiciones iniciales que exhiben comportamiento temporal caótico es una propiedad típica de muchos sistemas sin dejar por ello de ser excepcional. Matemáticamente, todos los sistemas dinámicos no lineales con más de 2 grados de libertad, es decir la mayoría de los modelos biológicos, meteorológicos o económicos pueden mostrar caos y por lo tanto llegar a ser impredecibles a largo plazo [Hilton; 1994; Freeman et al., 1997]. Desde mediados de la década de los 70, el término

caos ha aparecido cada vez con más frecuencia en la literatura científica ya que esta nueva teoría ha nacido con ciertas ventajas con respecto a la relatividad y a la mecánica cuántica. Los fenómenos supuestamente caóticos suelen poder verse y apreciarse sin necesidad de telescopios ni microscopios, y pueden registrarse sin cámaras de alta velocidad o con exposición. El caos se encuentra tanto en sucesos cotidianos como la caída de una hoja o el ondear de una bandera, como en otros tan complejos como las fluctuaciones climáticas, las trayectorias de los cometas o la evolución del propio sistema solar [Sussman & Wisdom, 1988; Astronomía, 1991]. Tal comportamiento ha sido encontrado, por ejemplo, en células cardíacas periódicamente estimuladas, en circuitos electrónicos [Schuster, 1988; Lakshmanan & Murali, 1996], en el principio de turbulencia, en reacciones químicas, en láseres, etc... La posibilidad de implementar circuitos electrónicos capaces de generar comportamiento caótico ha supuesto un gran avance dentro de esta teoría, así, de cara a la ingeniería, la inherente impredecibilidad del caos lo convierte en ideal para el diseño de generadores de números aleatorios en sistemas de seguridad o de generadores de ruido blanco y coloreado [Murch & Bates, 1990].

La teoría del caos se caracteriza por la descripción matemática del comportamiento, en extremo complejo y previsible sólo dentro de unos horizontes temporales limitados, de sistemas físicos que en apariencia pueden parecer muy simples. El movimiento caótico aparece cuando divergencias exponenciales locales en la trayectoria están acompañadas de un confinamiento global en el espacio de fases. La divergencia produce un alargamiento local del espacio de fases pero, a causa del confinamiento, esta dilatación no puede continuar sin plegarse; repetidos plegamientos y redoblamientos producen un comportamiento muy complicado conocido como comportamiento caótico.

El nombre de caos y el adjetivo de caótico son usados para describir el comportamiento temporal de un sistema cuando dicho comportamiento es aperiódico y aparentemente aleatorio o ruidoso. La palabra clave aquí es aparentemente. Bajo esta aparente aleatoriedad caótica subyace un determinado orden, dado por las ecuaciones que describen el sistema.

En general, se necesitan tres ingredientes para determinar el comportamiento de un

sistema. Estos ingredientes son las ecuaciones de evolución temporal, los valores de los parámetros que describen el sistema y por último las condiciones iniciales. La imagen que más ha contribuido a difundir la teoría del caos es el conocido *efecto mariposa* que hace mención a la especial sensibilidad de los sistemas caóticos a las condiciones iniciales. La expresión hace referencia y viene a explicar que una pequeña perturbación del estado inicial de un sistema puede traducirse, en un breve lapso de tiempo, en un cambio importante en el estado final del mismo. Volviendo al popular efecto mariposa, éste vendría a decir de forma coloquial que *"...si agita hoy, con su aleteo, el aire de Pekín, una mariposa puede modificar los sistemas climáticos de Nueva York el mes que viene."* [Gleick, 1988]. No obstante el caos va más allá de este efecto, si sólo nos quedáramos aquí nos encontraríamos en medio del más puro azar. Pero en el caos hay más que azar, el caos encierra en sí mismo una fina estructura geométrica, un orden detrás de la aparente casualidad.

Los requerimientos para que un comportamiento se considere caótico son la no intersección de diferentes trayectorias, el confinamiento de las mismas y la divergencia exponencial de trayectorias cercanas. En el caso de flujos, estas tres propiedades precisan de un espacio tridimensional pues no pueden ser satisfechas de modo simultáneo en espacios de una o dos dimensiones. La característica crucial de los espacios con tres o más dimensiones que permite comportamiento caótico es la capacidad de las trayectorias a permanecer dentro de alguna región limitada sin intersectarse y sin repetirse de forma exacta.

Dado que una de las manifestaciones más característica del comportamiento caótico es su sensibilidad a cambios en las condiciones iniciales del sistema, es lógico buscar la forma de medir el grado de sensibilidad de trayectorias vecinas a perturbaciones en sus condiciones iniciales, con vistas a caracterizar la caoticidad de un sistema.

La noción de divergencia exponencial de órbitas cercanas es formalizada con la introducción de los exponentes de Lyapunov. Dadas dos órbitas cercanas de un atractor empezando en el instante  $t = 0$ , y con una separación  $d_0$ , a lo largo del tiempo las trayectorias

divergirán de modo que su separación en el instante  $t$ , (dada por  $d(t)$ ), satisfaga la expresión:

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t} \quad (1.1)$$

Si el parámetro  $\lambda$ , llamado exponente de Lyapunov, es positivo entonces la trayectoria será caótica. El exponente de Lyapunov puede ser considerado como una medida de la atracción o repulsión desde un punto fijo en el espacio de fases. También se podría aplicar esta noción o idea a la divergencia de trayectorias cercanas, en general, a cualquier punto en el espacio de fases. Para un espacio unidimensional donde  $x_0$  es un punto inicial y  $x$  un punto inicial cercano,  $x_0(t)$  la trayectoria alcanzada desde el primer punto inicial y  $x(t)$  la alcanzada por el segundo punto inicial, podemos llegar a la conclusión de que la distancia que separa dichas trayectorias,  $s(t) = x(t) - x_0(t)$ , crece o decrece exponencialmente en el tiempo siguiendo el razonamiento anterior. Así, si asumimos que

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (1.2)$$

por ser  $x$  cercano a  $x_0$ , podemos escribir la expansión de la serie de Taylor de  $f(x)$  como,

$$f(x) = f(x_0) + df(x)|_{x_0}(x - x_0) + \dots \quad (1.3)$$

encontrándose que la relación de cambio de distancia entre las dos trayectorias viene dada por

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x} - \dot{x}_0 \\ &= f(x) - f(x_0) \\ &= df(x)|_{x_0}(x - x_0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde se ha conservado únicamente la primera derivada en la expansión de la serie de Taylor de  $f(x)$  ya que se espera que la distancia evolucione exponencialmente en el tiempo. El exponente de Lyapunov  $\lambda$  es introducido como la cantidad que satisface

$$s(t) = s(t=0)e^{\lambda t} \quad (1.5)$$

Diferenciando esta ecuación con respecto al tiempo se encontrará que

$$\dot{s}(t) = \lambda s(t=0)e^{\lambda t} = \lambda s(t) \quad (1.6)$$

comparando las ecuaciones 1.4 y 1.6 se tendrá que

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \quad (1.7)$$

Así pues, se puede ver que si  $\lambda$  es positivo entonces las dos trayectorias divergen, si es negativo por el contrario ambas trayectorias convergerán. En la práctica, se sabe que la derivada de la función de la evolución temporal en general varía con  $x$ ; por lo tanto, se querrá encontrar un valor promedio de  $\lambda$  a lo largo de la evolución de la trayectoria. Sabiendo la función de la evolución temporal simplemente se evaluará la derivada de dicha función a lo largo de la trayectoria encontrando el valor promedio. (Para un sistema disipativo unidimensional dicho promedio debe ser negativo).

En un espacio de fases con dos (o más) dimensiones, se puede asociar un exponente de Lyapunov con la medida de expansión o contracción de las trayectorias para cada una de las diferentes direcciones del espacio de fases. Un sistema caótico se define, en el sentido de los exponentes de Lyapunov, como un sistema que tiene al menos un exponente de Lyapunov positivo.

Dado que para un sistema disipativo el promedio de la suma de todos los exponentes de Lyapunov ha de ser negativo, en un sistema autónomo 3-D con comportamiento caótico se encontrará un exponente positivo, otro negativo y un tercero igual a cero.

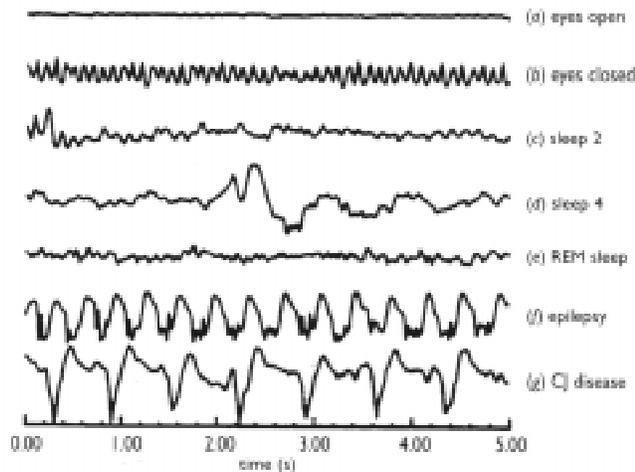
La teoría del caos se alza con un doble rostro que participaría, por un lado, de las aproximaciones clásicas y, por otro lado, de las perspectivas complejas de investigación. Esta dualidad no es otra que la dada por el determinismo y la impredeción. En efecto, tradicionalmente para la ciencia clásica, si se puede determinar en un instante dado uno de los estados del sistema que se pretende investigar y conocer la ley que rige la evolución de ese sistema se podrá entonces predecir el comportamiento, la posición futura y cualquiera de las anteriores posiciones pasadas del mismo. En la actualidad, ni siquiera acerca de lo que está determinado puede garantizarse la posibilidad de que sea previsible. La teoría del caos ha terminado con esa conexión, los sistemas caóticos son deterministas (y en este sentido son

clásicos), se conoce tan precisamente como se quiera la secuencia que les da origen, la ley que rige su evolución y, sin embargo, son impredecibles dada su sensibilidad a las condiciones iniciales (y en este aspecto, muestran su carácter complejo).

Con frecuencia el comportamiento caótico se ha visto como una conducta perjudicial e indeseable. Desde este punto de vista nos encontramos con ejemplos de caos en fisiología, tales como los antes mencionados de las arritmias cardíacas y respiratorias [Glass & Mackey, 1979], que resultan perniciosos para el organismo. En este caso se buscará suprimir este comportamiento mediante diversas técnicas de control [Matías & Güemez, 1995; Carroll, 1995]. Pero no siempre esto es así, los sistemas caóticos también pueden exhibir aplicaciones potenciales en procesamiento de señales no lineales y en computación neuronal [Halle et al., 1993; Kocarev et al., 1992; Lozi & Chua, 1993]. En los últimos años han surgido nuevas tendencias en las que se sitúa la base de los procesos perceptivos en un medio caótico [Skarda & Freeman, 1987; Delaney et al., 1995] de forma que el abandono de dicha conducta caótica constituye la pérdida fisiopatológica de las posibilidades adaptativas del sistema [Yang et al., 1992]. Según estos autores, en el sistema neuronal el proceso de cambio de estado conduciendo a un dominio caótico es esencial para prevenir convergencias a patrones previamente aprendidos y facilitar así el reconocimiento de nuevos estímulos. También se puede considerar que el comportamiento caótico puede ser bastante útil en ciertos procesos fisiológicos en los que el comportamiento regular puede ser dañino, tal es el caso de los temblores musculares producidos por una activación periódica de las unidades motoras o de los ataques epilépticos en los que el electroencefalograma, EEG, llega a ser periódico y regular [Skarda & Freeman, 1987].

Un ejemplo de esto puede verse en la Fig. 1.1 donde se consideran diferentes señales de la actividad eléctrica del cerebro a través de un electroencefalograma. Las 5 filas superiores muestra el EEG de un sujeto normal bajo dos estados diferentes de consciencia ((a)-(b)) y tres estados de sueño ((c)-(e)), mientras que los dos restantes se encuentran asociados a dos situaciones patológicas ((f)-(g)). Todas las muestras presentan una sucesión más o menos irregular de picos, aunque (f) y (g) se muestran más coherentes que (a)-(e). Análisis de las

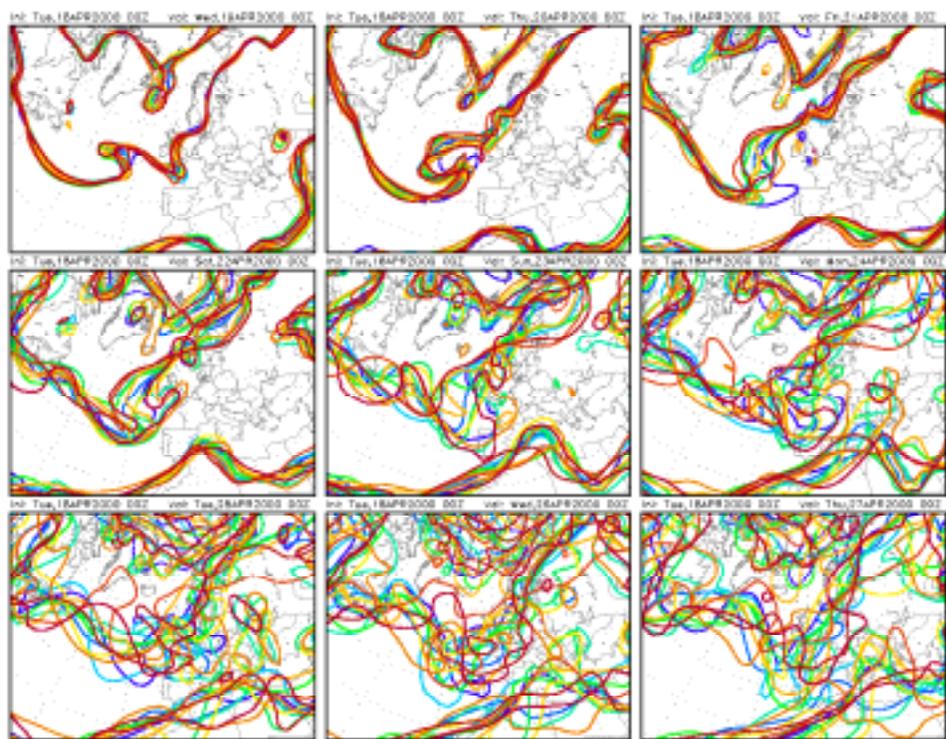
diferentes series temporales asociadas a estos comportamientos usando técnicas de dinámica no lineal revelan la presencia de caos determinístico, cuya complejidad depende del estado de actividad cerebral. Significativamente, en estados patológicos tales como la epilepsia, el comportamiento caótico es menos intenso que en estados de salud [Destexhe, 1992; Nicolis, 1995].



**Figura 1.1:** Muestras de EEG durante varios estados de actividad cerebral [Destexhe, 1992].

Desde otro punto de vista, retomando los orígenes de las primeras apariciones de la dinámica caótica en las fluctuaciones meteorológicas muy bien representadas por el efecto mariposa de Lorenz [Lorenz, 1963], nuevas técnicas de predicción meteorológica apoyadas en el hecho de que la atmósfera puede considerarse como un sistema caótico están siendo utilizadas con el propósito de ampliar el rango de fiabilidad de las predicciones meteorológicas a medio y largo plazo. Esta nueva técnica, conocida con el nombre de predicción por conjuntos o *Ensemble Forecasting* [Leith, 1974; Zhu et al., 1996], estima la distribución de probabilidad del estado verdadero de la atmósfera alrededor del análisis de control, luego muestrea la distribución de probabilidad y corre el modelo de predicción desde todos los puntos muestreados. De esta forma, se obtiene un cierto número de posibles escenarios que

son igualmente probables y que abarcan el verdadero estado de la atmósfera. Si, para un día en particular, los constituyentes del conjunto tienen un amplio espectro, por ejemplo, al cabo de 3 o 5 días de ejecución del modelo, las predicciones serán menos fiables dando lugar a la alternancia de diferentes escenarios. Los dos primeros centros pioneros en la utilización de esta técnica fueron el Centro Nacional de Predicción Medioambiental en USA, NCEP, y el Centro Europeo de Predicción Meteorológico, ECMWF. Los dos centros usan casi la misma resolución horizontal en sus modelos para el conjunto de predicciones perturbadas; sin embargo, la estimación y muestreo de la probabilidad de distribución inicial de la atmósfera es diferente.



**Figura 1.2:** Ensemble Forecasting para la predicción de la temperatura a 850 hPa, para 9 días.

La Fig. 1.2 muestra una imagen resultado de esta nueva técnica. En ella se ve como a corto plazo el espectro del conjunto de predicciones se encuentra bien delimitado y a medida que nos adentramos en la predicción a medio y largo plazo dicho espectro se va expandiendo hasta que se produce una confluencia desordenada de los diferentes escenarios haciendo inviable la predicción.

Por estas y otras muchas aplicaciones aún en desarrollo, como puede ser la creación de una radio caótica (Proyecto INSPECT), presentadas por esta novedosa dinámica, surgieron numerosas investigaciones en la búsqueda del control y la comprensión del comportamiento caótico, bien para suprimirlo o activarlo, abriéndose un nuevo camino en el estudio de la física lejos del orden y la predicción newtoniana.

## Capítulo 2

# La Sincronización en Sistemas Caóticos

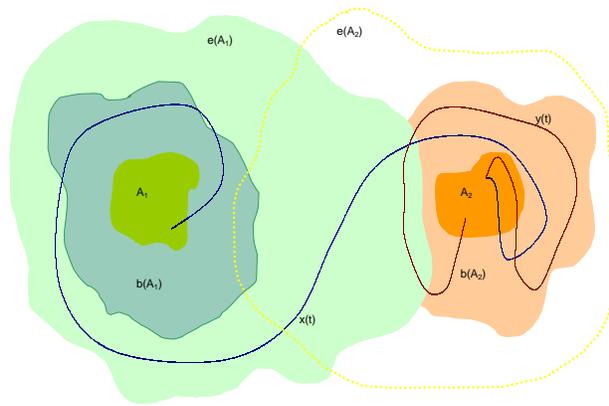
---

Después de que Pecora y Carroll en su artículo publicado en 1990 [Pecora & Carroll, 1990] demostraran que dos comportamientos caóticos aparentemente aleatorios e imprevisibles pueden fundirse en una única trayectoria, nuevas expectativas surgieron en torno a la teoría del caos, buscando tanto su control en sistemas eléctricos y mecánicos, como su comprensión y predicción en sistemas geofísicos como la atmósfera o el océano.

La idea que subyace bajo el fenómeno de sincronización es que dos sistemas caóticos, que inicialmente evolucionan sobre atractores diferentes, al acoplarse de algún modo, finalmente siguen una trayectoria común. Uno de los rasgos más sobresalientes de los sistemas caóticos es su dependencia de las condiciones iniciales del sistema, que hace que la más mínima diferencia en la descripción del estado del sistema provoque cambios que hacen distintos a sistemas complejos que, originariamente, eran tan parecidos como se les quiera suponer. Por ello uno podría concluir que la sincronización no es factible en sistemas caóticos ya que en sistemas reales no es posible reproducir de forma exacta condiciones iniciales idénticas ni especificar exactamente los parámetros para dos sistemas similares. Se puede ser capaz de construir sistemas casi idénticos, pero siempre hay alguna desigualdad tecnológica inevitable y ruido que impiden la reproducción exacta de todos los parámetros o condiciones iniciales y que desembocará en la divergencia de órbitas cercanas. Por todo ello, resultaría totalmente contranatura pensar en la posibilidad de que dos sistemas caóticos, que inicialmente evolucionan sobre atractores diferentes, confluyan en una misma trayectoria. Sin embargo, desde 1983 con los estudios llevados a cabo por Fujisaka y Yamada [Fujisaka & Yamada, 1983] y finalmente en 1990 con la comprobación experimental obtenida por Pecora y Carroll se vio que tal posibilidad era factible.

La sincronización entre dos sistemas se consigue cuando uno de los sistemas cambia su trayectoria bien a la seguida por el otro sistema o bien a una nueva trayectoria común a

ambos osciladores [Kapitaniak et al., 1996; Kapitaniak & Chua, 1996]. Una forma intuitiva y sencilla de comprender el fenómeno de sincronización es a través de la siguiente figura.



**Figura 2.1:** Condición necesaria para la sincronización de sistemas caóticos.

Siguiendo esta figura si la trayectoria de uno de los sistemas se encuentra sobre el atractor  $A_1$  y la trayectoria del otro sistema descansa sobre el atractor  $A_2$ , la sincronización entre ambos sistemas se producirá si una de las trayectorias, supongamos la del atractor  $A_1$ , es perturbada en modo tal que alcance la base de atracción del atractor  $A_2$ , es decir,  $b(A_2)$ . Si se considera  $e(A_1)$  como la región del espacio de fases en la cual evoluciona la trayectoria perturbada del sistema 1, se puede concluir que la condición necesaria para que la sincronización entre 2 sistemas caóticos tenga lugar viene dada por la condición de que:

$$e(A_1) \cap b(A_2) \neq \emptyset \quad (2.1)$$

Para que esta condición se satisfaga será preciso perturbar de alguna manera  $e(A_1)$  para que alcance la base de atracción del segundo atractor,  $b(A_2)$ . Una solución podrá ser establecer algún tipo de conexión entre ambos sistemas. El acoplamiento podrá ser fundamentalmente de dos tipos: difusivo o conductivo [Matías & Güemez, 1994; Matías et al., 1997a; 1997b] .

Por regla general, en los acoplamientos difusivos los sistemas son conectados a través de un término de difusión que regula con su valor el estado de sincronización de ambos sistemas. De acuerdo con el valor del parámetro de difusión se conseguirá un estado de sincronización determinado [Pérez-Villar et al., 1993; DeCastro et al., 1995; Ogorzalek et al., 1995]. La extensión de este tipo de conexiones a redes  $N$ -dimensionales conduce a la construcción de *CNN's* (*Cellular Neural Networks*), complejos sistemas de conexiones para modelar sistemas físicos con muchos grados de libertad. El segundo tipo de acoplamiento se lleva a cabo mediante la conducción de uno de los sistemas por alguna de las variables del sistema que actúa como conductor. Esta conducción puede ser global o local según que la introducción de la variable conductora reemplace en parte o totalmente a su variable análoga en el sistema conducido.

Dentro de estos dos grupos, difusión y conducción, existen diversas modalidades, así el acoplamiento podrá ser unidireccional o bidireccional, global o parcial, simple o complejo...Y es más, continuamente aparecen en la literatura científica nuevas modalidades de sincronización [Carroll & Pecora, 1993; Matías & Güemez., 1994; 1995; Carroll, 1995; Kapitaniak & Chua, 1996; Kapitaniak et al., 1996]. En la misma línea, el control y la sincronización de patrones espaciotemporales caóticos juegan un importante papel en el estudio del comportamiento de sistemas caóticos [Kocarev & Parlitz, 1996].

Existen diferentes nociones o definiciones de sincronización para sistemas caóticos [Femat & Solís-Perales, 1999]. La más fuerte y comúnmente extendida es la denominada sincronización idéntica o perfecta, donde el estado del sistema respuesta converge de manera asintótica al estado del sistema conductor. En los últimos años se han introducido nuevas visiones más débiles, como pueden ser la sincronización generalizada, la sincronización en fase o la sincronización de retardo (*lag synchronization*) entre otras [Rul'kov et al., 1995; Rul'kov & Sushchik, 1996; Rosenblum et al., 1996; 1997].

En la sincronización generalizada la convergencia del sistema respuesta al sistema conductor se produce a través de una transformación  $M$  distinta de la identidad de forma que

se cumple que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x'(t) - M(x(t))\| = 0$ . Las propiedades de la transformación  $M$  serán independientes de las condiciones iniciales  $x(0)$  y  $x'(0)$ .

La sincronización en fase de dos sistemas acoplados ocurre si la diferencia  $|\phi'(t) - \phi(t)|$  entre las fases de los dos sistemas está limitada por una constante [Rosenblum et al., 1996], donde la fase  $\phi(t)$  es una función monótonicamente creciente en el tiempo, y las amplitudes se presentan caóticas y descorrelacionadas. Por ejemplo, en el caso de la espiral de Chua, el ángulo de rotación alrededor del punto de equilibrio inestable en una proyección bidimensional del atractor sería una adecuada elección de la fase.

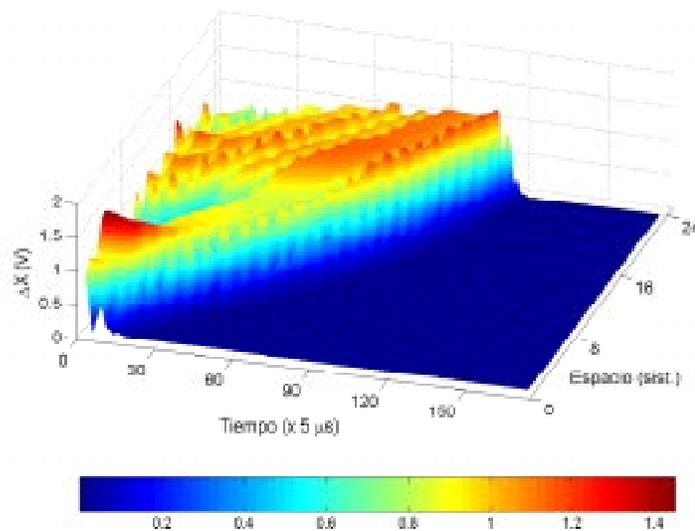
Por último, la *lag synchronziation* o sincronización de retardo, relacionada con la sincronización de fase, se caracteriza porque además de existir un desfase constante entre los sistemas, las amplitudes de los osciladores caóticos se encuentran correlacionadas, es decir,  $x_1(t + \Delta t) = x_2(t)$  [Rosenblum et al., 1997].

Dado que lo que se pretende en esta memoria es una aplicación de la sincronización a la transmisión de información en un sistema de comunicaciones [Kolumbán et al., 1996; Minai & Pandian, 1998], el estudio se focalizará principalmente en el caso de sincronización idéntica, en la que se consigue una relación de igualdad total, entre las trayectorias de evolución de los sistemas involucrados en el proceso de sincronización.

Estudios previos han demostrado que el fenómeno de sincronización, dependiendo del tipo de acoplamiento, precisa de un cierto tiempo, denominado tiempo de sincronización,  $T_S$ , para que los sistemas se consideren sincronizados [Lorenzo, 1996; Lorenzo et al., 1996; Mariño, 1999]. Este tiempo da lugar a la aparición de una onda de sincronización que se extiende a lo largo de la cadena de sistemas acoplados desplazándose a una velocidad constante. Estas ondas se caracterizan por la dependencia de su velocidad de propagación con la estabilidad del estado sincronizado. A diferencia de las ondas clásicas de los sistemas lineales o de las autoondas en los sistemas disipativos, las ondas caóticas pueden llevar información a través de la cadena lineal de celdas caóticas. Esta información es introducida

o codificada en las condiciones iniciales de la primera celda de la cadena. El estudio de estas ondas podría ayudar a una mayor comprensión en el procesamiento de estímulos en redes neuronales así como en la transmisión de señales.

En la Fig. 2.2 se muestra el patrón espacio-temporal de una onda de sincronización, obtenida para una cadena de  $N = 25$  osciladores caóticos acoplados de forma conductiva.  $\Delta x$  representa el valor absoluto de las diferencias entre las variables  $x$  de los osciladores constitutivos de la cadena lineal. La onda de sincronización se observa a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$ , instante en el que se consigue la sincronización. Después de un tiempo superior a  $N/V_s$  todos los sistemas se encuentran sincronizados, ( $V_s$  representa la velocidad de la onda de sincronización).



**Figura 2.2:** Patrón espacio-temporal de las diferencias entre señales de los sistemas contiguos de una cadena abierta de 25 celdas caóticas. La onda de sincronización es observada a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$ , es decir, el instante de tiempo en el que dos sistemas consecutivos sincronizan ya que

$$\Delta x = |x_k - x_{k-1}|.$$

De acuerdo con las características que presenta el fenómeno de sincronización y las propiedades del comportamiento caótico, en los últimos años se ha considerado la posibilidad de que una aplicación potencial de dicho comportamiento y de su capacidad de sincronización podría darse en el campo de las comunicaciones o en el de procesamiento de señales [Cuomo & Oppenheim, 1993; Yang et al., 1997a; Yang & Chua, 1998; Wang et al., 1998].

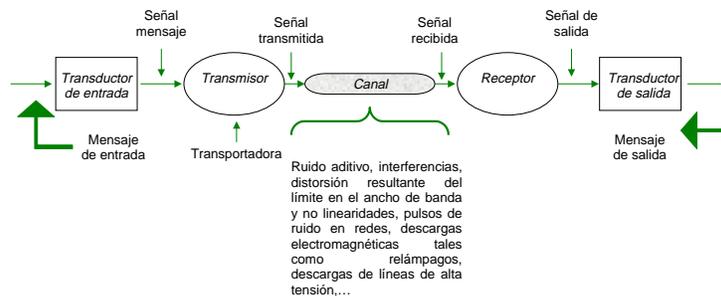
Otra interesante área de aplicación sería la criptografía. Por ejemplo, la parte no conducida del sistema caótico produce señales que por lo general presentan un espectro de banda ancha, similar al de ruido e igualmente difícil de predecir. De esta forma podrían ser utilizadas idealmente en contextos de ondas de enmascaramiento u ondas de modulación en técnicas de espectro expandido [Kocarev et al., 1992; Beth et al., 1994; Xiao et al., 1996].

# Capítulo 3

## Comunicaciones y Señales Caóticas

---

Es difícil imaginar cómo sería la vida moderna sin el fácil acceso a medios de comunicación fiables, económicos y eficientes. Por comunicación se entiende la conducción o transmisión de información de un lugar y un tiempo a otros. Ciertamente esta definición no es muy precisa, pero el tema de la comunicación es muy amplio y complejo. Los sistemas de comunicación se hallan dondequiera que se transmita información de un punto a otro. El teléfono, la radio y la televisión son ejemplos cotidianos de sistemas de comunicación. Hay sistemas más complicados que guían aviones, naves espaciales o trenes automáticos; mientras que otros proporcionan noticias de todo el mundo, a menudo por medio de satélites; la lista de ejemplos podría continuar indefinidamente. No es exagerado decir que los sistemas de comunicación actuales no sólo son necesarios para los negocios, la industria, la banca y la divulgación de información al público sino también esenciales para su bienestar.



**Figura 3.1:** Diagrama general de un sistema de comunicaciones.

En la Fig. 3.1 se muestran las unidades básicas comprendidas en un sistema de comunicación [Lucky, 1968; Ziemer, 1990; Stremler, 1993; Haykin, 1994; Dixon, 1994].

Aunque éste sugiere un sistema de comunicaciones entre dos puntos localizados remotamente, este mismo esquema es también aplicable para sistemas tales como el radar o el sonar en los cuales la señal de entrada y salida están localizadas en el mismo lugar. Independientemente de la aplicación y de la configuración, todos los sistemas de transmisión de información involucran en su esquema un transmisor, un canal y un receptor.

**Transductor de Entrada:** Los mensajes producidos por cualquier fuente han de ser convertidos por un transductor a una forma adecuada para el sistema de comunicaciones empleado en cada caso. Así en una comunicación eléctrica, las ondas de voz son convertidas a través de un micrófono en variaciones de voltaje. Esta señal será lo que en la Fig. 3.1 denotaremos como señal mensaje.

**Transmisor:** La finalidad del transmisor es acoplar el mensaje al canal. A menudo es necesario modular una onda portadora con la señal recibida del transductor. La modulación consiste en la variación de algún atributo de la señal portadora, tales como la amplitud, la fase o la frecuencia de acuerdo con una función de la señal mensaje. Otras funciones primarias del transmisor son filtrado, amplificación y acoplamiento de la señal modulada al canal.

**Canal:** Aunque los canales, en principio, pueden ser muy distintos dependiendo del sistema de comunicaciones que estemos tratando, todos ellos tienen una característica común: la degradación de la señal en su transmisión. Aunque la degradación de la señal puede ocurrir en cualquier punto del sistema de comunicación, ésta está inherentemente asociada al canal de forma única. La degradación a menudo es consecuencia del ruido y otras señales o interferencias, pero también se pueden incluir otros efectos de distorsión como pérdida de nivel de señal, caminos de transmisión múltiple y filtrado.

**Receptor:** La función del receptor es extraer el mensaje deseado de la señal recibida a través del canal para el transductor de salida. Aunque la amplificación es una de las primeras operaciones desempeñadas por el receptor, especialmente en comunicaciones de radio donde la señal suele llegar bastante debilitada, la principal función del receptor es demodular la señal recibida.

**Transductor de Salida:** El transductor de salida completa el sistema de comunicación. Este dispositivo convierte la señal eléctrica recibida a la forma deseada por el usuario del sistema.

### 3.1 Rendimiento en un Sistema de Comunicaciones

El medio de transmisión es la piedra angular del sistema, sin él no existirían problemas de comunicación. El medio de comunicación puede incluir la ionosfera, la troposfera, el espacio libre o simplemente una línea de transmisión. En todo caso en él se introducen la atenuación y la distorsión, así como las señales de ruido generadas en los medios y en los equipos de transmisión y recepción. De este modo, se puede entender al canal como la principal fuente de errores en un sistema de comunicaciones. Por ello, el problema fundamental de las comunicaciones será maximizar la efectividad de la transmisión a través del mismo.

El rendimiento de un sistema de comunicaciones digital es medido en términos de la tasa de bits en error o lo que es lo mismo la relación de bits erróneos detectados en el receptor, (*bit error rate*, *BER*). En general, la *BER* depende del método de modulación, del esquema de codificación, del tipo de onda usado, de la potencia del transmisor, de las características del canal y del esquema de demodulación.

La representación convencional del rendimiento de un sistema digital en un canal lineal contaminado por ruido muestra el *BER* frente a  $E_b/N_0$  donde  $E_b$  representa la energía por bit y  $N_0$  la densidad espectral de potencia del ruido introducido en el canal. De este modo obtenemos la eficiencia del sistema. Para un nivel de ruido dado, el *BER* puede ser reducido incrementando la energía asociada a cada bit, transmitiendo con mayor potencia o con un mayor periodo por bit. La meta en comunicaciones digitales es conseguir un determinado valor de *BER* con la mínima energía por bit posible.

Otra posible representación del rendimiento puede ser la que nos da el comportamiento del *BER* frente a la relación señal ruido *SNR*. Esta representación nos dará la sensibilidad del sistema. La sensibilidad podrá ser mejorada incrementando el periodo del bit a diferencia de la eficiencia que es independiente de dicho valor. La representación frente a la *SNR*, suele ser usada en sistemas de comunicación analógica, en este caso en lugar de hablar de la relación de bits erróneos, *BER*, será más correcto hablar de la relación de señal errónea, *SER*.

Generalmente dos clases de ruido pueden ser encontradas o diferenciadas en un canal de comunicaciones. El primero, ruido Gaussiano, será nuestra mayor preocupación a la hora de diseñar y evaluar moduladores y demoduladores para la transmisión de datos. Las fuentes de ruido Gaussiano son muchas e inevitables. En ellas se incluyen, entre otros, el ruido de disparo producido por los equipos de transmisión y recepción, el ruido térmico introducido en el medio de transmisión y la radiación recogida por la antena receptora. De acuerdo al teorema del límite central, cualquier ruido que resulta de los efectos combinados de muchas fuentes independientes tiende a ser distribuido de forma gaussiana. Como consecuencia de esta omnipresencia y debido a la relativa facilidad con la que se puede tratar matemáticamente, el ruido Gaussiano ha sido empleado casi exclusivamente en modelos de modulación de canal en la moderna teoría de las comunicaciones.

Un segundo tipo de ruido conocido como ruido de impulso es caracterizado por largos intervalos tranquilos, seguidos por picos de muy altas amplitudes que podrían ser predichos por leyes de distribución gaussiana o normal. Este tipo de ruido tiene como origen muchas fuentes naturales y otras debidas al hombre, incluyendo relámpagos, interrupciones transitorias, atenuaciones de microondas y golpes accidentales durante el mantenimiento del trabajo. En la red telefónica, por ejemplo, el ruido de impulso causa la mayoría de los errores en transmisión de datos a baja y media velocidad. La dificultad de medir y caracterizar matemáticamente este tipo de ruido ha impedido cualquier trabajo analítico significativo en este área, excepto con impulsos de alta densidad (donde el teorema del límite central empieza a aplicarse así que el ruido se aproxima al Gaussiano con pequeños términos de corrección). Sin embargo, el limitado trabajo analítico que ha sido desarrollado siempre ha mostrado que

si los sistemas de transmisión de datos son ordenados por su relativo rendimiento en presencia de ruido Gaussiano esta clasificación también será válida para ruido de impulso. Este mismo fenómeno ha sido observado también en los análisis experimentales con lo que se utilizará para justificar la utilización de ruido Gaussiano en los análisis de rendimiento.

Las razones para no incluir ruido de impulso en el modelo del canal para modulación siguen las obvias consideraciones de correcta caracterización y fácil tratamiento matemático.

### **3.2 Sistemas de Espectro Expandido**

En los últimos años ha surgido un creciente interés en sistemas que expanden intencionadamente su contenido de frecuencia. El objetivo de dichos sistemas es expandir de forma consciente el espectro de la señal para disminuir la densidad espectral transmitida hasta un nivel que se encuentre por debajo del nivel de ruido térmico de cualquier receptor no deseado. Además, estos sistemas se pueden utilizar como protección contra interferencias intencionadas [Dixon, 1994; Viterbi, 1995]. De este modo se entiende que la tecnología de espectro expandido haya sido usada primeramente en comunicaciones militares donde lo que se busca es la superación de los efectos de interferencias intencionadas, (*jamming*), y la cobertura de la señal de oyentes no deseados (*covertness*). Ambos propósitos pueden ser alcanzados expandiendo el espectro de la señal y haciéndola virtualmente indistinguible del ruido de fondo.

En respuesta a la creciente demanda de las comunicaciones móviles y portátiles, la tecnología digital de espectro expandido ha logrado una mayor eficiencia del ancho de banda permitiendo un incremento en el número de usuarios de un sistema multicanal con respecto a otras tecnologías tanto analógicas como digitales.

Literalmente un sistema de espectro expandido es aquel en el que la señal transmitida es expandida sobre una ancha banda de frecuencias, mucho más amplia que la mínima requerida

para transmitir la información que se desea enviar [Dixon, 1994].

Los sistemas convencionales de espectro expandido usan secuencias pseudoaleatorias de expansión para distribuir la energía de la señal de información sobre un ancho de banda mayor. La señal transmitida presenta un aspecto similar a una señal aleatoria de ruido dificultando la detección del mensaje, además dada su baja densidad espectral resulta difícil saturar la señal.

La base de la tecnología de espectro expandido es expresada por C. E. Shannon a través de la capacidad del canal.

$$C = w \log_2(1 + S/N) \quad (3.1)$$

donde  $C$  es la capacidad en bits por segundo,  $w$  el ancho de banda en hertzios,  $N$  la potencia del ruido y  $S$  la potencia de la señal. Esta ecuación muestra la relación entre la capacidad del canal para transmitir información libre de errores comparada con la relación señal-ruido existente en el canal y el ancho de banda usado para transmitir información.

Permitiendo a  $C$  ser la relación de información del sistema y cambiando las bases logarítmicas, se tiene que:

$$\frac{C}{w} = 1.44 \ln(1 + S/N) \quad (3.2)$$

y para  $S/N$  pequeños, por ejemplo, menores que 0.1 (tal como uno desearía para estar en un sistema *antijam*).

$$\frac{C}{w} = 1.44 \frac{S}{N} \quad (3.3)$$

Como

$$\ln\left(1 + \frac{S}{N}\right) = \frac{S}{N} - \frac{1}{2}\left(\frac{S}{N}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{S}{N}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{S}{N}\right)^4 \dots \left(-1 < \frac{S}{N} < 1\right) \quad (3.4)$$

por la expansión del logaritmo se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{N}{S} &= \frac{1.44w}{C} \approx w/C \\ w &= \frac{NC}{S}\end{aligned}\tag{3.5}$$

Así, se llega a que para una  $SNR$  dada se puede disminuir la relación de información errónea incrementando el ancho de banda usado para transferir información.

Los sistemas de espectro expandido aumentan de manera intencional el espectro modulado, independientemente de la modulación de datos. La utilización de espectro expandido permite compartir una banda dada para transmisiones múltiples con sólo una mínima interferencia entre usuarios. Este tipo de multiplexión se llama acceso múltiple por división de código (CDMA). El espectro expandido tiene ventajas en cuanto a comunicaciones seguras, sistemas de direccionamiento selectivo, protección contra perturbación de banda angosta y desvanecimiento selectivo [Viterbi, 1995].

Las señales caóticas presentan un ancho espectro, de ahí que se considere su utilización en los esquemas de comunicación con espectro expandido, ya que un sistema caótico se puede tratar como un caso especial de un generador de secuencias pseudoaleatorias con la principal diferencia de que un sistema caótico posee un número infinito de estados analógicos, mientras que un generador pseudoaleatorio presenta un número finito de estados digitales. Una secuencia aleatoria es producida visitando cada estado del sistema una vez de una manera determinista. Si tenemos un número finito de estados para visitar, la secuencia de salida será irremediamente periódica. En contrapartida, si disponemos de un generador caótico se podrá visitar un número infinito de estados de una manera determinista y por lo tanto producir una secuencia de salida que nunca se repita.

Con las técnicas de modulación y demodulación apropiadas, la naturaleza aparentemente aleatoria y las propiedades espectrales similares al ruido de las señales caóticas pueden ser usadas para proporcionar simultáneamente la expansión y modulación de una

transmisión. Es más, la simplicidad de los circuitos analógicos involucrados podrían incluso permitir alta velocidad y baja potencia en la transmisión.

### **3.3 Señales Caóticas en Comunicaciones**

#### **3.3.1 El Porqué de Usar Portadora Caótica**

Los esquemas de comunicaciones digitales convencionales hasta ahora usaban señales sinusoidales obteniendo excelentes resultados además de gozar de la ventaja de una fácil implementación, cabe preguntarse entonces, ¿por qué cambiar la portadora?.

Cuando se usa una portadora sinusoidal, la potencia transmitida se concentra en una estrecha banda, dando lugar a una elevada densidad espectral de potencia y esto implica una serie de desventajas.

La propagación multicamino presente en la mayoría de la aplicaciones de radio como por ejemplo en la telefonía móvil o en las redes LAN provoca una importante atenuación sobre la estrecha banda de frecuencias. Lo que se traduce en una muy baja  $SNR$  llegando incluso a producir pérdidas en sistemas de banda estrecha. Por otro lado la alta densidad de potencia transmitida en los sistemas de banda estrecha da lugar a altos niveles de interferencia con otros usuarios dificultando las comunicaciones de radioaficionados y facilitando la probabilidad de su interceptación. Además las señales de banda estrecha son sensibles a interferencias de banda estrecha.

Todos estos inconvenientes pueden ser solventados como vimos en la sección anterior a través de las comunicaciones de espectro expandido, donde además de los esquemas convencionales de modulación digital se usa una secuencia pseudoaleatoria para expandir el espectro de la señal transmitida. Sin embargo, las comunicaciones de espectro expandido requieren una circuitería adicional para los procesos de expansión y compresión. Por ello

las señales caóticas, que poseen un espectro de banda ancha y pueden ser generadas con una circuitería relativamente sencilla, se consideran como la solución idónea al coste de las comunicaciones de banda ancha [Halle et al., 1993].

Las primeras intrusiones del caos en el campo de las comunicaciones tuvieron lugar tras el descubrimiento del fenómeno de sincronización caótica presentado en el capítulo 2. La capacidad de sincronizar dos señales caóticas permitía la utilización de dichas señales en receptores coherentes. Desde entonces, muchos han sido los trabajos publicados en los que se presentan diferentes esquemas de comunicación basados en el caos, todos ellos con ideas innovadoras y la mayoría de ellos apoyándose en las ventajas de la sincronización [Parlitz et al., 1992; Yang & Chua, 1997; Mariño et al., 1999; Minai & Anand, 1999a;1999b]. Una de las facetas que también se pretende explotar en el campo de las comunicaciones es la de la seguridad en las mismas. Muchos son los trabajos que presentan al caos como una función de encriptación capaz de salvaguardar la información de forma segura e inviolable, sin embargo, continuamente surgen trabajos capaces de violar dicha seguridad [Short, 1994; Pérez & Cerdeira, 1995; Zhou & Chen, 1997; Yang et al., 1998b].

La idea de codificar información en series temporales caóticas se ha propuesto como una prometedora herramienta en el campo de las comunicaciones seguras. Siguiendo esta idea se propusieron diferentes aproximaciones con vista a su implementación y aplicación experimental. Sin embargo, el problema de extraer información enmascarada con caos ha sido discutido desde diferentes perspectivas. Así Pérez y Cerdeira, muestran que es posible encontrar algún mapa de retorno adecuado que permita que la información sea extraída [Pérez & Cerdeira, 1995], Zhou y Chen usan una aproximación similar cuando la información es enmascarada en mapas simétricos [Zhou & Chen, 1997]. Esquemas recientes, basados en redes neuronales y funcionales proporcionan un método global para desenmascarar información basado en la aproximación a la estructura determinista del sistema caótico usado para codificar información [Yang et al., 1998a; Guedes de Oliveira & Jones, 1998; Castillo & Gutiérrez, 1998]. Técnicas basadas en el análisis del espectrograma de la señal transmitida permiten la decodificación de mensajes binarios [Yang et al., 1998b]. Estas técnicas y otras

muchas no mencionadas [Short, 1994; 1996], ponen de manifiesto la vulnerabilidad de los actuales esquemas a la decodificación por parte de receptores no deseados. De todos modos, la verdadera importancia de usar señales caóticas no radica en su faceta encriptadora, sino en su ancho espectro de banda, el cual realmente juega un papel importante dentro del campo de las comunicaciones de cara al desarrollo de las comunicaciones de espectro expandido.

Nuestro cometido será el estudio detenido de diferentes esquemas de sincronización caótica de cara a una implementación real, porque como en todo la sincronización no sólo tiene ventajas sino que también presenta una serie de inconvenientes.

### **3.3.2 El Porqué de la Sincronización Caótica**

En el capítulo anterior se han discutido los aspectos más generales de la sincronización caótica y los modos de conseguirla. Una combinación de sincronización e imprevisibilidad de sistemas no lineales determinísticos conduce a algunas aplicaciones de comunicaciones potencialmente interesantes.

Los primeros intentos para usar señales aleatorias en comunicaciones seguras fueron probablemente debidas a Vèrnam, las cuales datan de 1926 [Vèrnam, 1926; Lakshmanan & Murali, 1996]. Desde entonces tal uso ha supuesto una considerable relevancia en campos como la criptografía. La importancia del concepto de sincronización caótica en comunicaciones seguras ha sido rápidamente destacada por el procesamiento de señal, circuitos y comunicaciones de sistemas. En particular, Cuomo y Oppenheim han presentado algunas importantes aplicaciones en forma de modulación y enmascaramiento caótico y *Chaotic switching* [Cuomo & Oppenheim, 1993]. Específicamente, estos autores han mostrado como el concepto de sincronización puede ser usado para enmascarar información añadiendo una señal caótica a una señal de voz que se desee transmitir. La señal caótica usada como una señal ruidosa es recuperada por el receptor gracias al fenómeno de sincronización, la señal de voz se obtiene por simple sustracción de la señal recibida de la señal original generada en el receptor. Más recientemente, Kocarev ha aplicado las ideas de Pecora y Carroll

y de Cuomo y Oppenheim en el contexto del enmascaramiento caótico. Una variación de la transmisión enmascarada podría ser la de un mensaje binario producido gracias a la variación de un determinado parámetro del sistema [Kocarev et al., 1992; Dedieu et al., 1993].

En particular, dadas las características de las señales caóticas existe un enorme interés en la explotación de las propiedades del caos en comunicaciones de espectro expandido [Halle et al., 1993; Hayes, 1993]. La principal ventaja de la sincronización de cara a su aplicación en el campo de las comunicaciones es que posibilita la implementación de receptores coherentes [Lange 1966; Viterbi, 1996]. La característica más significativa de un receptor de este tipo, en un sistema convencional con una portadora sinusoidal, es que recuperando una única señal, la portadora, y regenerando la función cuadratura base, por medio de un simple desplazador de fase, puede generarse un par de funciones base ortonormales. Con ello se posibilita la utilización de un enorme conjunto de señales (256 en *QAM*, modulación de amplitud en cuadratura, por ejemplo). Además, los receptores coherentes presentan un mejor comportamiento ante el ruido que su contrapartida no coherente.

Sin embargo, no todo son ventajas, existen costes significativos asociados al fenómeno de la sincronización, así se tiene el tiempo de sincronización y graves problemas con la pérdida de sincronización. Es más, recientes estudios sugieren que los esquemas de sincronización no se muestran lo suficientemente robustos para ser usados en canales ruidosos [Kolumbán et al., 1997; 1998].

Los receptores coherentes, explotando el fenómeno de sincronización, ofrecen el mejor rendimiento siempre y cuando la sincronización pueda ser mantenida. Sin embargo, no ofrecen un rendimiento óptimo si la  $SNR$  es baja, las condiciones de propagación son pobres, las propiedades del canal varían temporalmente o si la probabilidad de pérdida de señal es relativamente alta. En estos casos un esquema de modulación más robusto tal como *FSK* (conmutación frecuencia) con un receptor no coherente sería el más adecuado. Una desventaja a mayores de un receptor coherente desde el punto de vista de la implementación es que generalmente requiere una circuitería más complicada que su contrapartida no coherente.

# Capítulo 4

## Esquemas de Sincronización y Modulación

---

Dados los numerosos esquemas de sincronización caótica que continuamente surgen con vistas a una aplicación real en el campo de las comunicaciones [Kocarev et al., 1992; Halles et al., 1994; Alsing et al., 1997; Lee et al., 1997] y siendo conscientes de las limitaciones del uso de la sincronización caótica en un sistema de comunicaciones, se propuso analizar el rendimiento de algunos de estos esquemas en un canal ruidoso [Lorenzo et al., 1998]. En particular se eligieron tres esquemas: el esquema de Pecora y Carroll (por ser de los primeros en aparecer), un segundo esquema en el que la sincronización se lleva a cabo a través de una señal caótica compleja y, por último, un tercer esquema basado en el seguimiento o control del error de sincronización. A lo largo de este capítulo se presentarán los tres esquemas y se analizará su rendimiento en un canal perturbado por ruido blanco Gaussiano. Una vez comprobados dichos esquemas, se procederá a la elección del más adecuado para ser implementado en un sistema de comunicaciones y se estudiará su eficiencia y sensibilidad para distintos esquemas de modulación.

### 4.1 Sincronización con el Esquema de Pecora y Carroll

Tal vez por ser el pionero en su estudio cabe hacer una alusión especial al acoplamiento presentado por Pecora y Carroll [Pecora & Carroll, 1990; 1991].

En el esquema de sincronización propuesto por Pecora y Carroll un sistema dinámico caótico de dimensión  $N$ ,

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.1}$$

con una salida escalar  $g(t) = h(x)$ , es dividido en dos subsistemas  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, g(t))\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde  $x = (x_1, x_2)$ , y  $g(t) = h(x_1(t), x_2(t))$  es la salida escalar del sistema conductor. La división del sistema se hace de tal modo que los exponentes de Lyapunov condicionales (CLEs) del segundo subsistema son negativos. De este modo dichos exponentes caracterizan la estabilidad del segundo subsistema cuando es conducido por la señal  $g(t)$ . En el caso de que todos los exponentes sean negativos la trayectoria  $x_2(t)$  será estable. Esto significa que los estados de dos o más copias del segundo subsistema sincronizarán idénticamente al ser conducidos por la misma señal  $g(t)$ . En términos de sistemas de comunicaciones, el sistema conductor produce una función base caótica  $g(t)$  que es asumida por simplicidad a ser transmitida directamente a través del canal de comunicaciones y recibida, ruidosa y distorsionada, como  $r(t)$ . Dado que el objetivo de la sincronización en un receptor coherente es estimar la función base original  $g(t)$ , a partir de  $r(t) \neq g(t)$ , el papel que debe jugar el sistema respuesta es el de recuperador de dicha función base original. La recuperación de  $x_2$  no es suficiente sino que es necesario recuperar tanto  $x_1$  como  $x_2$ . Por ello, se extenderá el caso a un sistema de sincronización en cascada añadiendo un segundo subsistema al primero.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f_2(\hat{x}_2, r(t))\end{aligned}\tag{4.3}$$

De nuevo si los CLEs son todos negativos y  $\hat{x}_2(0)$  es suficientemente cercano a  $x_2(0)$ , entonces ambas señales convergerán asintóticamente y lo mismo ocurrirá para  $\hat{x}_1$  y  $x_1$ . De este modo  $\hat{g}(t) = h(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))$  convergerá a  $g(t)$  recuperándose la función base original a partir de la señal transmitida  $r(t)$ .

El esquema de sincronización de Pecora y Carroll [Kolumbán et al., 1997] se fundamenta en una técnica de estimación en lazo abierto, donde lo que se pretende es reconstruir el estado  $x$  del transmisor a partir de una versión ruidosa  $r(t)$  de una función base  $g(t)$ . Los estimadores en lazo abierto son especialmente sensibles al ruido. La Fig. 4.1 muestra el esquema de sincronización desarrollado por Pecora y Carroll ampliado al caso de sincronización en cascada para su aplicación a las comunicaciones en un sistema tridimensional.

**Sistema Conductor :**

$$\dot{x} = f(x, y, z)$$

$$\dot{y} = g(x, y, z)$$

$$\dot{z} = h(x, y, z)$$

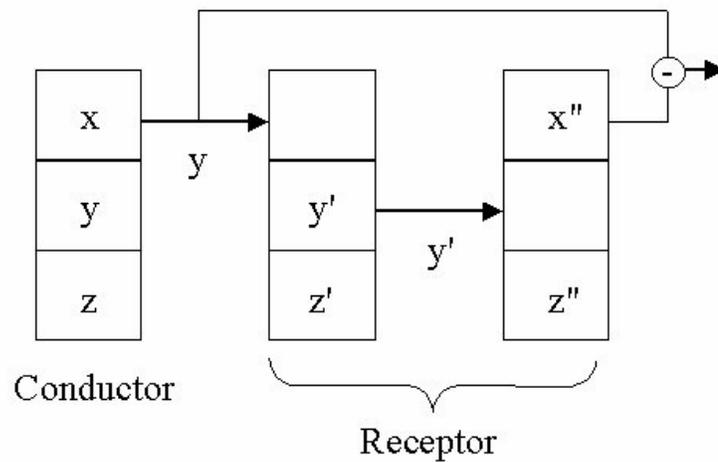
**Sistema Receptor :**

$$\dot{x}'' = f(x'', y', z'')$$

$$\dot{y}' = g(x, y', z')$$

$$\dot{z}' = h(x, y', z')$$

$$\dot{z}'' = g(x'', y', z'')$$



**Figura 4.1:** Diagrama del esquema de sincronización en cascada de Pecora y Carroll. En este caso  $x_1 = f(x)$ ,  $x_2 = f(y', z')$ ,  $\hat{x}_1 = f(y')$ ,  $\hat{x}_2 = f(x'', z'')$ .

### 4.1.1 Modelo Numérico

La implementación de este esquema de cascada presentado por Pecora y Carroll se ha llevado a cabo con el circuito de Chua (ver apéndice A). El comportamiento dinámico es descrito por el siguiente sistema de ecuaciones:

Sistema Conductor:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{v_2 - v_1}{R} - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{v_1 - v_2}{R} + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_2 - r_0 i_L \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sistema Respuesta:

*Subsistema 2:*

$$\begin{aligned} C_2 \frac{d\hat{v}_2}{dt} &= \frac{r(t) - \hat{v}_2}{R} + \hat{i}_L \\ L \frac{d\hat{i}_L}{dt} &= -\hat{v}_2 - r_0 \hat{i}_L \end{aligned} \quad (4.5)$$

*Subsistema 1:*

$$C_1 \frac{d\hat{v}_1}{dt} = \frac{\hat{v}_2 - \hat{v}_1}{R} - g(\hat{v}_1) \quad (4.6)$$

donde  $v_1$ ,  $v_2$  representan la tensión que cae en los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente, y  $i_L$  es la corriente que atraviesa la bobina  $L$  del circuito de Chua del sistema conductor. La función  $g(v) = G_b v + 0.5(G_a - G_b)(|v + B_p| - |v - B_p|)$  es la función lineal a trozos característica del diodo de Chua. Las variables  $\hat{v}_1$ ,  $\hat{v}_2$ , e  $\hat{i}_L$ , representan las variables análogas del circuito respuesta. Por último,  $r(t)$  es la señal de sincronización que conecta al sistema conductor con el sistema conducido.

## 4.2 Sincronización a través de Señales Caóticas Complejas

El segundo esquema de sincronización escogido para su análisis es un esquema de sincronización *maestro-esclavo* a través de una señal caótica compleja. En este esquema el proceso de sincronización con sólo una variable ha sido extendido al caso en el que las variables del sistema conductor son adecuadamente combinadas para dar lugar a una señal caótica compleja que conduzca el sistema respuesta. Esta combinación puede ser considerada como una llave de encriptación que introduce una complejidad añadida a la modulación caótica mejorando la robustez del esquema de sincronización. Diferentes combinaciones de las variables del esquema conductor han sido consideradas buscando el mejor rendimiento de la sincronización ante la corrupción del canal por ruido blanco Gaussiano, AWGN.

Seguidamente se presenta la idea básica para construir el esquema de sincronización a través de una señal caótica compleja [Murali & Lakshmanan, 1997a, 1997b]. Se considera un sistema no lineal  $N$  - dimensional exhibiendo comportamiento caótico.

$$\dot{\vec{z}} = f(\vec{z}) \quad (4.7)$$

El sistema de sincronización presenta la siguiente forma:

Sistema Conductor:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= f(\vec{x}) + \epsilon(v(t) - x_j(t)) \\ \dot{\vec{y}} &= f(\vec{y}) + \epsilon(u(t) - y_j(t)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sistema Respuesta:

$$\dot{\vec{x}}^r = f(\vec{x}^r) + \epsilon^r(v^r(t) - x_j^r(t)) \quad (4.9)$$

donde  $f(\vec{x})$ ,  $f(\vec{y})$ ,  $f(\vec{x}^r)$  son sistemas idénticos y  $\epsilon$  y  $\epsilon^r$  representan los valores de los parámetros de acoplamiento unidireccional. Cuando  $v(t) = y_j(t)$  y  $u(t) = x_j(t)$ , los dos

sistemas dinámicos constitutivos del sistema conductor son acoplados mutuamente a través de la variable  $j$ -ésima [Chua et al., 1993a; 1993b; Del Rio et al., 1994]. Para un valor adecuado de  $\epsilon$ , ambos subsistemas del sistema conductor (Eq. (4.7)) sincronizan uno con el otro siendo considerados como un único sistema.

Una situación similar se da en la Eq.(4.9), donde ahora  $v^r(t) = v(t)$  es la señal de control y  $\epsilon^r$  el parámetro de acoplamiento unidireccional.

La sincronización entre los subsistemas del conductor ocurre si el sistema dinámico que describe la evolución de la diferencia  $\vec{e} = \vec{x} - \vec{y}$ ,

$$\dot{\vec{e}} = \dot{\vec{x}} - \dot{\vec{y}} \quad (4.10)$$

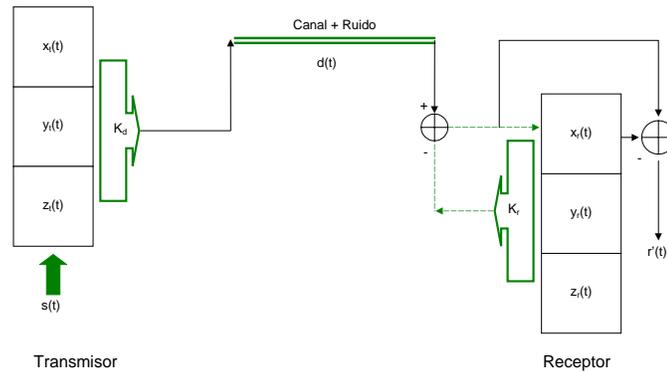
tiene un punto fijo estable en el origen  $\vec{e} = 0$ . Análogamente la sincronización entre el sistema conductor y el sistema respuesta, Eqs. (4.8) y (4.9) respectivamente, requiere que

$$\dot{\vec{e}}^r = \dot{\vec{x}}^r - \dot{\vec{y}} \quad (4.11)$$

tenga un punto fijo estable en el origen  $\vec{e}^r = 0$ . Esto implica que el mayor exponente de Lyapunov de Eq.(4.9) sea negativo bajo la influencia de la señal caótica  $v^r(t)$  cuando ésta actúe en la variable  $j$ -ésima del sistema respuesta. Esto puede ser probado con más exactitud usando las funciones globales de Lyapunov [Lakshmanan & Murali, 1996].

Como ya se mencionó anteriormente, el esquema que aquí se trata se caracteriza por la extensión de la sincronización con una variable ( $v^r(t) = y_j(t)$ ) al caso en el que la señal de control o sincronización es una señal caótica compleja, resultado de la combinación de las distintas variables del sistema conductor. Las combinaciones que se lleven a cabo podrán ser tanto lineales como no lineales y un lazo de realimentación será implementado en el sistema respuesta para conseguir la sincronización entre las variables del sistema respuesta y las variables del sistema conductor [Murali & Lakshmanan, 1997a, 1997b].

El modelo puede ser esquematizado tal y como se ve en la Fig. 4.2.



**Figura 4.2:** Modelo de sincronización con una señal caótica compleja.

### 4.2.1 Modelo Numérico

El circuito que se ha usado para implementar el esquema de sincronización presentado en la sección anterior es el bien conocido circuito de Chua [Chua et al., 1993a; 1993b] (ver apéndice A). La razón de esta elección se basa en su sencilla implementación real.

Las ecuaciones del modelo son presentadas como

Sistema Conductor:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{v_2 - v_1}{R} - g(v_1) + \frac{v(t) - v_1}{R_e} \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{v_1 - v_2}{R} + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_2 - r_0 i_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 \frac{dv_1'}{dt} &= \frac{v_2' - v_1'}{R} - g(v_1') + \frac{u(t) - v_1'}{R_e} \\
C_2 \frac{dv_2'}{dt} &= \frac{v_1' - v_2'}{R} + i_L' \\
L \frac{di_L'}{dt} &= -v_2' - r_0 i_L'
\end{aligned} \tag{4.12}$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  representan la tensión que cae en los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente, y  $i_L$  es la corriente que atraviesa la bobina  $L$  del primer circuito de Chua del sistema conductor. Las variables  $v_1'$ ,  $v_2'$  e  $i_L'$  son las correspondientes al segundo circuito de Chua constitutivo del sistema conductor. La función lineal a trozos característica del diodo de Chua viene dada por  $g(v) = G_b v + 0.5(G_a - G_b)(|v + B_p| - |v - B_p|)$ . Si  $v(t) = v_1'(t)$  y  $u(t) = v_1(t)$  entonces para los valores apropiados de la resistencia de acoplamiento  $R_e$  ambos circuitos sincronizarán. Después de la sincronización  $v_1 = v_1'$ ,  $v_2 = v_2'$ , y  $i_L = i_L'$ .

Como señal de transmisión se considerará la señal caótica compleja,  $K_d = h(v_1', v_2', i_L')$ , donde  $h(\cdot)$  puede ser una combinación lineal o no lineal de las variables del sistema conductor.

Señal Transmitida a través del canal de información:

$$d(t) = v(t) + K_d + \zeta(t) \tag{4.13}$$

donde  $\zeta(t)$  representa ruido blanco Gaussiano de media cero, con la siguiente función de correlación  $\langle \zeta(t), \zeta(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$ . Un lazo de realimentación adecuado es implementado en el receptor con  $K^r = h(v_1^r, v_2^r, i_L^r)$  y  $v^r(t) = d(t) - K^r$  para conseguir la sincronización entre el sistema transmisor y el sistema receptor.

Sistema Respuesta:

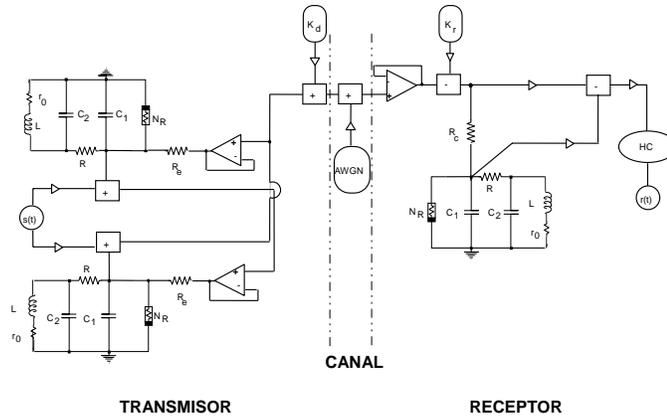
$$\begin{aligned}
C_1 \frac{dv_1^r}{dt} &= \frac{v_2^r - v_1^r}{R} - g(v_1^r) + \frac{v^r(t) - v_1^r}{R_e} \\
C_2 \frac{dv_2^r}{dt} &= \frac{v_1^r - v_2^r}{R} + i_L^r
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$L \frac{di_L^r}{dt} = -v_2^r - r_0 i_L^r$$

donde  $v_1^r$ ,  $v_2^r$  e  $i_L^r$  son la caída de tensión en  $C_1$  y  $C_2$ , y la corriente a través de  $L$ , respectivamente, del circuito de Chua del sistema respuesta o receptor.

### 4.2.2 Montaje Experimental

La implementación experimental del esquema descrito en la sección anterior se ha llevado cabo con circuitos de Chua [Chua et al., 1993a; 1993b] (ver apéndice A). La Fig. 4.3 muestra el esquema del montaje experimental.

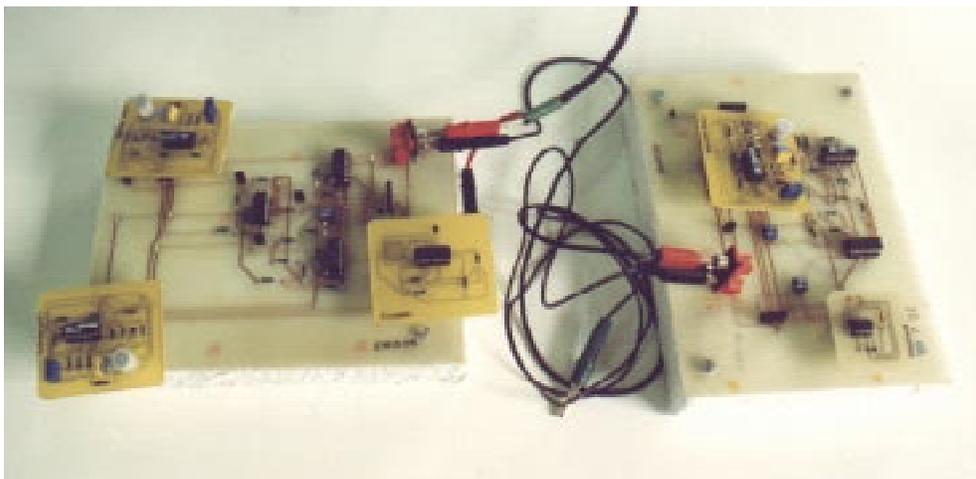


**Figura 4.3:** Montaje experimental. Los componentes son definidos como  $C_1 = 10nF$ ,  $C_2 = 100nF$ ,  $L = 10mH$ ,  $r_0 = 20\Omega$ ,  $R = 1.1K\Omega$ ,  $R_c = R_e = 2.5K\Omega$ . Los buffers han sido realizados con operacionales AD713.  $K_d$  y  $K_r$  son las llaves de encriptación del transmisor y receptor respectivamente. AWGN representa una fuente de ruido blanco gaussiano y HC un comparador de histéresis.

Los bloques  $K_d$  y  $K_r$  representan las combinaciones de las variables para generar

y descomponer la señal caótica compleja, respectivamente, AWGN es una fuente de ruido blanco Gaussiano y HC un comparador de histéresis.

En nuestro sistema los parámetros del circuito de Chua fueron fijados a ser:  $C_1 = 10nF$ ,  $C_2 = 100nF$ ,  $R = 1.1K\Omega$ ,  $L = 10mH$ ,  $r_0 = 20\Omega$  (valor de la resistencia interna de bobina en el circuito físico),  $G_a = -1.143mS$ ,  $G_b = -0.7143mS$ , y  $B_p = 1V$ . Las tolerancias de los componentes usados son 1%, 5% y 10% para resistencias, condensadores y bobinas, respectivamente. Para estos parámetros el circuito de Chua exhibe un atractor caótico denominado *double-scroll*. La introducción del ruido en el montaje se lleva a cabo con un sumador.



**Figura 4.4:** Fotografía del montaje utilizado para la toma de datos experimental.

El diseño de dicho montaje fue llevado a cabo con el simulador Orcad sobre 2 circuitos impresos independientes, transmisor y receptor, posibilitando las entradas y salidas apropiadas para la toma de datos. El diseño se construyó lo más versátil posible con vistas a cambios en la configuración de la encriptación, en la introducción del ruido y en la configuración del canal. El circuito fue muestreado con un osciloscopio digital (Hewlett-Packard 54825A) con una

relación de muestreo máxima de  $2 \times 10^9$  muestras por segundo, una resolución de 8 bit A/D, y una longitud de registro de 32000 puntos. El aspecto final del montaje se puede ver en la Fig. 4.4. El ruido Gaussiano ha sido obtenido de un generador de funciones (Hewlett-Packard 33120A) con distribución gaussiana y media cero tal y como se puede ver en el apéndice B.

### 4.3 Sincronización con Realimentación de Salida Dinámica

El tercer esquema de sincronización que se ha considerado ha sido el esquema de sincronización *maestro-esclavo* para sistemas de Lur'e [Suykens & Vandewalle, 1997; Suykens et al., 1997b] propuesto por J.A.K. Suykens *et al.* en 1997, que se basa en la modulación de un vector campo por medio de una señal que actúa como mensaje. En este esquema se introduce una nueva interpretación de la sincronización basada en el seguimiento del error de sincronización [Suykens et al., 1997a; Suykens et al., 1997c]. El papel del esquema de sincronización es minimizar la influencia de la señal externa sobre la salida regulada. La señal de entrada externa contiene el mensaje y las perturbaciones del canal. El diseño de este esquema de sincronización se basa en desigualdades de matrices que siguen las condiciones de difusividad con ganancia finita  $L_2$  del esquema de sincronización [Curran & Chua, 1997; Curran et al., 1997]. El siguiente sistema de ecuaciones representa este tercer esquema,

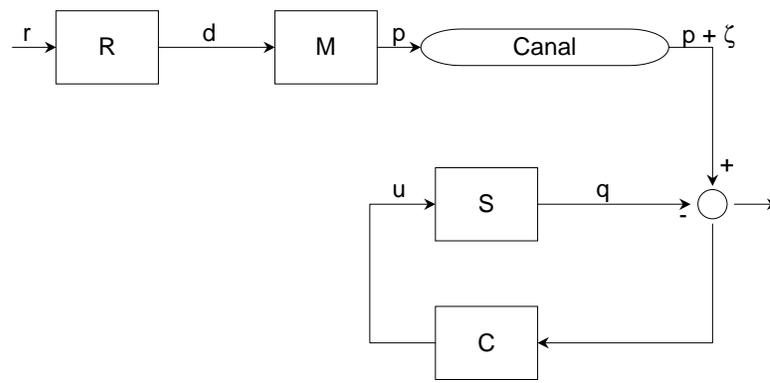
$$\begin{aligned} M \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + B\sigma(Cx) + Dd \\ p = Hx \end{array} \right. \\ S \left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = Az + B\sigma(Cz) + Fu \\ q = Hz \end{array} \right. \\ C \left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho} = E\rho + G(p + \varsigma - q) \\ u = M\rho + N(p + \varsigma - q) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde M representa el sistema *Maestro*, S el sistema *Esclavo* y C el *Controlador* de realimentación de la salida dinámica lineal. Los subsistemas tienen los vectores de estado  $x, z \in R^n$ ,  $\mu \in R^{n_r}$ ,  $\rho \in R^{n_c}$  y los vectores de salida  $p, q \in R^l$ ,  $u \in R^m$ ,  $d \in R$ . Por último,  $\varsigma \in R^l$  corresponde a una entrada perturbadora ( $l, m \leq n$ ).

En el transmisor o sistema *maestro* se lleva a cabo la aplicación de una transformación lineal  $H \in R^{l \times n}$  sobre el vector  $x$ . El vector resultante  $p$  es la señal transmitida a lo largo del canal que se presenta como un canal ruidoso perturbado por la señal  $\varsigma$ . En el sistema respuesta o *esclavo*,  $S$ , se aplica una realimentación con salida dinámica teniendo en cuenta la diferencia entre las entradas  $p$  y  $q$  del controlador descrito por el sistema de matrices  $E \in R^{n_c \times n_c}$ ,  $G \in R^{n_c \times l}$ ,  $M \in R^{m \times n_c}$ ,  $N \in R^{m \times l}$  y  $F \in R^{n \times m}$ . Por otro lado, los sistemas de Lur'e vienen dados por los sistemas de matrices  $A_1, A_2 \in R^{n \times n}$ ,  $B_1, B_2 \in R^{n \times n_h}$  y  $C_1, C_2 \in R^{n_h \times n}$  donde  $n_h$  corresponde al número de unidades escondidas. La no linealidad  $\sigma(\cdot) : R^{n_h} \rightarrow R^{n_h}$  se asume perteneciente al intervalo  $[0, k]$ . En el sistema *maestro* o transmisor el vector campo es modulado por medio del término  $Dd$  con  $D \in R^{n \times l}$ . En los sistemas de Lur'e caóticos la norma de  $D$  es elegida lo suficientemente pequeña, comparada con las otras señales del sistemas dinámico, para esconder la señal mensaje dentro del atractor caótico.

Para este caso particular, el controlador diseñado basado en un problema no lineal de optimización que tiene en cuenta el ruido del canal [Suykens et al., 1997a] corresponde a un controlador de primer orden con los siguientes valores para sus parámetros  $(E, G, M, N) = (-0.1403, 0.6492, -0.8758, 9.9394)$ . El parámetro  $\varsigma$  representa el ruido blanco Gaussiano que contamina el canal de transmisión.

De una manera esquemática la Fig. 4.5 muestra los distintos bloques dados por el sistema de ecuaciones. El vector campo de modulación es aplicado a  $M$  por medio de la señal  $d$ , la cual es la salida del filtro  $R$  con un mensaje de entrada  $r$ . Las salidas de  $M$  y  $S$  son  $p$  y  $q$ , las cuales son transformaciones lineales de las variables de estado  $x$  y  $z$ , respectivamente. La señal  $p$  se envía a través del canal y se corrompe por medio de la señal de ruido  $\varsigma$ . Una señal continua definida a partir del error de precisión en la sincronización del esquema conduce el sistema  $S$  con la ayuda del controlador  $C$ .



**Figura 4.5:** Esquema de sincronización.  $R$  representa un filtro pasabajas que introduce la señal  $r$  en el transmisor,  $M$  representa el transmisor o sistema maestro,  $S$  el sistema respuesta o esclavo,  $C$  el controlador y  $\zeta$  el ruido que contamina al canal.

El objetivo principal de este esquema de sincronización es el diseño de un controlador  $C$  tal que el error de sincronización  $e_s$ , definido como  $e_s = x - z$ , tienda a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 4.3.1 Modelo Numérico

En esta sección se aplica el método de sincronización con realimentación de salida dinámica al circuito de Chua. Si consideramos la forma adimensional de las ecuaciones del circuito de Chua (ver apéndice A) tendremos,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha[x_2 - h(x_1)] \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 \end{cases} \quad (4.16)$$

donde  $h(x_1) = m_1 x_1 + \frac{1}{2} (m_0 - m_1) [|x_1 + c| - |x_1 - c|]$  y los parámetros  $(\alpha, \beta, m_0, m_1, c)$  toman, respectivamente, los valores  $(9, 14.286, -1/7, 2/7, 1)$  que nos dan comportamiento caótico sobre un atractor *double-scroll*. El rango de la no linealidad  $\sigma(x_1) = 0.5 (|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$  es el intervalo  $[0,1]$ .

El circuito de Chua puede ser interpretado como un sistema de Lur'e  $\dot{x} = Ax + B\sigma(Cx)$  donde

$$A = \begin{bmatrix} -am_1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -a(m_0 - m_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [ 1 \quad 0 \quad 0 ] \quad (4.17)$$

### 4.3.2 Montaje Experimental

La construcción de este esquema se ha llevado a cabo con circuitos de Chua dada su fácil implementación. Las ecuaciones que definen el montaje son,

Sistema Transmisor:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{v_2 - v_1}{R} - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{v_1 - v_2}{R} + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_2 - r_0 i_L \end{aligned} \quad (4.18)$$

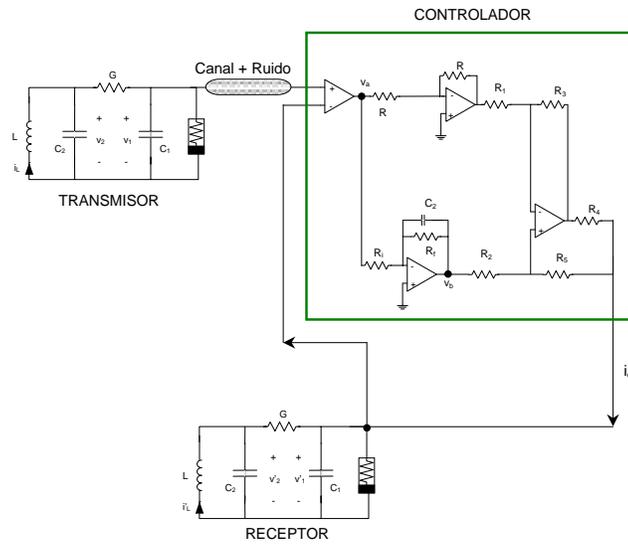
Controlador:

$$\begin{aligned} v_a &= v_1 - v_1' \\ C_2 \frac{dv_b}{dt} &= -\frac{v_b}{R_f} - \frac{v_a}{R_i} \\ i_e &= \frac{v_b + v_a}{R_4} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sistema Receptor:

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dv'_1}{dt} &= \frac{v'_2 - v'_1}{R} - g(v'_1) + I_{e1} \\
 C_2 \frac{dv'_2}{dt} &= \frac{v'_1 - v'_2}{R} + i'_L \\
 L \frac{di'_L}{dt} &= -v'_2 - r_0 i'_L
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

La función lineal a trozos característica del diodo de Chua viene dada por  $g(v) = G_b v + 0.5(G_a - G_b)(|v + B_p| - |v - B_p|)$ . La Fig. 4.6 muestra el esquema del montaje experimental.



**Figura 4.6:** Montaje experimental. Los componentes utilizados son:  $C_1 = 10nF$ ,  $C_2 = 90nF$ ,  $L = 12.857mH$ ,  $G = 0.7mS$ ,  $R_f = 10182.26\Omega$ ,  $R_i = 24973.46\Omega$ ,  $R_4 = 1293.55\Omega$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = R = 10k\Omega$ ,  $R_5 = 8706.45\Omega$ .

#### 4.4 Resultados de la Sincronización

Una vez presentados los modelos de sincronización, seguiremos con el estudio de su rendimiento cuando el canal de comunicación es contaminado con ruido Gaussiano. Las razones de usar este tipo de ruido han sido ya dadas en el capítulo anterior. En el caso particular del esquema de sincronización a través de señales caóticas complejas, dicho estudio será llevado a cabo para diferentes combinaciones de las variables del sistema conductor, en busca de la más eficiente.

El rendimiento del esquema de sincronización se ha calculado en base al estudio de la pérdida de sincronización experimentada por el esquema cuando el canal es distorsionado por ruido blanco Gaussiano. La pérdida de sincronización la caracterizaremos por el parámetro  $L_s$  definido a través de la siguiente expresión,

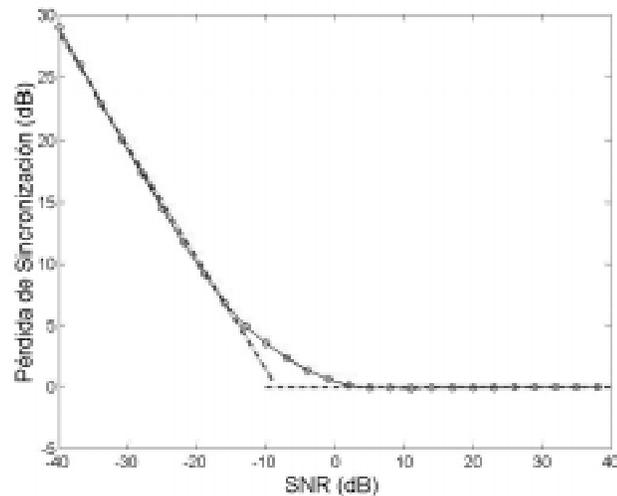
$$L_s = 10 \log_{10} \left( \frac{\int \hat{g}(g + \zeta(t)) dt}{\int g^2 dt} \right) \quad (4.21)$$

donde  $\zeta(t)$  representa el ruido del canal,  $g(t)$  la señal del sistema conductor y  $\hat{g}(t)$  la señal en el sistema respuesta. Si desarrollamos la expresión anterior, nos queda,

$$\begin{aligned} L_s &= 10 \log_{10} \left( \frac{\int (\hat{g}g + \hat{g}\zeta(t)) dt}{\int g^2 dt} \right) \\ &\stackrel{e_s(t) = \hat{g}(t) - g(t)}{=} 10 \log_{10} \left( \frac{\int (e_s(t)g + gg + e_s(t)\zeta(t) + g\zeta(t)) dt}{\int g^2 dt} \right) \quad (4.22) \\ &= 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{\int (e_s(t)g + e_s(t)\zeta(t) + g\zeta(t)) dt}{\int g^2 dt} \right) \end{aligned}$$

En el caso de que el canal se encuentre libre de ruido,  $\zeta(t) = 0$ , y de que la sincronización sea perfecta, es decir, el error de sincronización  $e_s(t) = 0$ , la pérdida de sincronización será nula. Probablemente existan otros parámetros más adecuados para precisar la pérdida de sincronización de un sistema, pero la elección de éste se basa en su fácil interpretación.

A continuación se presentarán los resultados obtenidos en el análisis de la robustez de los tres esquemas de sincronización en términos de la pérdida de sincronización. Para ello lo que se hizo fue contaminar el canal de transmisión con ruido blanco Gaussiano analizando la señal recuperada para diferentes dispersiones. De este modo, si representamos  $L_s$  frente a  $SNR$  podemos ver el comportamiento del esquema respuesta, esto es, si sincroniza con el sistema conductor o si bien sigue a la señal ruidosa.



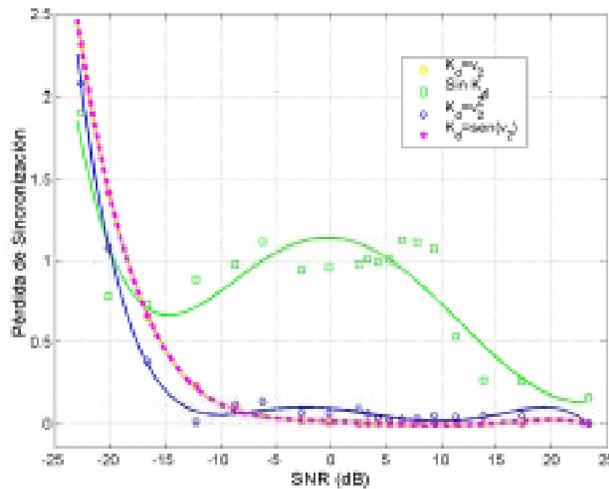
**Figura 4.7:** Comportamiento de  $L_s$  para el esquema de sincronización de Pecora y Carroll frente a la  $SNR$ .

Para el esquema de Pecora y Carroll la Fig. 4.7 muestra como la sincronización se ve rápidamente alterada cuando el canal sufre contaminación ruidosa. Se consideró un amplio rango de  $SNR$  con vistas a analizar el comportamiento en las situaciones extremas de ruido prácticamente nulo y saturación de ruido. De este modo se han logrado caracterizar dos claras tendencias en el proceso de sincronización tal y como muestran las líneas punteadas de la Fig. 4.7; por un lado cuando el ruido satura el canal el sistema conducido pierde la señal caótica y sigue la señal ruidosa, recta de pendiente  $-1$ , mientras que a medida que el ruido disminuye se observa una disminución exponencial de  $L_s$  hasta que alcanza valor nulo, resultado de una

sincronización total entre la señal caótica enviada y la señal caótica del sistema conducido, recta de pendiente 0.

El estudio del rendimiento del ruido en el esquema de sincronización a través de señales complejas se llevó a cabo con diferentes llaves de encriptación, o diferentes combinaciones de las variables del sistema.

La Fig. 4.8. muestra la pérdida de sincronización, Ec. (4.21), como una función de la relación señal ruido,  $SNR$ , en dB. Esta  $SNR$  ha sido calculada como la relación entre la potencia de la señal enviada y la potencia del ruido introducido en el canal de transmisión.

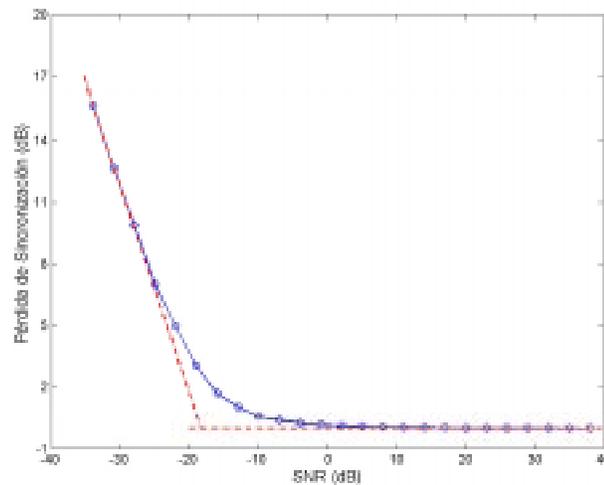


**Figura 4.8:** Pérdida de la sincronización frente a la relación señal ruido,  $SNR$  (dB), para diferentes funciones  $K_d$ .

De todas las combinaciones o llaves utilizadas,  $K_d = v_2'(t)$  parece ser la que presenta una mayor resistencia ante la introducción de ruido,  $\zeta(t)$ , en el canal. Por ello para un análisis en mayor profundidad de este esquema nos quedaremos con esta llave de encriptación. Así pues, de ahora en adelante siempre que hablemos de un sistema de sincronización a través

de señales complejas sin especificar la llave de encriptación usada nos estaremos refiriendo a  $K_d = v_2'(t)$ .

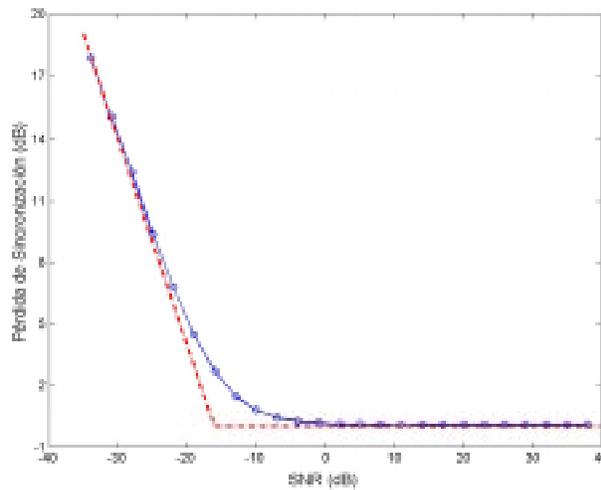
Si hacemos un barrido de intensidades de ruido que vaya desde  $SNR$  muy altas a  $SNR$  muy bajas encontraremos el comportamiento de  $L_s$  mostrado en la Fig. 4.9. En esta figura nuevamente se puede observar como para el caso en el que el canal se ve perturbado por señales ruidosas,  $SNR$  bajas, la pérdida de sincronización se ajusta a una recta de pendiente  $-1$  tal y como cabría esperar de la Ec. (4.22), ya que a medida que aumenta el ruido, el sistema respuesta sigue a la señal ruidosa y no a la señal caótica de forma que  $L_s \approx 1/SNR$ . Sin embargo, para valores intermedios y altos de  $SNR$ , es decir, niveles moderados y bajos de contaminación ruidosa,  $L_s$  sigue una decaimiento exponencial que termina con pendiente cero para valores muy bajos de ruido.



**Figure 4.9:** Comportamiento de  $L_s$  en el esquema de sincronización a través de señales caóticas complejas frente a la  $SNR$ .

Un comportamiento muy similar al obtenido en el caso del segundo esquema de sincronización se ha encontrado para el esquema de sincronización con realimentación de

salida dinámica. Este resultado era de esperar ya que ambos esquemas se ayudan de una realimentación para mejorar la recuperación de la señal, cosa que no hacía el esquema de Pecora y Carroll que simplemente se basaba en un lazo abierto. En la Fig 4.10 se ve como  $L_s$  presenta un comportamiento muy similar al del esquema de sincronización a través de señales complejas. En el rango de  $SNR$  bajas tanto un esquema como el otro han perdido la sincronización del sistema siguiendo al ruido.

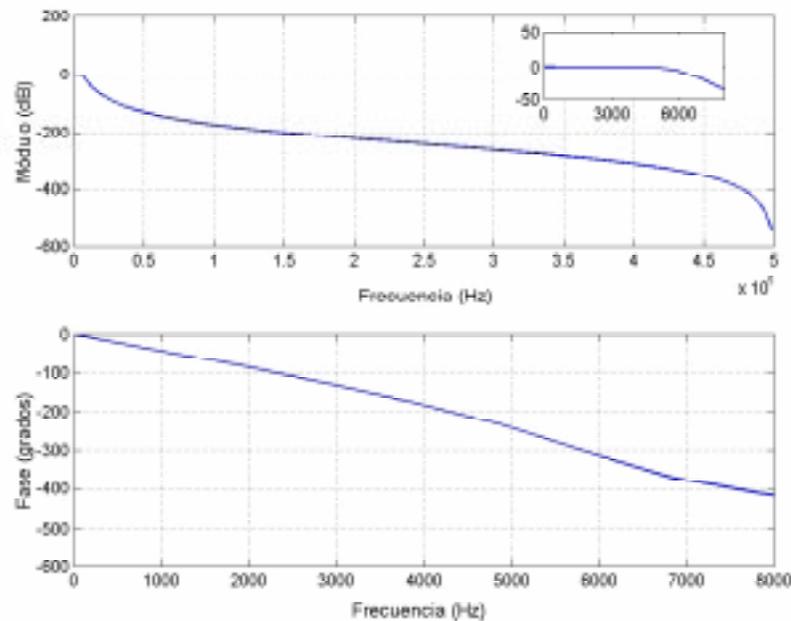


**Figura 4.10:** Comportamiento de  $L_s$  para el esquema de sincronización con salida dinámica de realimentación.

Antes de pasar al estudio de los diferentes esquemas de modulación vamos a comparar el rendimiento de la sincronización y de un filtro pasabajas para eliminar ruido. Para ello se ha elegido un filtro pasabajas tipo Butter de orden 7 y con frecuencia de corte a 6KHz, dado que la frecuencia característica del caos con el que estamos trabajando en este estudio se encuentra entorno a los 4KHz<sup>1</sup>. No obstante, se ha ampliado un poco más el valor de la frecuencia de

<sup>1</sup> Recordemos que el comportamiento caótico se caracteriza por un amplio espectro de frecuencias con una cierta caída exponencial. Cuando decimos que nuestro caos tiene una frecuencia característica de 4KHz queremos decir que las frecuencias restantes caen dentro de la parte más baja de la exponencial y por lo tanto se pueden considerar menos importantes.

corte debido a la naturaleza del espectro caótico.

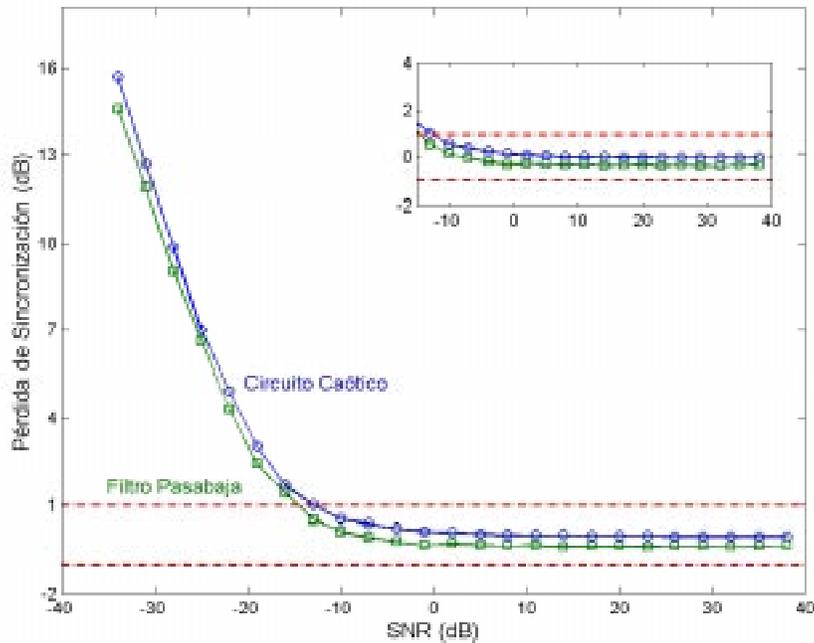


**Figura 4.11:** Curvas de amplitud y fase para un filtro pasabajas de orden 7 tipo Butterworth con una frecuencia de corte de 6KHz.

La Fig. 4.11 muestra las curvas de la amplitud y fase del filtro utilizado. Como se puede observar en la ampliación de la curva de ganancia los filtros tipo Butterworth (o de aproximación máximamente plana) se caracterizan por dar la mejor aproximación a la curva ideal de un filtro pasabajas en la banda pasante; pues no presentan rizo en la banda de paso y atenúan las frecuencias no deseadas fuera de esa banda.

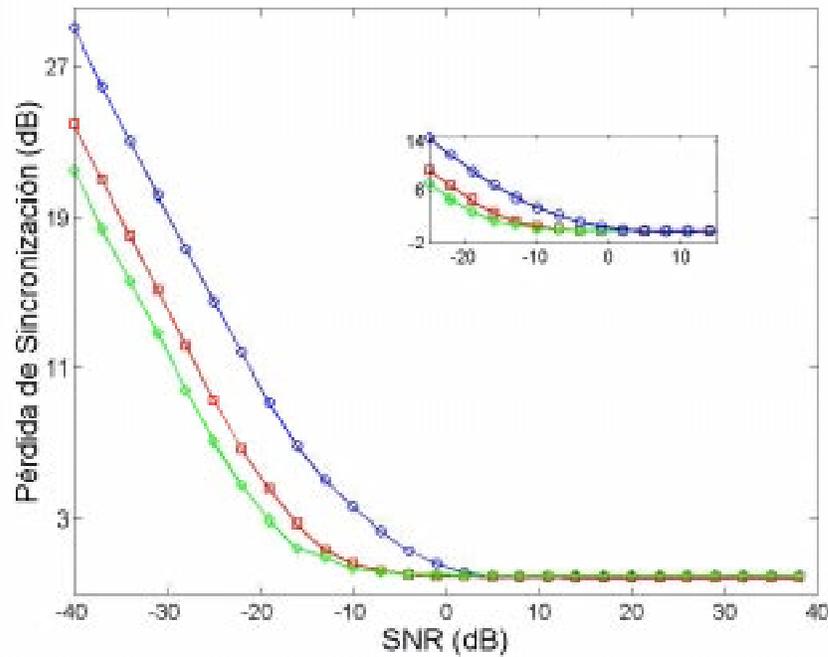
Como se puede ver en la Fig. 4.12, la sincronización hace de filtro del ruido del mismo modo que el filtro pasabajas dando un rendimiento análogo frente a la contaminación gaussiana del canal. Sin embargo, la facilidad de implementación de un filtro pasabajas frente

a los circuitos caóticos hacen que sea preferible a nivel comercial el uso de filtros.



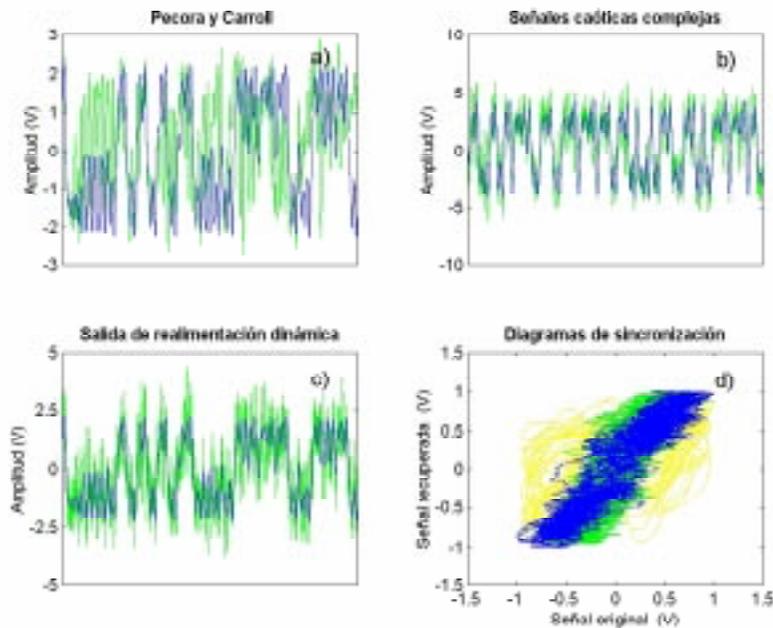
**Figura 4.12:** Comparación del rendimiento en un ambiente contaminado por ruido de un sistema de filtrado con un filtro pasabajas tipo Butterworth a 6KHz (□) y un circuito caótico (o).

Como conclusión de los resultados obtenidos en el análisis de los tres esquemas de sincronización caótica elegidos se puede decir que el esquema de Pecora y Carroll resulta más sensible a la consideración de un canal ruidoso que los otros dos esquemas estudiados, tal y como se puede apreciar en la Fig. 4.13, en donde se puede observar como el esquema de Pecora y Carroll se muestra más sensible a las perturbaciones del canal.



**Figura 4.13:** Comparación del rendimiento de los tres esquemas de sincronización. La línea azul corresponde al esquema de Pecora y Carroll, la línea roja al de realimentación con salida dinámica y la verde al esquema de sincronización a través de señales complejas.

En la Fig. 4.14 (a-c), donde se representa en verde la señal recuperada y en azul la señal caótica original, se puede apreciar esta mayor sensibilidad al ruido del esquema de Pecora y Carroll en comparación con los otros dos esquemas analizados. Si observamos los tres diferentes diagramas de sincronización que se muestran en la Fig. 4.14d se puede ver como el peor comportamiento para un nivel de ruido dado,  $E_b/N_0 = 20dB$  en este caso, lo muestra el esquema de Pecora y Carroll en amarillo, seguido por el esquema con realimentación de salida dinámica en verde y finalmente por el esquema de sincronización a través de señales caóticas complejas en azul.



**Figura 4.14:** Comparación de los 3 esquemas de sincronización para un nivel de ruido igual a  $E_b/N_0 = 20dB$ . En verde se representa la señal recuperada y en azul la señal original. Esquema de Pecora y Carroll (a). Esquema de sincronización a través de señales caóticas complejas (b). Esquema de sincronización con salida de realimentación dinámica (c). Diagramas de sincronización para los tres esquemas en amarillo, verde y azul, respectivamente (d).

La razón de este comportamiento viene dada por la propia construcción del esquema en lazo abierto que presenta el modelo de Pecora y Carroll. Los otros dos esquemas hacen uso de una realimentación que ayuda a mejorar significativamente el rendimiento. En el esquema de sincronización a través de señales complejas la realimentación es introducida por las llaves de encriptación  $K_d$  y  $K_r$ , mientras que en el esquema de realimentación de salida dinámica dicho papel lo juega el controlador  $C$ . De acuerdo con este análisis elegiremos el esquema de sincronización a través de señales complejas para estudiar su comportamiento frente a distintos esquemas de modulación. La elección se hace en base a su mayor sencillez a la hora

de llevar a cabo la implementación electrónica.

## 4.5 Esquemas de Modulación

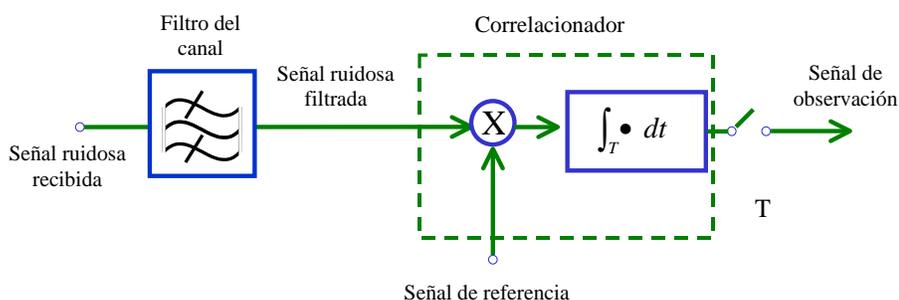
Tras el estudio llevado a cabo en la sección anterior de la robustez de los diferentes esquemas de sincronización para los casos límites de canal libre de ruido y saturación del canal por ruido blanco Gaussiano, se ha llegado a la conclusión de que los sistemas en lazo abierto como el de Pecora y Carroll resultan particularmente sensibles a perturbaciones de modo que no se considera que sean lo suficientemente robustos para ser utilizados en un esquema real de comunicaciones. Los otros dos esquemas considerados presentan comportamientos muy semejantes, dado que su esquema básico es muy similar. Ambos presentan sincronización *error-feedback* que se corresponde con una estimación asintótica del estado sincronizado. Por ello a la hora del estudio de diferentes esquemas de modulación hemos decidido centrarnos en un único esquema. En concreto, se ha escogido el esquema de sincronización a través de señales complejas. El porqué de esta elección se encuentra en su facilidad de implementación y en la versatilidad de juego que nos da el uso de las diferentes llaves de encriptación.

En general, la modulación es el proceso por el cual una propiedad o un parámetro de cualquier señal se hace variar en forma proporcional a una segunda señal. El tipo de dependencia se determina con la forma de modulación empleada. Para sistemas de comunicación digital es conveniente modular una señal portadora con la corriente de datos digitales antes de la transmisión.

Muchos esquemas de modulación y demodulación han sido desarrollados para implementar sistemas de comunicación basados en señales portadoras caóticas. Entre ellos hay soluciones que permiten tanto la construcción de receptores coherentes como no coherentes.

La mayoría de los receptores usados en comunicaciones caóticas pueden ser modelados

por el diagrama de bloques de la Fig. 4.15.



**Figura 4.15:** Diagrama de bloques general de un receptor de un sistema de comunicaciones caóticas.

El ancho de banda de la señal recibida es limitado por el filtro del canal y la señal filtrada es correlacionada con una señal de referencia. La señal de salida del correlacionador es muestreada según la duración del símbolo,  $T$ ; la señal muestreada se conoce como señal de observación. El valor de la señal de observación es proporcional a la energía del bit en cada tipo de receptores. La diferencia entre varias configuraciones de demoduladores radica en los diferentes modos de generar la señal de referencia.

En receptores coherentes, la señal de referencia se genera a partir de la señal ruidosa recibida por medio de sincronización caótica. Mientras que en los receptores no coherentes la propia señal ruidosa es usada como referente.

Existen numerosos esquemas de modulación, *Masking*, *ASK*, *COOK*, *CSK*, *DCSK*... En esta sección se ha procedido al estudio del rendimiento del esquema de sincronización a través de señales complejas para diferentes esquemas de modulación y demodulación. De los esquemas mencionados dejaremos fuera de análisis el *DCSK* ya que este esquema no precisa de la sincronización para la obtención de la información. En dicho esquema el modulador

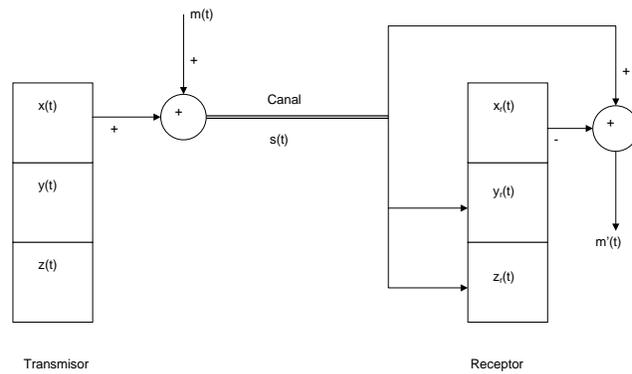
es un generador caótico libre con una salida, por ejemplo  $y(t)$ , y cada símbolo binario es codificado con la transmisión de 2 bits, el primero de ellos actúa como referencia y el segundo como portador de información. En el receptor se correlaciona la señal recibida con una versión retardada de sí misma y se decide que bit se transmitió. Hoy por hoy este esquema es el que presenta una mayor eficiencia dentro de las comunicaciones con caos. No obstante su baja eficiencia con el ancho de banda hace que se sigan buscando nuevos esquemas

Para el estudio del rendimiento de nuestro esquema se ha calculado la relación de bits erróneos (BER tasa de error de bits) detectados en el receptor. Este estudio requiere de muchos factores, dependiendo de lo que busquemos en la comunicación primarán unos sobre otros, así se seguirá una relación de compromiso en busca de una elección óptima de todos ellos.

#### 4.5.1 Modulación de Enmascaramiento o *Masking*

La técnica de enmascaramiento o *masking* es una de las más primitivas. En ella la señal de información es añadida comúnmente con un simple sumador a una señal que actúa como portadora del mensaje. El conjunto de las dos señales es transmitido a través del canal y en el receptor, a través de un proceso de demodulación adecuado, se procede a la recuperación del mensaje tal y como se muestra en el esquema de la Fig. 4.16.

La ventaja de esta técnica de modulación radica en que el mensaje transmitido puede ser analógico o digital. Sin embargo, esta técnica adolece de importantes limitaciones. Una de las más importantes es la necesidad de que el nivel de la señal de información sea al menos 30 dB por debajo de la señal caótica. De lo contrario la amplitud del mensaje destruiría la sincronización. La consecuencia de esta limitación es la incertidumbre de que se produzca una detección correcta en el caso de que un ruido, con igual nivel de potencia que la señal de información, vicie la señal caótica haciendo indistinguibles el ruido de la señal de información. Por ello, en lugar de añadir un ruido caótico a una señal de información se suele preferir que sea la propia señal caótica la portadora de información.



**Figura 4.16:** Esquema general de modulación con enmascaramiento de señal y sistema de detección con sincronización.

En nuestro esquema particular para enviar una señal de información  $s(t)$  desde el transmisor al receptor usando la familiar técnica de enmascaramiento *chaos signal masking technique* [Kocarev et al., 1992; Halle et al., 1993; Cuomo, 1994; Lakshmanan & Murali, 1996], la señal  $v(t)$  y  $u(t)$  son modificadas como  $v(t) = v_1'(t) + s(t)$  y  $u(t) = v_1(t) + s(t)$ , respectivamente. En este tipo de codificación el mensaje  $s(t)$  no sólo es añadido a la portadora caótica sino que simultáneamente conduce el proceso de sincronización de los circuitos del transmisor. Con este esquema la señal es recuperada en el receptor como

Señal Recuperada:

$$r(t) = v^r(t) - v_1^r(t) = s(t) \quad (4.23)$$

El sistema ha sido simulado usando el método de integración de Runge-Kutta de cuarto orden con un paso de integración igual a  $0.001t.u.$  ( $t.u. = u.t. = unidades$

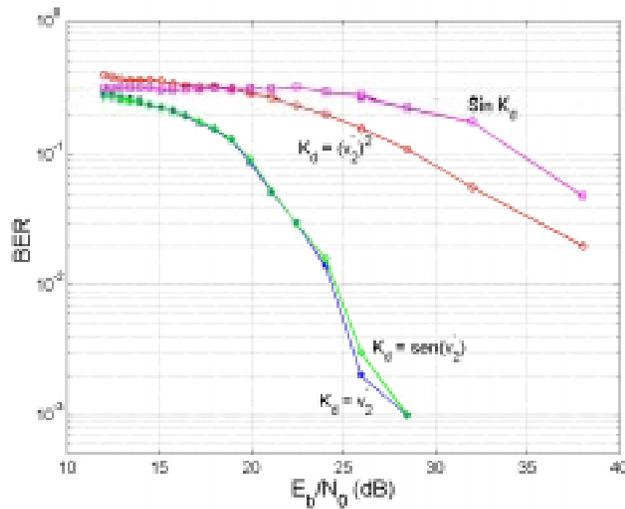
temporales) introduciendo ruido blanco Gaussiano. Como ya vimos anteriormente las razones de introducir ruido blanco Gaussiano son su sencillo tratamiento matemático, su dominio en la mayoría de los sistemas de comunicación prácticos y el hecho de que los resultados o clasificaciones obtenidas con este modelo de ruido se mantienen bajo condiciones reales [Haykin, 1994, Kolumbán et al., 1997].

Para el estudio de la relación de bit erróneos o  $BER$ , (*Bit Error Rate*), se ha procedido a la transmisión de un mensaje aleatorio de ceros y unos a través de un canal ruidoso contaminado con AWGN. Para este estudio se ha procedido al envío de una serie aleatoria de 1000 bits, cada uno de ellos con un periodo de 5000 iteraciones en un sistema en el que el tiempo de muestreo es igual a  $0.001 t.u.$ . La duración del periodo no ha sido elegida de forma arbitraria sino que previamente se llevó a cabo un estudio para encontrar el periodo que nos proporcionará una relación de compromiso óptima entre el periodo de la señal y la varianza de la misma, ya que por la propiedad de la señal cuanto mayor es el periodo menor es la varianza, y disminuyendo el valor de la varianza mejora el rendimiento del sistema a la contaminación ruidosa del canal. Sin embargo, esto da como resultado un menor índice de datos. Además, a la hora de elegir la duración idónea para  $T_b$ , periodo de bit, se ha de tener en cuenta la existencia del tiempo necesario para que se produzca sincronización entre la señal recibida y el circuito caótico presente en el sistema receptor,  $T_s$ . El valor promedio calculado para el tiempo de sincronización del sistema es de  $1ms$  (1000 iteraciones,  $1 t.u.$ ). En el caso particular del esquema de sincronización a través de señales caóticas complejas, un incremento en el valor de difusión nos conduciría a tiempos de sincronización menores. No obstante, en este caso la intensidad de la sincronización destruiría la base de detección de los esquemas de modulación considerados al imposibilitar la distinción entre los dos atractores caóticos utilizados para la modulación de la señal.

Al igual que la pérdida de sincronización, el cálculo del  $BER$  ha sido llevado a cabo para diferentes  $K_d$ . El  $BER$  ha sido calculado como la relación entre el número de bits erróneos recibidos y el número de bits transmitidos.

La Fig. 4.17 muestra el  $BER$  como una función de  $E_b/N_0$ , donde  $E_b$  es la energía por

bit y  $N_0$  corresponde a la densidad de potencia espectral del ruido.



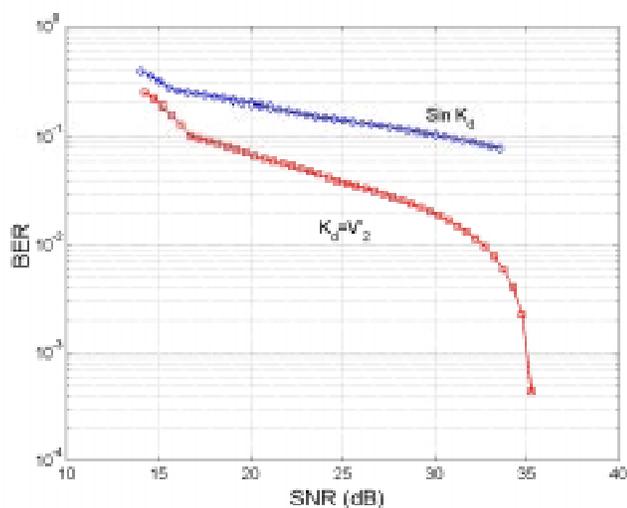
**Figura 4.17:** Eficiencia del sistema para diferentes funciones  $K_d$ , cuando es enviado un mensaje aleatorio de ceros y unos.

En ambas figuras, Fig. 4.8 y Fig. 4.17, se puede ver que el rendimiento del esquema es mejorado con el uso de una señal compleja para la transmisión de la información. En particular, los casos  $K_d = \text{sen}(v_2'(t))$  y  $K_d = v_2'(t)$  presentan una considerable mejora frente al caso en el que no se usa  $K_d$ . La razón de esta mejora se debe principalmente a que la utilización de llaves de encriptación introduce un lazo de realimentación en el esquema del sistema receptor, representado por  $K_r$ , con lo que la sincronización es mejorada.

Es conocido que los algoritmos con realimentación presentan una mayor tolerancia al ruido que los que emplean únicamente difusión [Suykens et al., 1997]. Se puede ver en la Fig. 4.17 que independientemente de que la llave introducida sea mejor o peor, todos los casos que poseen lazo de realimentación presentan un mejor rendimiento que aquél que carece de  $K_d$ . La elección de la llave, o combinación de variables (lineal, en el montaje experimental), se hizo para facilitar la construcción del montaje así como por la ligera preferencia que

para esta combinación muestran los resultados obtenidos para el  $BER$ . No obstante, un comportamiento similar puede ser encontrado para el caso no lineal.

Este mismo estudio se llevó a cabo con el montaje experimental, reduciendo el análisis a los casos particulares de  $K_d = v_2'(t)$  y sin tener en cuenta  $K_d$ . Para la generación del mensaje se utilizó un generador de funciones (Hewlett-Packard 33120A) del mismo tipo que el utilizado para generar la señal de ruido.

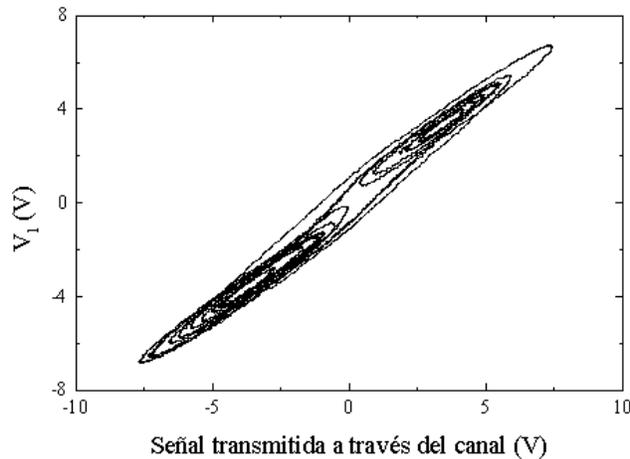


**Figura 4.18:** Sensibilidad del sistema obtenida experimentalmente para el caso con clave de encriptación lineal, línea roja, y para el caso sin encriptación, línea azul.

Los resultados obtenidos con el montaje experimental mostrado en la Fig. 4.4 corroboran los resultados numéricos encontrados, tal y como se puede apreciar en la Fig. 4.18 donde se representa la sensibilidad del esquema para el caso con encriptación lineal,  $K_d = v_2'(t)$ , y para el caso sin encriptación. La razón de que experimentalmente representemos la sensibilidad en lugar de la eficiencia es debida a la limitación de toma de datos introducida por el osciloscopio y los generadores de funciones utilizados en el experimento. Como consecuencia de estas limitaciones a la hora de realizar el análisis experimental, se llevó a

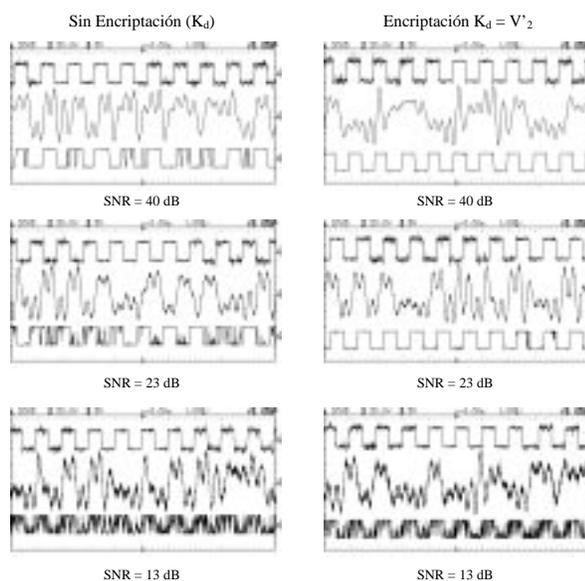
cabo el estudio del rendimiento del sistema con señales analógicas en lugar de digitales. Esto explica el que se presente el estudio de la sensibilidad en lugar del de la eficiencia para el caso experimental. Es más, en realidad para ser coherentes con la nomenclatura en vez de hablar del BER (Bit Error Rate) se debería hablar del SER (Signal Error Rate).

Si representamos la señal transmitida por el canal,  $d(t)$ , frente a la caída de tensión en el condensador  $C_1$  del transmisor,  $v_1(t)$ , tal y como se muestra en la Fig. 4.19,



**Figura 4.19:** Diagrama de fases de la señal transmitida frente a  $v_1$  cuando  $K_d = v_2'$  y  $K_r = v_2''$ .

se puede observar como el uso de la señal caótica compleja da lugar a la aparición de un atractor caótico en lugar del característico diagrama de fases de una sincronización perfecta (esto es, una recta de pendiente  $45^\circ$ ). La forma cualitativa de este atractor dependerá del tipo de combinación usado para construir la señal compleja. Para este caso particular,  $K_d = v_2'$  y  $K_r = v_2''$ . De este modo  $K_d$  dificulta la reconstrucción del sistema caótico por técnicas de *embedding*, [Short, 1994], ya que la señal transmitida no es una simple variable del sistema caótico del transmisor, sino una señal caótica compleja.



**Figura 4.20:** Señales transmitidas y recuperadas experimentalmente para una  $SNR \approx 25 \text{ dB}$ . El mensaje original,  $s(t)$ , es una onda cuadrada de frecuencia  $1 \text{ KHz}$  y amplitud  $100 \text{ mV}$ .

En el receptor el mensaje es recuperado con la ayuda de un comparador de histéresis, (HC en Fig. 4.3). La Fig. 4.20 muestra las señales de información, transmitida y recuperada apropiadamente escaladas. Las funciones  $s(t)$ ,  $d(t)$ ,  $r(t)$  representan el mensaje de información, la señal caótica transmitida a través del canal contaminado por el ruido y el mensaje recuperado, respectivamente. En este caso en particular la  $SNR$  es aproximadamente de  $25 \text{ dB}$ . Más experimentos han sido llevados a cabo con distintos valores de  $SNR$  encontrando resultados igualmente satisfactorios hasta valores aproximados de  $SNR \approx 15 \text{ dB}$ .

Es interesante observar que no se produce un desplazamiento de fase entre la señal

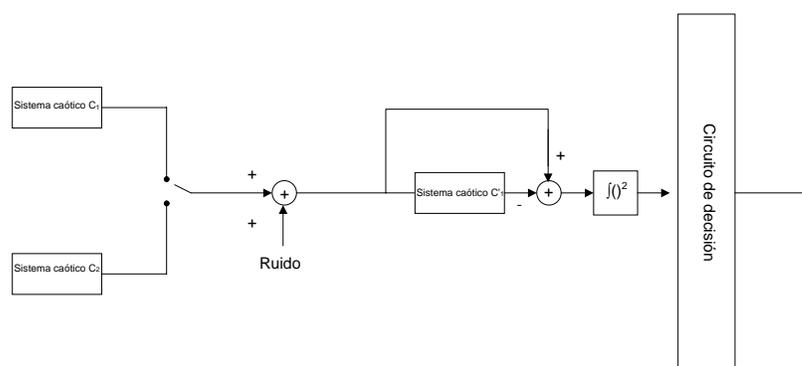
transmitida y la señal recuperada. La mejor apariencia de la señal recuperada frente a la señal transmitida es debido al uso del comparador de histéresis que elimina el ruido característico del generador de funciones observado en la señal de información  $s(t)$ .

### 4.5.2 Modulación ASK

En sistemas de comunicación digital que emplean canales pasabanda, es conveniente que la información binaria se module sobre una señal portadora antes de la transmisión. Los esquemas básicos de modulación digital son el de conmutación de amplitud, el de conmutación de frecuencia y el de conmutación de fase (*ASK*, *FSK*, *PSK*, respectivamente). En nuestro análisis nos centraremos en la modulación con conmutacion de amplitud.

En la modulación en amplitud se hace variar la amplitud de una señal senoidal, con frecuencia y fase fijas, en proporción a una señal dada. Esto altera la señal, trasladando sus componentes de frecuencia a frecuencias más altas. El uso de modulación de amplitud puede ser provechoso siempre que se desee un desplazamiento en las componentes de frecuencia de una señal. Esta necesidad puede surgir, por ejemplo, en el diseño de filtros con requisitos muy exigentes, o bien en la posibilidad de transmitir comunicación oral a través del espacio por medio de ondas electromagnéticas. Si la máxima frecuencia de la voz es de 3KHz, la mínima longitud de onda es de 100000 *m*. Como las antenas de dimensiones menores a un cuarto de la longitud de onda son ineficientes, es clara la ventaja de elevar la frecuencia en varios órdenes de magnitud antes de intentar la transmisión. En el caso de transmisión digital la modulación en amplitud se conoce como conmutación de amplitud.

En la conmutación de amplitud, la amplitud de una señal portadora de alta frecuencia se conmuta entre dos o más valores en respuesta al código *PCM* (modulación de código de pulsos). La Fig. 4.21 muestra el diagrama de bloques básico de un esquema de modulación *ASK*.



**Figura 4.21:** Esquema de modulación ASK con esquema de detección basado en el error de sincronización.

La solución de implementación más fácil de este esquema para el caso binario es usar dos señales de distinta amplitud para representar cada uno de los bits (1 y 0). La detección de este esquema es muy sencilla puesto que a simple vista se puede interpretar la información transmitida, sin necesidad de que tenga lugar la sincronización. Un refinamiento de este sistema se encuentra en el esquema CSK.

### 4.5.3 Modulación CSK

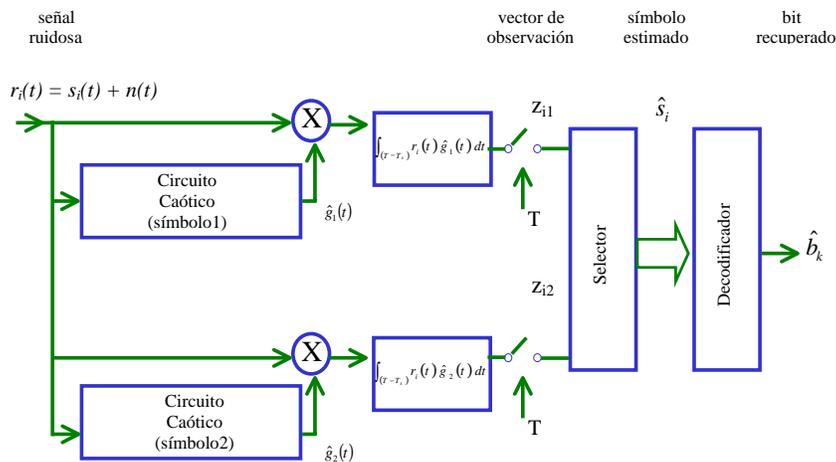
En el esquema de modulación *CSK* (*Chaos Shift Keying*) se usan señales caóticas con diferente energía por bit para transmitir la información binaria. El modulador es realmente simple: para el símbolo 1 se transmite una función caótica con una energía media por bit

$\bar{E}_b(s_1)$  y para el símbolo 2 se envía una función caótica análoga pero con  $\bar{E}_b(s_2)$ .

Las señales caóticas con diferente energía pueden ser generadas por diferentes circuitos o por el mismo circuito y multiplicadas a continuación por dos constantes diferentes. Las señales se eligen de forma que tengan propiedades estadísticas similares.

Dependiendo del esquema de demodulación deseado, coherente o no-coherente, nos encontraremos con dos posibles esquemas de detección.

En el caso de detección coherente se lleva a cabo la reproducción de las funciones base en el receptor por medio de un esquema de sincronización. Cuando la sincronización es considerada, el esquema debe ser capaz de recuperar las funciones base a partir de la señal ruidosa recibida.



**Figura 4.22:** Diagrama de bloques de un receptor coherente CSK.

La Fig. 4.22 muestra un receptor coherente basado en sincronización y usando modulación CSK binaria.

Las funciones muestra transmitidas  $s_1(t) = g_1(t)$  y  $s_2(t) = g_2(t)$  (representando los símbolos 1 y 2 respectivamente) son las salidas de dos generadores de señales caóticas que producen las funciones  $g_1(t)$  y  $g_2(t)$ . En el receptor la sincronización entre los circuitos intenta reproducir las funciones base, a partir de la señal ruidosa recibida  $r_i(t) = s_i(t) + n(t)$ .

Las funciones  $\hat{g}_1(t)$  y  $\hat{g}_2(t)$  son luego correlacionadas con  $r_i(t)$  durante el tiempo correspondiente a la duración del bit. La decisión de uno u otro bit es hecha en base a la proximidad de  $r_i(t)$  a  $\hat{g}_1(t)$  y a  $\hat{g}_2(t)$  cuantificada por las variables  $z_{i1}$  y  $z_{i2}$ , respectivamente.

Por otro lado, la sincronización no es necesaria para la recuperación de la portadora en un sistema de comunicaciones digital. La demodulación también puede ser llevada a cabo sin necesidad de sincronización. Esto es cierto tanto para funciones muestra sinusoidales como caóticas.

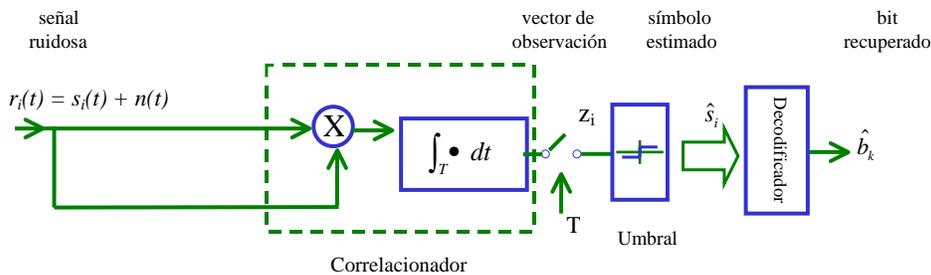
En este caso, el receptor calcula la función que transporta la información transmitida a partir de la señal ruidosa recibida, sin recuperar las funciones base. El símbolo transmitido se decide en función del estudio comparativo entre el cálculo estimado y un determinado umbral.

Debido a la naturaleza no periódica de una función base caótica y a la longitud finita de las funciones muestra transmitidas a través del canal, la función (tal como la energía del bit) que es calculada a partir de la función caótica recibida varía de una función muestra a la siguiente.

En contraposición con los sistemas de comunicaciones convencionales donde se usan señales periódicas, la función requerida para la decisión no puede ser determinada exactamente, pero sí estimada en el caso libre de ruido.

La Fig. 4.23 muestra el diagrama correspondiente a un receptor no coherente en el que

un correlacionador sustituye los dos circuitos caóticos presentes en el esquema de la Fig 4.22.

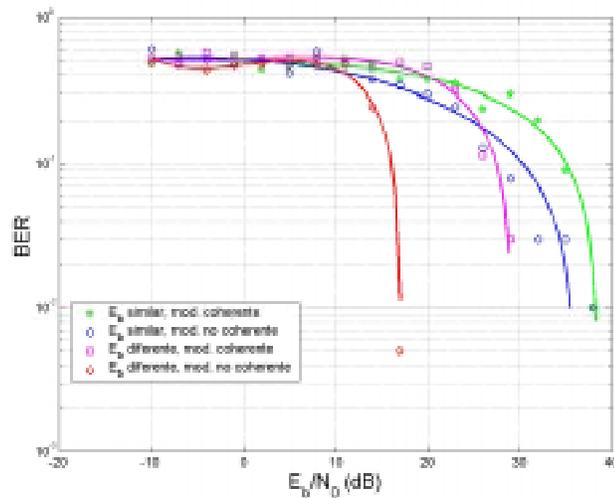


**Figura 4.23:** Diagrama de bloques de un receptor no coherente CSK.

En el esquema de modulación *CSK*, señales caóticas con diferentes energías son usadas para transmitir la información binaria. Las señales caóticas con diferente energía se pueden generar con diferentes circuitos caóticos o bien con el mismo circuito, multiplicándola a continuación por dos constantes distintas. En ambos casos, la información binaria que se desea transmitir es mapeada con las funciones muestra caóticas.

Para el sistema *CSK* hemos considerado tanto el caso en el que la energía de las distintas funciones muestra caóticas elegidas para representar  $s_1$  y  $s_2$  es similar como el caso en el que dicha energía difiere de forma significativa, a su vez hemos testado tanto el caso de modulación coherente como el no coherente. Todo ello, a través del estudio de la eficiencia del esquema.

La Fig. 4.24 presenta el rendimiento relativo al ruido del esquema de modulación *CSK*, en ella se presenta el estudio comparativo entre la modulación coherente y la modulación no coherente para dos situaciones diferentes, una primera en la que la energía adjudicada a ambos símbolos  $s_1$  y  $s_2$  es similar y otra en la que dicha energía difiere para cada uno de los símbolos.



**Figura 4.24:** Rendimiento frente al ruido de un sistema CSK con modulación coherente y no coherente.

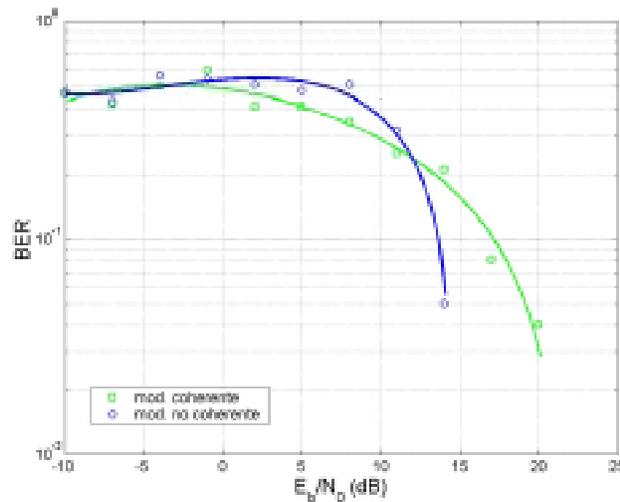
Como se puede apreciar el rendimiento mejora cuando la energía por bit para cada uno de los símbolos difiere. Es más, para una señal caótica dada y un nivel de ruido determinado, el mejor rendimiento se conseguirá si la distancia entre los valores medios de energía asignados a los diferentes símbolos  $s_1$  y  $s_2$  se maximiza. Esto se puede conseguir para el esquema de modulación *COOK*. Además también se puede observar como el rendimiento alcanzado por la modulación no coherente es mejor que el alcanzado con la modulación coherente basada en la sincronización caótica.

#### 4.5.4 Modulación *COOK*

Para una energía  $E_b$  la máxima distancia entre los elementos de un conjunto binario puede conseguirse si se usa una conmutación encendido-apagado (que a veces se abrevia *COOK*, *chaos on-off keying*). La modulación *COOK* corresponde a la elección usual de conmutación de amplitud en el caso binario. La señal modulada resultante consta de pulsos de *RF*, llamados

marcas, en los que la señal se transmite en toda su amplitud representando unos binarios, y espacios con amplitud cero que representan ceros binarios. En este caso, la distancia entre los elementos del conjunto binario es  $E_b$ .

El rendimiento ante el ruido de un sistema *COOK* tanto con modulación coherente, esto es con ayuda de la sincronización caótica, como con modulación no coherente se muestra en la Fig. 4.25 donde el color verde hace referencia al caso coherente y el azul al caso no coherente.

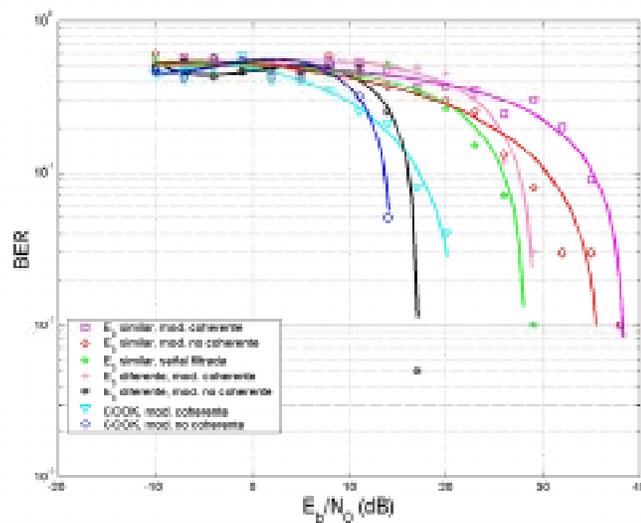


**Figura 4.25:** Rendimiento frente al ruido de un sistema COOK con modulación coherente y no coherente.

Si comparamos esta figura con la Fig. 4.24 donde se muestra el rendimiento de un sistema *CSK* podemos apreciar una mejora notable en ambos casos, es decir, coherente y no coherente. Sin embargo, el uso de símbolos de tan diferente energía también presenta inconvenientes dependiendo de lo que prime en nuestro sistema a la hora de elegir las características tanto del canal como del bit de transmisión.

Una mejora significativa en el esquema podría darse con la introducción de un filtro en el sistema receptor, de este modo se disminuiría la contaminación ruidosa de la señal. No obstante la elección de dicho filtro ha de hacerse atendiendo a la conservación de las propiedades mínimas de la señal caótica ya que un filtrado excesivo impediría la sincronización caótica, que buscamos en nuestra esquema con modulación coherente.

En acuerdo con el estudio llevado a cabo en la sección 4 de este capítulo, un filtro pasabajas tipo Butter de orden 7 y con frecuencia de corte a 6KHz podría ayudarnos en la mejora del rendimiento de nuestro sistema. La Fig. 4.26 presenta una recopilación de los resultados obtenidos para los distintos esquemas de modulación considerados. Como se puede observar en la figura el uso de un filtro a la entrada del receptor eleva el rendimiento del sistema con  $E_b$  similares sobre el sistema con  $E_b$  diferentes y modulación coherente.



**Figura 4.26:** BER frente  $E_b/N_0$  para los distintos esquemas de modulación digital. La línea verde corresponde al caso en el que el receptor integra en su entrada un filtro pasabajas.

## 4.6 Conclusiones

En este capítulo se ha llevado a cabo el estudio de la robustez ante la contaminación ruidosa de tres diferentes esquemas de sincronización, con vistas a que alguno de ellos fuera implementable con éxito en un esquema coherente de modulación. Para dicho análisis se ha definido una nueva variable denominada pérdida de sincronización,  $L_s$ , que encierra en su definición tanto la pérdida de sincronización debida a la contaminación ruidosa inherente a un canal de comunicaciones como al error de sincronización característico del proceso de sincronización en sí mismo.

Hasta ahora, los esquemas de sincronización se habían presentado suponiendo un canal ideal de comunicaciones, de ahí la importancia del estudio realizado de cara a una implementación real de dichos esquemas. Los resultados obtenidos nos muestran que los esquemas que presentan realimentación de señal resultan más robustos que los que carecen de dicha realimentación. Los tres esquemas aquí estudiados, sincronización a través de una señal compleja y sincronización con realimentación de salida dinámica, presentan un notable incremento en el rendimiento ante la contaminación ruidosa con respecto a esquemas anteriores, por ejemplo el de Pecora y Carroll. Es más, la sincronización caótica actúa al igual que un filtro eliminando gran parte de la señal ruidosa presente en el canal, tal y como se pudo ver en la Fig. 4.12.

Una vez caracterizado el rendimiento de los esquemas de sincronización se ha procedido al estudio de la eficiencia y sensibilidad de uno de los esquemas que mostró mejor rendimiento a la contaminación del canal por ruido blanco. Para ello, se consideró modulación *masking* en un sistema analógico y diferentes esquemas de conmutación de amplitud, en un sistema de transmisión digital.

Aunque los resultados para esquemas basados en una modulación coherente resultaron ser bastante aceptables, sin embargo, la eficiencia obtenida presenta rendimientos menores que en esquemas basados en una modulación no coherente, en la que no es preciso conseguir

sincronización. Por ello, sopesando las ventajas e inconvenientes de una y otra modulación, coherente y no coherente, se está optando por usar las señales caóticas en esquemas con modulación no coherente, es decir, sin necesidad de obtener sincronización. En particular, el esquema *DCSK* (*Differential Chaos Shift Keying*), no estudiado en este capítulo, se presenta hoy por hoy como el esquema de modulación que presenta una mayor eficiencia para ser usado en un sistema de comunicaciones real. No obstante, se sigue buscando un sistema de sincronización que con modulación coherente basada en sincronización caótica presente un rendimiento óptimo en un medio ruidoso. Por este motivo, se considera de suma importancia el análisis del comportamiento y estabilidad de los sistemas caóticos ante la perturbación de los mismos por señales ruidosas. Conociendo la sensibilidad de dichos sistemas se podrá buscar una solución al problema del ruido de forma que la sincronización caótica resulte rentable en una implementación real.

# Capítulo 5

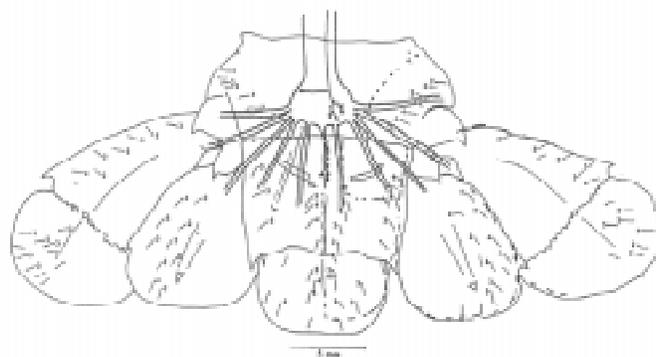
## Ruido sobre Sistemas Caóticos Extendidos

---

Vistos los resultados del capítulo anterior y siguiendo la corriente general, los usuarios de los modernos dispositivos de comunicación se muestran reacios ante cualquier fuente capaz de introducir un fondo ruidoso. Sin embargo, en determinadas circunstancias se ha observado que una dosis adicional de ruido puede contribuir a una mejora del rendimiento de los dispositivos.

Este fenómeno puesto de manifiesto en sistemas no lineales, en el que una señal de información débil puede ser amplificada y mejorada por la adición de ruido es conocido con el nombre de resonancia estocástica.

El concepto de resonancia estocástica surgió al tratar de explicar la repetición periódica de las glaciaciones sugerida como resultado de forzamientos estocásticos y débiles señales periódicas sobre un modelo climático global biestable [Benzi et al., 1981; Nicolis, 1993; Moss, 1994]. Posteriores trabajos demostraron que la información contenida en una señal débil puede ser maximizada con la adición de ruido en determinados sistemas no lineales. Este fenómeno ha sido observado tanto en sistemas físicos artificiales como en la propia naturaleza. Los sistemas sensoriales o perceptivos presentan el perfil idóneo para observar en ellos resonancia estocástica, ya que son capaces de detectar débiles señales en medios ruidosos. De este modo, el ruido jugaría un papel enriquecedor en el procesamiento de información neuronal. La resonancia estocástica ha sido observada en la conductancia de los canales sodio-potasio de la membrana celular, en modelos teóricos de neuronas y de redes neuronales, así como experimentalmente demostrada en procesos sensoriales estudiados en langostas, grillos, ratas, células musculares humanas...[Douglas et al., 1993; Bulsara et al., 1994; Moss et al., 1994;]. Un ejemplo de esto, se encuentra en las terminaciones nerviosas presentes en la cola de la langosta *Procambarus clarkii* (ver Fig. 5.1).

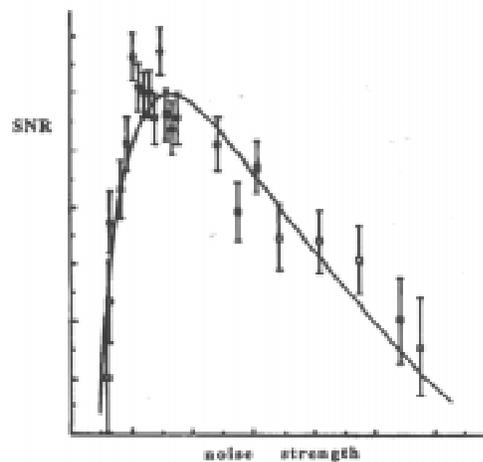


**Figura 5.1:** Diagrama del abanico de la cola de una langosta *Procambarus clarkii* mostrando los capilares nerviosos y la ramificaciones que los conectan al ganglio central [Moss et al., 1994].

La célula capilar presente en la cola de estos crustáceos se encuentra especializada en la detección de flujos de movimiento de agua de pequeña amplitud sobre el abanico de la cola, e incluso posee cierta sensibilidad direccional [Wilkens & Douglass, 1994; Pantazelou et al., 1995]. En flujos de corrientes donde son encontradas con frecuencia dichas langostas, y donde existe una gran cantidad de ruido de fondo hidrodinámico como consecuencia de la turbulencia del agua, estos crustáceos son capaces de detectar débiles señales enterradas en el medio ruidoso generadas por las colas de sus depredadores al nadar.

Es más, volviendo a los orígenes de la resonancia estocástica, investigaciones recientes buscan una aproximación alternativa, que considera la dinámica del océano ecuatorial como parte de un sistema dinámico no lineal conducido por fluctuaciones aleatorias, para explicar la aperiodicidad en el *ENSO*, (*El Niño Southern Oscillation*). El ruido provoca que el modelo salte caóticamente entre las diferentes oscilaciones generadas por el sistema implicado en el ciclo de la atmósfera del océano Pacífico y el ciclo estacional. La adición de ruido induce una dinámica caótica, provocando *El Niño*, cuando el modelo excede un nivel umbral. Este modelo proporciona una atractiva explicación para el esporádico aunque determinista carácter de *El Niño* [Stone et al., 1998].

Así pues, la resonancia estocástica es un término que ha sido ampliamente adoptado para describir procesos donde por adición de una función aleatoria a una señal que transporta una débil información se puede mejorar la detectabilidad de la señal por algún sistema no lineal o intensificar el contenido de la información de la salida del sistema. De esta manera, una señal periódica débil se intensifica gracias a un incremento de la intensidad del ambiente ruidoso. Una definición más rigurosa necesita que la  $SNR$  también experimente un incremento. La observación usual es que la amplitud de la señal crece con el incremento de la intensidad de ruido, pasa a través de un máximo y luego decrece de nuevo [Gammaitoni et al., 1998; Wiesenfeld & Jaramillo, 1998]. Así, el comportamiento general es algo similar a una curva de resonancia convencional, pero la respuesta es representada como una función de la intensidad del ruido en lugar de la frecuencia. La  $SNR$  no es la única forma de cuantificar el fenómeno de la resonancia estocástica pero en la mayoría de los trabajos se ha adoptado como la elección estándar, con el resultado de que frecuentemente la definición usada para la resonancia estocástica es la existencia de un máximo en la  $SNR$  en función de la intensidad del ruido (ver Fig. 5.2);



**Figura 5.2:** Relación señal ruido ( $SNR$ ) frente a la intensidad de ruido [Wiesenfeld & Jaramillo, 1998].

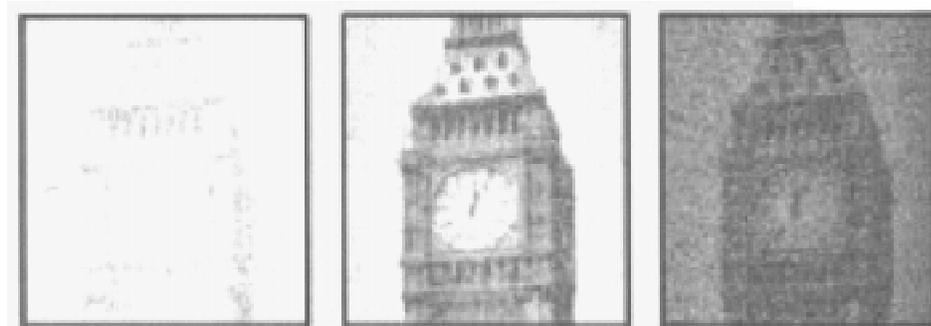
Después de ser introducida como una posible explicación del ciclo de glaciaciones de la tierra [Benzi et al., 1981; Nicolis, 1982; 1993], la resonancia estocástica ha sido posteriormente observada en contextos que incluyen láseres [McNamara et al., 1988], sistemas ópticos pasivos [Dykman et al., 1991] diodos túnel, una partícula Browniana en una trampa óptica, receptores nerviosos de langostas y ratas [Douglass et al., 1993; Moss et al., 1994; Collins et al., 1996].

La resonancia estocástica ha llegado a convertirse en los últimos años en un nuevo paradigma del inesperado papel de las fluctuaciones en el comportamiento de sistemas no lineales. Este concepto cubre una rica variedad de diferentes fenómenos en los cuales los efectos de fluctuaciones son claramente distinguibles de los que pueden ser esperados en sistemas deterministas. La influencia del ruido es principalmente revelada en la respuesta del sistema a una señal externa que es periódica en el tiempo. La resonancia estocástica consiste en una mejora de esta respuesta debida al ruido. El fenómeno está basado en tres ingredientes principales [Gammaitoni et al., 1998; Wiesenfeld & Jaramillo, 1998]: Un sistema no lineal exhibiendo una transición entre dos estados controlados por un determinado parámetro, una señal externa, (no necesariamente periódica), y un ruido o fuente fluctuante de media cero, bastante a menudo incorporada en la señal. Sin embargo, se ha observado que no siempre es necesaria la presencia de todos estos ingredientes. La influencia positiva de un ruido espaciotemporal sobre la propagación de ondas en una reacción de Belousov-Zhabotinsky subexcitable, [Kádár et al., 1998] o el estudio de la interacción entre la escala temporal de un determinado sistema y el tiempo de correlación de un ruido espaciotemporal, son ejemplos de ello [Sendiña et al., 2000; Pérez-Muñuzuri et al., 2000]. En general, la resonancia estocástica estudia la respuesta del sistema a la señal externa como una función de los parámetros del ruido, usualmente su intensidad.

Como se ha dicho, el efecto más importante del ruido es mejorar la respuesta del sistema a la señal externa. De ahí que, usualmente, el fenómeno sea aplicado para amplificar pequeñas señales. Ejemplos de esta aplicación pueden verse en sistemas ópticos, detectores de *squid* y neurofisiología [Pei et al., 1995].

Tradicionalmente la resonancia estocástica ha sido estudiada en sistemas de dimensión espacial cero, (dependientes únicamente del tiempo). Sin embargo, el fenómeno de la resonancia estocástica ha sido extendido a sistemas distribuidos espacialmente en una o dos dimensiones, principalmente en el reconocimiento de señal [Bulsara & Schnera, 1993; Lindner et al., 1995; Locher et al., 1996; Gammaitoni et al., 1998].

La novedad de la resonancia estocástica espacial es la presencia de un término difusivo. La importancia de este término será mejor entendida si consideramos el sistema como una cadena de  $N$  elementos independientes donde los vecinos más cercanos son acoplados a través del término proporcional a  $D$ . Debido a este acoplamiento el comportamiento espaciotemporal de los  $N$  elementos estocásticos puede llegar a ser sincronizado para un cierto rango de parámetros. Este fenómeno podría ser de especial relevancia en el diseño de detectores, para cuantificar la capacidad del cerebro humano o para interpretar patrones visuales contaminados por ruido. La siguiente figura presenta una simple pero sorprendente demostración de resonancia estocástica espacial. La figura muestra el resultado de una imagen del Big Ben contaminada por ruido para tres valores diferentes de intensidad [Simonotto et al., 1997; García-Ojalvo & Sancho, 1999].



**Figura 5.3:** Percepción visual de una imagen del Big Ben para tres valores diferentes de intensidad de ruido [Simonotto et al., 1997].

Viendo el resurgir del fenómeno de la resonancia estocástica y su extensión a sistemas espaciales [Lindner et al., 1995; 1996] se consideró que tal vez el ruido podría ayudar a la

sincronización de sistemas caóticos. ¿Qué ocurriría si perturbáramos con ruido una cadena de sistemas caóticos acoplados entre sí de forma difusiva?. ¿Podríamos mejorar la sincronización entre ellos o simplemente caeríamos dentro de una dinámica caótica estocástica?.

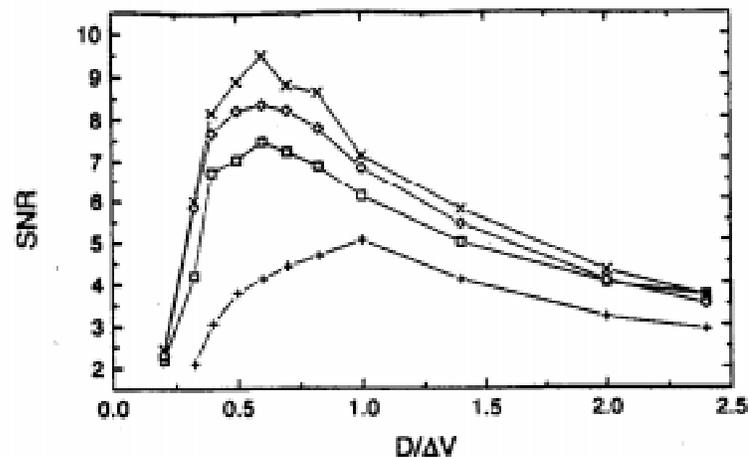
Recientemente han aparecido numerosas investigaciones sobre la influencia de ruido externo en sistemas caóticos desacoplados. Desde un punto de vista intuitivo podría pensarse que el hecho de introducir ruido en un sistema caótico, en el que cada uno de los elementos de dicho sistema se encuentra desacoplado del resto, lo único que induciría en el sistema sería más aleatoriedad. Sin embargo, en 1994, Maritan y Banavar presentaron un trabajo en el que lograban demostrar que dos sistemas caóticos forzados por una señal ruidosa común podían confluír en trayectorias idénticas para una intensidad suficiente de ruido y después de un tiempo suficientemente grande [Maritan & Banavar, 1994].

Este sorprendente fenómeno fue muy discutido y más tarde se demostró que los efectos observados por Maritan y Banavar no eran genuinos del ruido sino debidos a la polarización que presentaba el ruido que usaron en sus experimentos. Así Herzel y Freund llegaron a la conclusión de que en el modelo de Lorenz la media no nula del ruido utilizado era la única responsable de la sincronización de dichos términos [Herzel & Freund, 1995], ratificando la idea de que el ruido simétrico no induce sincronización entre sistemas desacoplados. Estudios posteriores [Malescio, 1996; Sánchez et al., 1997] llegaron a la conclusión de que, en general, un ruido simétrico, es decir, de media cero, no es capaz de sincronizar dos sistemas caóticos desacoplados. Sin embargo, la polémica no está cerrada y nuevos trabajos defienden la posibilidad de sincronización de sistemas caóticos desacoplados tales como mapas o sistemas como el de Lorenz [Minai & Anand, 1998; Toral et al., 1999].

En recientes trabajos, el ruido blanco ha sido reemplazado por ruido de color en una gran variedad de contextos. Esto se debe a que el ruido de color retrata mucho mejor la realidad física enriqueciendo significativamente la dinámica de las fluctuaciones, particularmente cuando el tiempo de correlación característico del ruido no es pequeño comparado con la escala temporal del sistema [Gammaitoni et al., 1993; Hänggi et al., 1993; Gingl et al., 1995; Sendiña-Nadal et al., 2000; Pérez-Muñuzuri et al., 2000]. De hecho, la

elección de ruido correlacionado es a menudo necesaria para estudios de estabilidad pues el ruido de color puede tener efectos críticos alrededor de puntos de bifurcación que no pueden ser explicados en aquellos casos en los que el ruido es blanco [Lefever & Turner, 1986; Fronzoni et al., 1987; Olarrea & De la Rubia, 1996].

El efecto del color sobre la resonancia estocástica puede ser no trivial, trabajos previos han demostrado que el efecto de la resonancia estocástica en sistemas forzados conducidos por un ruido Gaussiano aditivo exponencialmente correlacionado es generalmente reducido con respecto al caso de ruido blanco. El pico de resonancia se desplaza a valores mayores de intensidad ya que el ruido suprime la relación de saltos con el incremento del tiempo de correlación [Gammaitoni et al., 1989; Hänggi et al., 1993]. La Fig 5.4 muestra este comportamiento decreciente del pico de resonancia a medida que el tiempo de correlación crece.



**Figura 5.4:**  $SNR$  frente a intensidad de ruido para diferentes valores del tiempo de correlación de un ruido de color exponencialmente correlacionado:  $\tau = 30 \mu s$  ( $\times$ );  $\tau = 50 \mu s$  ( $\diamond$ );  $\tau = 100 \mu s$  ( $\square$ );  $\tau = 200 \mu s$  ( $+$ ) [Gammaitoni et al., 1989].

Por otro lado, se ha encontrado que en sistemas dinámicos no lineales, que han sufrido una bifurcación de Hopf y presentan un ciclo límite, sin forzamiento periódico externo y paraméricamente perturbados con ruido temporalmente correlacionado se da un comportamiento no monótono de la coherencia del sistema en función del tiempo de correlación del ruido y no en función de la variación de la dispersión del ruido como se espera que suceda en la resonancia estocástica clásica [Barzykin et al., 1998; Cabrera & De la Rubia, 1997; Cabrera et al., 1999].

En esta memoria se presenta un estudio focalizado en sistemas caóticos acoplados difusivamente y perturbados por ruido. Dicho análisis se llevará a cabo atendiendo a dos diferentes tipos de ruido, ruido blanco Gaussiano de media cero y ruido Gaussiano de media cero del tipo de Ornstein-Uhlenbeck [ver Apéndice B]. Además, para ambos casos diferenciaremos entre contribución multiplicativa y contribución aditiva de dicha señal ruidosa al sistema. El principal objetivo de este capítulo es analizar los efectos de la dispersión del ruido, el tiempo de correlación, la longitud del sistema, la intensidad del acoplamiento, etc., en el control del caos espaciotemporal en cadenas de elementos caóticos acoplados difusivamente.

Para llevar a cabo este objetivo hemos considerado diversos modelos caóticos: el modelo de Chua, por su sencilla implementación electrónica, el modelo de Lorenz, por su robustez ante un mayor rango de parámetros y el modelo de Rössler, por su cascada de bifurcación de doble periodo hacia el caos [ver apéndice A]. De todos ellos, el modelo de Lorenz será el más concienzudamente analizado, por reunir unas características más atractivas para su implementación numérica y posterior análisis.

El análisis propuesto se centrará en el seguimiento del grado de sincronización del sistema extendido cuando éste es perturbado por una señal ruidosa. Para ello se ha procedido a la caracterización de un parámetro que representa el grado de sincronización entre los elementos de la cadena caótica. Este parámetro viene dado por la siguiente cantidad

promediada en el tiempo

$$K = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{N-1} \sum_{j=2}^N \|\vec{u}_j^t - \vec{u}_{j-1}^t\| \right) \quad (5.1)$$

con  $\vec{u} = (x, y, z)$  y  $\|\cdot\|$  representando la distancia euclídea. Esta función es definida positiva y será igual a cero cuando todos los elementos de la cadena estén globalmente sincronizados. Ya que  $K$ , en cierto sentido, se puede entender como una medida de la complejidad de la cadena se podría relacionar con la entropía de Kolmogorov-Sinai [Benettin et al., 1976]. Otro modo de caracterizar la sincronización existente entre los elementos de una cadena caótica, en particular con condiciones de contorno periódicas, será a través del estudio del espectro de Lyapunov transverso, (ver apéndice C).

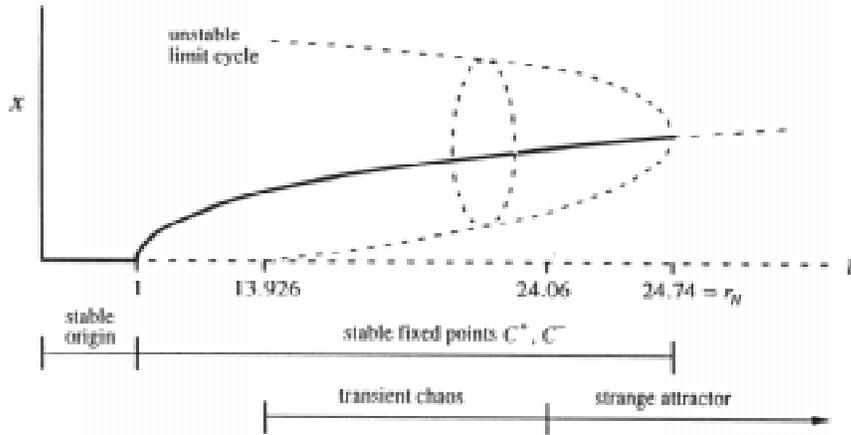
## 5.1 Efecto del Ruido de Color

Para el estudio del efecto de un ruido tipo Ornstein-Uhlenbeck en sistemas caóticos acoplados por difusión se escogió, en un primer análisis, una cadena de osciladores caóticos, del tipo de Lorenz [ver apéndice A], difusivamente acoplados en los que se procedió a la introducción de una señal ruidosa sobre el parámetro  $R$  de cada uno de los elementos de la cadena. El sistema de ecuaciones utilizado para dicha simulación es,

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \alpha (y_j - x_j) \\ \dot{y}_j &= (R + \xi_j(t)) x_j - y_j - x_j z_j + D (y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) \\ \dot{z}_j &= x_j y_j - b z_j \end{aligned} \quad (5.2)$$

con  $\alpha$ ,  $R$  y  $b$  parámetros positivos [Lorenz, 1963]. Los valores más generales para la obtención de la mariposa caótica de Lorenz de dichos parámetros son  $\alpha = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  y  $R = 28$ . Si se mantienen constantes los parámetros  $\alpha$  y  $b$  mientras se varía el parámetro  $R$  es posible hacer un análisis simplificado de la estabilidad lineal del sistema, lo cual será de gran interés para la explicación de los comportamientos observados en el sistema. La Fig. 5.5 muestra un sencillo

diagrama de bifurcación del modelo de Lorenz.



**Figura 5.5:** Diagrama de bifurcación del modelo de Lorenz [Strogatz, 1994].

El origen es estable para  $R < 1$ . En  $R = 1$  este pierde estabilidad a través de una bifurcación Pitchfork supercrítica y aparecen un par de puntos de atracción simétricos. En  $R_H = 24.74$ , los puntos fijos pierden su estabilidad absorbiendo un ciclo límite inestable en una bifurcación de Hopf subcrítica y el sistema no lineal llega a ser un atractor extraño.

En la Ec. (5.2)  $D$  da cuenta del coeficiente de acoplamiento a primeros vecinos entre los  $N$  elementos de la cadena, ( $j = 1 \dots N$ ) y  $\xi(t)$  es un ruido Gaussiano coloreado de media cero cuya dinámica viene dada por

$$\dot{\xi} = -\tau^{-1}\xi + \tau^{-1}\xi_w(t) \quad (5.3)$$

Este es un proceso estocástico del tipo de Ornstein-Uhlenbeck [Sancho et al., 1982; García-Ojalvo & Sancho, 1999] controlado por ruido blanco Gaussiano,  $\xi_w(t)$ , también de media nula, y  $\langle \xi_w(t)\xi_w(t') \rangle = 2A\delta(t-t')$ . La función de correlación de  $\xi(t)$  es una función

exponencial dada por

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{A}{\tau} \exp\left(\frac{-|t-t'|}{\tau}\right) \quad (5.4)$$

donde  $\tau$  es el tiempo de correlación,  $A$  es la amplitud del ruido y  $\sigma = \sqrt{A/\tau}$  es la dispersión del ruido. En el límite cuando  $\tau \rightarrow 0$  y si  $\sigma^2\tau$  permanece constante se recupera el límite de ruido blanco  $\xi_w(t)$  [ver apéndice B].

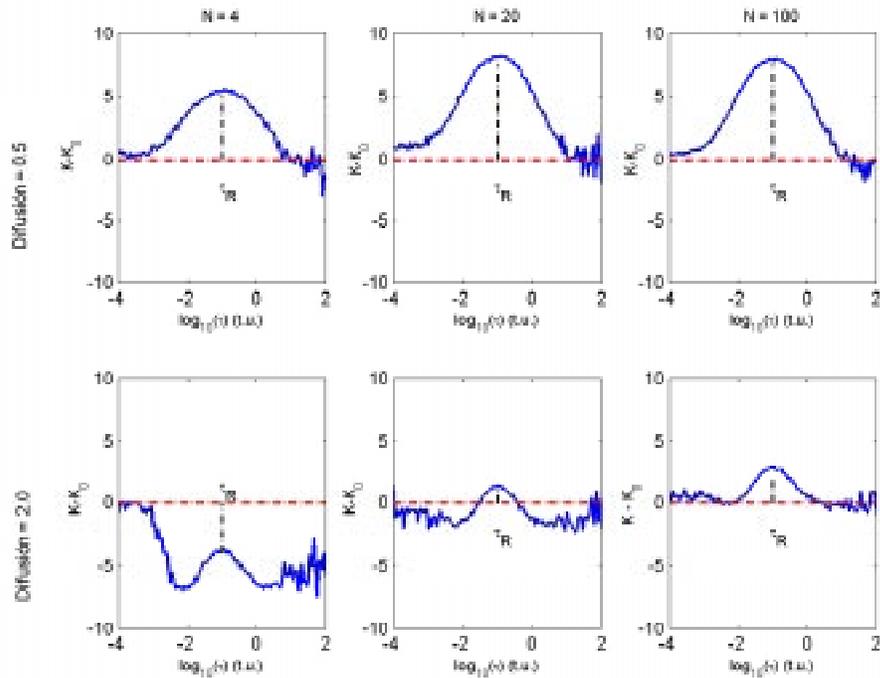
En este análisis en el que el ruido es añadido al sistema en un modo multiplicativo y perturbando el parámetro de bifurcación  $R$  se analizará tanto el caso de ruido local o incoherente, en el que el ruido se encuentra descorrelacionado de un elemento a otro, como el de ruido global, donde el ruido es idéntico en cada elemento de la cadena [Lorenzo & Pérez-Muñuzuri, 1999; Lorenzo & Pérez-Muñuzuri, 2000].

Para la integración de la Ec. (5.2) se usó el algoritmo de Euler [ver apéndice B] con un paso de integración  $tstep = 10^{-4}$ . Además, se consideraron tanto condiciones de contorno periódicas como condiciones de contorno de flujo nulo. Por otro lado el ruido  $\xi(t)$  fue numéricamente calculado en cada elemento  $j$  con un algoritmo integral sugerido por Fox et al. en lugar de resolver la Ec. (5.3) [Fox et al., 1988; García-Ojalvo & Sancho, 1999]. La elección de las condiciones iniciales para cada uno de los elementos de la cadena se hizo de forma aleatoria. Las simulaciones numéricas se repitieron una media de cinco veces para cada 12.000.000 de iteraciones o bien hasta que el parámetro de estudio  $K$  variara menos de un 5%.

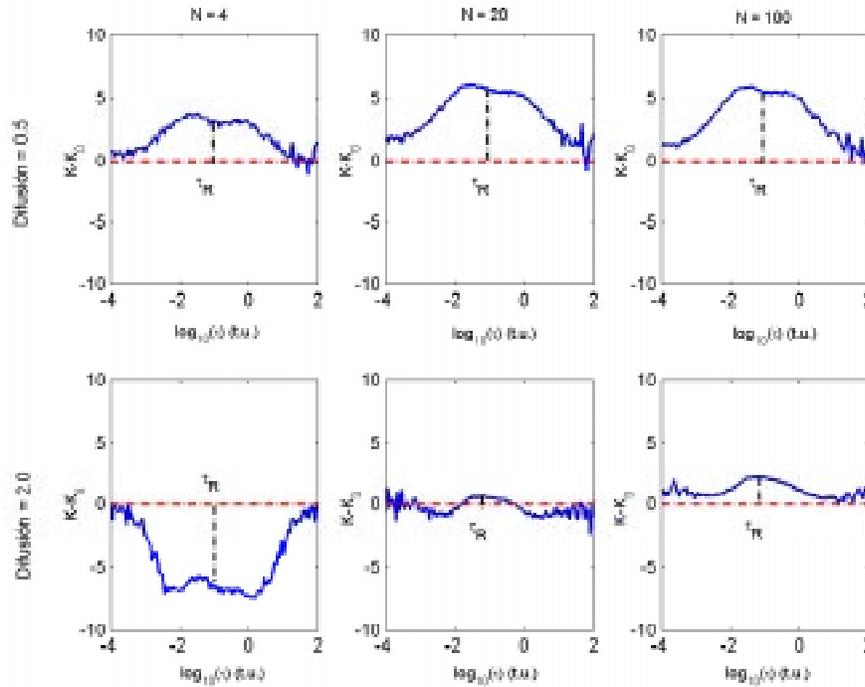
### 5.1.1 Resultados al Perturbar el Parámetro de Bifurcación

El principal efecto observado en un sistema de celdas caóticas del tipo de Lorenz acopladas de forma difusiva y perturbadas multiplicativamente a través del parámetro  $R$  se muestra de forma separada para el caso de ruido local, Fig. 5.6, y para el caso de ruido global, Fig. 5.7, frente a una función del tiempo de correlación  $\tau$ , el número de elementos de la cadena  $N$ , y la intensidad del acoplamiento  $D$ . Para valores bajos de la difusión (filas superiores

en ambas figuras) se puede observar, independientemente de los valores especificados, que la dependencia del grado de sincronización con el tiempo de correlación es equivalente para todas las cadenas consideradas.



**Figura 5.6:** Dependencia de  $K - K_0$  en función de  $\log_{10}\tau$  para diferentes valores del coeficiente de difusión  $D$  y el número de elementos caóticos de la cadena. Aquí se **considera ruido local o descorrelacionado**;  $\xi_i(t) \neq \xi_j(t)$   $i, j = 1, \dots, N$ . En este caso se ha tomado  $\sigma = 3.0$  y condiciones de flujo nulo en la integración de la Ec. (5.2).



**Figura 5.7:** Dependencia de  $K - K_0$  en función de  $\log_{10}\tau$  para diferentes valores del coeficiente de difusión  $D$  y el número de elementos caóticos de la cadena. Aquí se considera **ruido global o correlacionado**;  $\xi_i(t) = \xi_j(t)$   $i, j = 1, \dots, N$ . En este caso se ha tomado  $\sigma = 3.0$  y condiciones de flujo nulo en la integración de la Ec. (5.2).

Cuando  $\tau$  se incrementa aparece un máximo en el comportamiento del grado de sincronización para un valor de  $\tau$  que denominaremos  $\tau$  de resonancia,  $\tau_R$ , y a medida que  $\tau \rightarrow \infty$ , el valor de  $K$  tiende a  $K_0$  que corresponde al valor del grado de sincronización obtenido cuando no se considera la presencia de ruido en la cadena. Como se puede observar si se comparan las Figs. 5.6 y 5.7, el único efecto que diferencia al caso de ruido correlacionado o global del ruido descorrelacionado o local es la atenuación de la curva entorno al máximo,  $\tau = \tau_R$ . También se puede observar que a medida que aumenta el número de elementos de

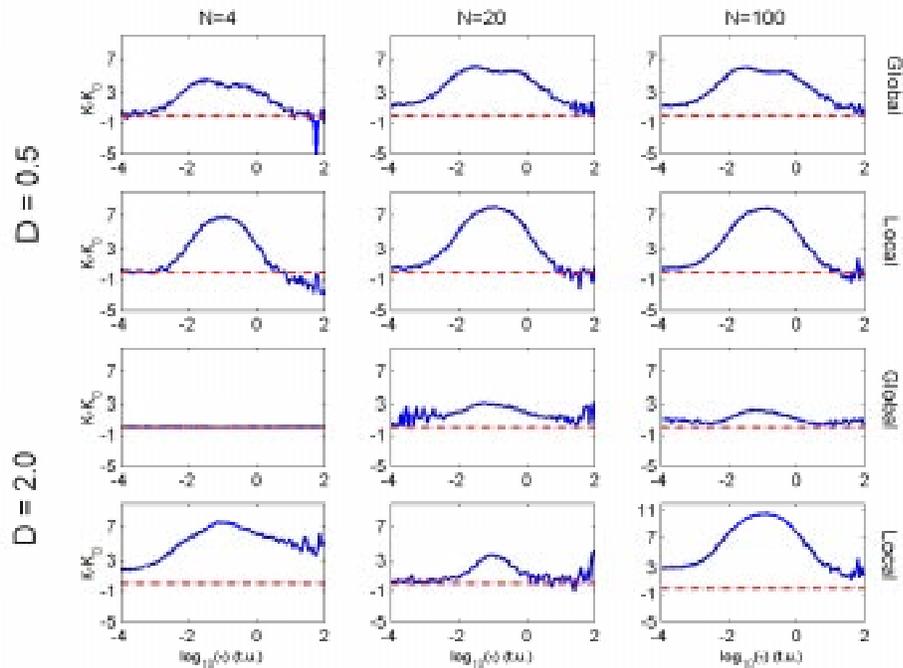
la cadena el valor de dicho máximo se incrementa. No obstante, este incremento se debilita a medida que crece el valor de  $N$ , así, se puede ver que la diferencia entre el valor alcanzado por  $K - K_0$  para una cadena de 100 elementos con respecto a una cadena de 20 elementos es menor que la diferencia encontrada entre una cadena de 20 elementos y una cadena de 4 elementos. Esta diferencia viene principalmente justificada por el diferente valor encontrado para  $K_0$  de acuerdo con las diferentes longitudes de la cadena.

Ya que  $K$  mide el grado de sincronización entre los elementos de la cadena y  $K - K_0$  es mayor que cero, el efecto del ruido coloreado para valores bajos de difusión es deteriorar la sincronización del sistema para valores cercanos al valor de resonancia  $\tau_R$ .

Por otro lado, cuando el valor de la difusión entre los elementos de la cadena se incrementa, filas inferiores en las Figs. 5.6 y 5.7, se observa un efecto opuesto al observado para valores bajos de  $D$ . Es decir, a medida que el tiempo de correlación aumenta, el valor de  $K$  disminuye, para aumentar ligeramente en torno a un valor determinado de  $\tau = \tau_R$  y disminuir de nuevo a medida que  $\tau$  sigue creciendo, para finalmente estabilizarse en torno al valor de sincronización correspondiente a un sistema sin perturbar,  $K_0$ . Este comportamiento de  $K$  se va desvaneciendo a medida que aumenta el número de unidades caóticas en el sistema tal y como se puede ver para el caso de  $N = 100$  donde el comportamiento recupera la tendencia observada para valores de  $D$  bajos. La razón de esta tendencia se debe a que el incremento del coeficiente de difusión favorece la formación de agrupaciones o *cluster* entre elementos de la cadena, formación mucho más notable en cadenas de pequeño tamaño (caso  $N = 4$ ), de ahí que la mejora observada con respecto al caso sin perturbar disminuya a medida que el número de elementos en la cadena crece.

Al igual que ocurre para valores de difusión bajos, también aquí se encuentra un comportamiento equivalente entre los resultados correspondientes a ruido local y los obtenidos con ruido global. Cuando  $\tau \rightarrow 0$  y  $\sigma^2\tau$  permanece constante, se recupera el límite de ruido blanco Gaussiano y las celdas de la cadena no llegan a sincronizar independientemente del valor de la varianza del ruido [Sánchez et al., 1997; 1999]. Únicamente el término de difusión permite una extensión de la sincronización entre los

elementos de la cadena. De igual modo, cuando  $\tau \rightarrow \infty$  el término ruidoso se comporta como un valor constante diferente para cada elemento. El ruido afecta a la dinámica del atractor extraño que llega a ser asimétrico, a la vez que la no sincronización se observa entre las unidades dentro de la cadena. Si se aumenta suficientemente la amplitud del ruido, el principal efecto que se produce es una polarización de la señal que induce una regularización en el sistema. Este efecto es análogo al que algunos métodos de supresión de caos pueden conseguir a través de perturbaciones en las variables del sistema [Matías & Güémez, 1994].



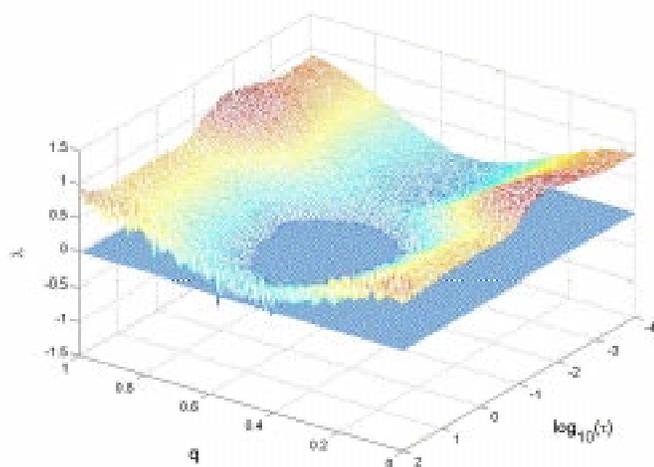
**Figura 5.8:** Dependencia de  $K - K_0$  en función de  $\log_{10} \tau$  para tres tamaños diferentes de la cadena con ruido global y local y tanto para difusiones altas como bajas. Se han considerado condiciones de contorno periódicas y  $\sigma = 3.0$  en la integración de la Ec. (5.2).

Este mismo análisis se ha hecho para el caso de condiciones de contorno periódicas.

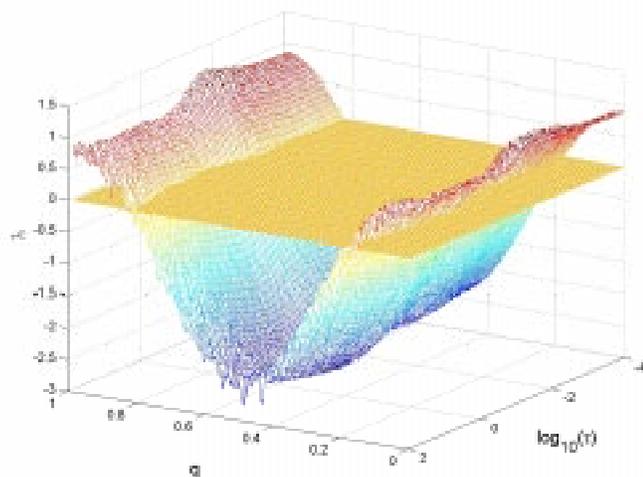
La Fig. 5.8 resume los resultados obtenidos para tres longitudes distintas de la cadena de osciladores, considerando los dos casos de difusión, alta y baja, y teniendo en cuenta tanto la posibilidad de perturbar los elementos de forma global como local. El comportamiento observado es muy similar al encontrado cuando se consideraron condiciones de flujo nulo, sobre todo cuando comparamos los resultados para  $D = 0.5$  (ver Figs. 5.6 y 5.7). Para  $D = 2.0$  la situación difiere ligeramente como consecuencia de las implicaciones derivadas de una geometría circular. Ahora, el efecto de formación de *clusters* que favorecía el que la función  $K - K_0$  tomara valores negativos se ve suprimido. Esto no quiere decir que no se produzcan agrupaciones en la cadena. Por ejemplo, en el caso de cadenas pequeñas,  $N = 4$ , la configuración circular de la cadena provoca que los cuatro osciladores se encuentren completamente sincronizados cuando  $D = 2.0$ . La perturbación global de este anillo no es capaz de provocar la ruptura de dicho cluster dejando al sistema imperturbable ante la adición de ruido ( $K - K_0 = 0$ ). La situación cambia cuando la perturbación pasa a ser local o bien se incrementa el tamaño del anillo de forma que  $K - K_0$  se deteriora, comportándose de forma análoga al caso de difusiones bajas.

Para un análisis más completo del grado de sincronización de la cadena, se propuso analizar éste en función del espectro del mayor de los exponentes de Lyapunov transversos (*TLE*) del sistema en estudio,  $\lambda(q)$ , [ver apéndice C]. Debido a limitaciones inherentes al cálculo de dicho espectro, el análisis a través de dicho exponente se redujo al caso de cadenas con condiciones de contorno periódicas y ruido global.

En las Figs. 5.9 y 5.10 se muestra la representación tridimensional del mayor exponente de Lyapunov transverso  $\lambda(q, \tau)$  en función de la función del tiempo de correlación  $\log_{10}\tau$  y el número de onda reducido  $q = k/N$  [ver apéndice C] para los casos de baja y alta difusión,  $D = 0.5$  y  $D = 2.0$ , respectivamente.



**Figura 5.9:** Representación 3D del mayor *TLE* en función del tiempo de correlación y el número de onda reducido. La función  $\lambda(q, \tau)$  cruza de positivo a negativo para algunos valores críticos  $\tau_c$  y  $q_c$ . Los parámetros considerados son ruido global,  $\sigma = 3$  y  $D = 0.5$ .



**Figura 5.10:** Representación 3D del mayor *TLE* en función del tiempo de correlación y el número de onda reducido. La función  $\lambda(q, \tau)$  cruza de positivo a negativo para algunos valores críticos  $\tau_c$  y  $q_c$ . Los parámetros considerados son ruido global,  $\sigma = 3$  y  $D = 2.0$ .

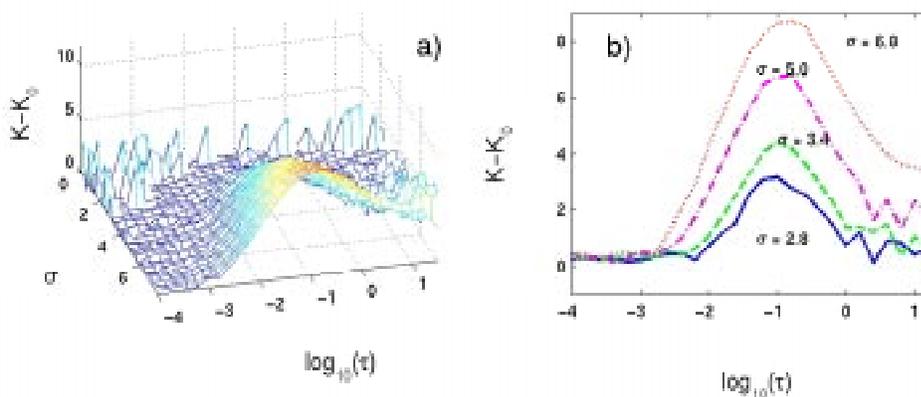
En ambas Figs. 5.9 y 5.10 se observa que para cualquier valor de  $\log_{10}\tau$ ,  $\lambda(q)$  es simétrico con respecto a la línea  $q = 1/2$  tal y como se describe en el apéndice C. Por otro lado, para cualquier valor de  $q$ , el comportamiento de  $\lambda(\tau)$  es equivalente al mostrado en la Figs. 5.6, 5.7 y 5.8. Esto es, un máximo de  $\lambda(\tau)$  sucede para algún  $\tau_R$ . La función  $\lambda(q, \tau)$  cruza el valor cero (mostrado como un plano en las Figs. 5.9 y 5.10) alcanzando valores negativos para determinados valores  $q_c$  y  $\tau_c$ . El número de onda  $q_c$  señala la inestabilidad del anillo, y el valor más bajo de  $N$  para el cual la condición  $k = Nq_c$  puede ser satisfecha es  $k = 1$ . Cuando  $k$  es una variable entera, entonces el tamaño crítico del anillo  $N_c$  se define como el valor más bajo de  $N$  para el que  $N_c q_c \geq 1$  para algún tiempo de correlación  $\tau_c$ . Así pues, para algún valor discreto de  $q_c$  (ver tabla 5.1), existe un valor mínimo de  $\tau_c$  para el que  $\lambda(q, \tau)$  es negativo, y la dinámica del anillo bifurca desde un estado no sincronizado a un estado sincronizado. Al igual que en el caso de  $K(\tau)$ , en el límite  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $\lambda(q, \tau) \rightarrow \lambda(q, \tau \rightarrow 0)$ .

$q_c$	$N_c(k=1)$	$\tau_c(t.u.)$
0.5	2	0.045
0.33	3	0.158
0.25	4	$\infty$

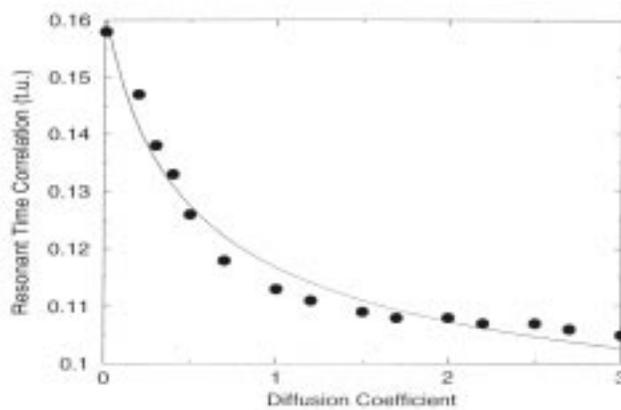
**Tabla 5.1:** Valores críticos de  $q$ ,  $N$ , y  $\tau$  para los cuales  $\lambda(q, \tau)$  se hace negativo.

Otro parámetro que se ha variado en el estudio es la dispersión del ruido. La Fig 5.11 muestra la dependencia del grado de sincronización con la dispersión del ruido y el tiempo de correlación para una longitud de la cadena dada y un valor de difusión determinado. Como se puede observar, independientemente del valor de  $\sigma$ , la forma de la curva se conserva, con un máximo que se desarrolla alrededor de  $\tau = \tau_R$ , tal y como se puede ver en los cortes de  $K - K_0$  obtenidos para diferentes valores de  $\sigma$  en función de  $\tau$ . El papel de  $\sigma$  es únicamente el de incrementar el valor del máximo de  $K - K_0$  ensanchando dicho máximo entorno a  $\tau = \tau_R$ . A diferencia de los ejemplos típicos de resonancia estocástica en los que dicho fenómeno era consecuencia de la dispersión del ruido contaminante, aquí se observa que el efecto resonante es función del tiempo de correlación del ruido y no de su amplitud [Cabrera & De la Rubia, 1997; Cabrera et al., 1999; Barzykin et al., 1998]. A medida que  $\sigma$  crece, se precisan valores mayores de  $\tau$  para relajar el valor del grado de sincronización hacia  $K_0$  tal y como se observa

en la Fig. 5.11b.



**Figura 5.11:** a) Representación 3D de  $K - K_0$  en función de la dispersión del ruido  $\sigma$  y del tiempo de correlación  $\tau$ . b) Secciones de la figura 3D para valores de la dispersión. En esta figura se han considerado condiciones de contorno periódicas, ruido descorrelacionado,  $N = 20$  y  $D = 2.0$ .



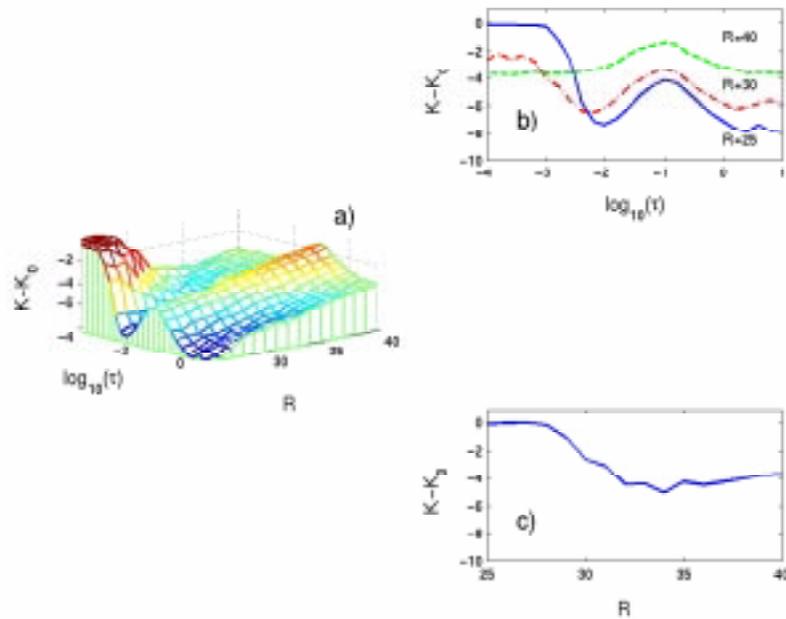
**Figura 5.12:** Dependencia del tiempo de correlación de resonancia  $\tau_R$  en función del coeficiente de difusión  $D$  para un valor constante de dispersión. La línea representa un ajuste no lineal de los valores obtenidos de  $\tau_R$  a la ecuación  $a_0 + a_1/\sqrt{a_2 + D}$ . Ruido descorrelacionado, condiciones de flujo nulo,  $N = 4$  y  $\sigma = 3$ .

Si se varía el coeficiente de difusión entre los elementos caóticos de la cadena para un valor de dispersión del ruido constante, se obtiene que el valor del tiempo de correlación para el que se alcanza el valor máximo en el grado de sincronización,  $\tau_R$ , disminuye al aumentar  $D$  tal y como se puede ver en la Fig. 5.12. Para valores de difusión muy bajos,  $D \rightarrow 0$ , la no mejora o empeoramiento de la sincronización entre los elementos de la cadena se encuentra para cualquier valor de  $\tau$  [Maritan & Banavar, 1994; Sánchez et al., 1999]. Por otro lado, se ha encontrado que el valor máximo de  $K$  decrece linealmente cuando el valor de difusión se incrementa. El mismo comportamiento observado para  $\tau_R(D)$  en una cadena de pequeña longitud (Fig. 5.12) se repite para cadenas con valores de  $N$  mayores. Sin embargo, para un valor dado de  $D$ , el valor de  $\tau_R$  no varía con el valor de  $N$ , como en una primera aproximación podría esperarse si únicamente actuara como un parámetro que ayuda o dificulta la visión entre sí de los osciladores de la cadena. No obstante, el efecto del parámetro  $D$  no puede ser reducido a una función tan simple como alargar o reducir el tamaño de la cadena. Con el parámetro  $D$  también se varía el espacio de fases de cada uno de los osciladores, pudiendo incluso sacarlos de su estado caótico [Pérez-Villar et al., 1993; DeCastro et al., 1995] y al variar dicho comportamiento también variará la perturbación que obtenga resonancia sobre la nueva dinámica del sistema modificado.

Una explicación sencilla de los resultados observados podría darse si se considerara que en las proximidades del comienzo de resonancia,  $\tau_R$ , la dinámica de la cadena se puede reducir a la de una cadena de osciladores linealmente acoplados y periódicamente forzados con una frecuencia igual a  $\tau_R^{-1}$ , cuya dinámica se puede describir en términos de una onda plana. La frecuencia de onda  $\omega$  y el coeficiente de difusión se encuentran relacionados a través de la ecuación de dispersión de ondas,  $\omega \propto \sqrt{D}/\lambda$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda. Para cadenas de pequeña longitud, se puede considerar que  $\lambda$  se fija por las condiciones de contorno permaneciendo constante. Esto se adecua a nuestras simulaciones donde se ha encontrado que  $\tau_R \propto 1/\sqrt{D}$  independientemente de la longitud de la cadena. Obviamente, la explicación dada es una simplificación del problema, ya que la dinámica caótica no puede ser reducida a la de un simple oscilador. No obstante, nuestro objetivo es mostrar la similaridad entre el problema de cierre de la frecuencia clásica que ocurre en una cadena de osciladores forzados

periódicamente y el comportamiento de  $K$  para  $\tau \rightarrow \tau_R$ . Aquí, el *locking* no ocurre para una única frecuencia, sino para un rango de frecuencias que da lugar a un amplio comportamiento de  $K$  en función del tiempo de correlación cerca del comienzo de resonancia.

Ya que el ruido es añadido sobre el parámetro  $R$  en la Ec. (5.2) y que dicho parámetro juega un importante papel en la estabilidad del modelo de Lorenz como parámetro de bifurcación resulta interesante el estudio de la dependencia del sistema con respecto a dicho parámetro. La influencia de  $R$  se muestra en la Fig. 5.13.

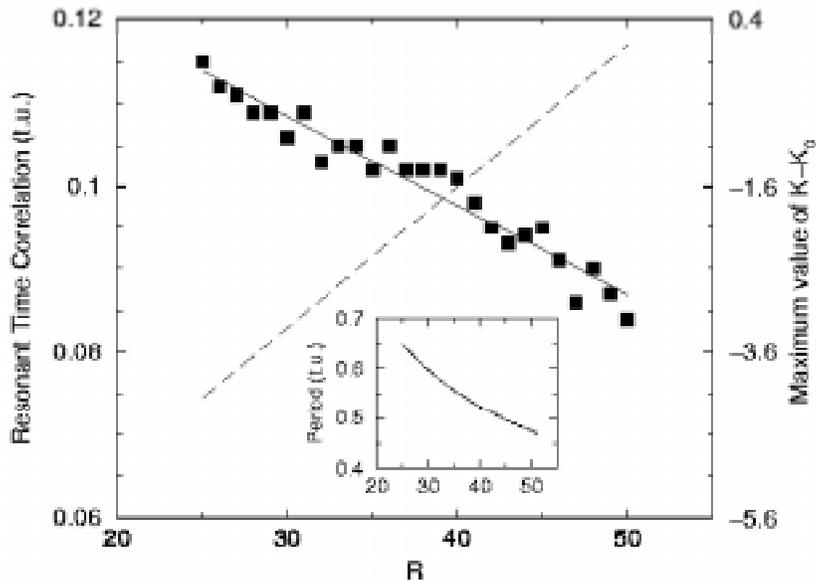


**Figura 5.13:** a) Representación tridimensional de  $K - K_0$  en función de  $\log_{10}\tau$  y el parámetro de bifurcación  $R$ . b) Sección de la representación tridimensional para tres valores de  $R$ . c) Dependencia de  $K - K_0$  con  $R$  para el límite de ruido blanco gaussiano  $\tau = 10^{-4}$ . En este caso se ha considerado  $N = 4$ ,  $\sigma = 3$ ,  $D = 2$  y condiciones de flujo nulo en la integración de la Ec. (5.2).

En la Fig. 5.13a se observa que al incrementar el valor del parámetro de bifurcación,

la función  $K(\tau)$  muestra un desplazamiento global hacia valores positivos, deteriorando la sincronización entre los elementos de la cadena. Este efecto se puede ver más claramente en los cortes de la Fig. 5.13b para distintos valores de  $R$ . Por último, en la Fig. 5.13c se observa el comportamiento monótonico de  $K - K_0$  en función de  $R$  para  $\log_{10}\tau = -4$ , donde se recupera el límite de ruido blanco Gaussiano.

La dependencia de  $\tau_R$  y del valor máximo del grado de sincronización,  $K_{max} = \max(K - K_0)$ , con el parámetro de bifurcación  $R$  se muestra en la Fig. 5.14.



**Figura 5.14:** Dependencia del tiempo de correlación de resonancia  $\tau_R$  (eje de la izquierda y cuadrados negros ajustados a una línea recta) y del valor máximo de  $K - K_0$  (eje de la derecha y línea discontinua) en función del parámetro de bifurcación  $R$ . La gráfica interna muestra la dependencia del periodo medio de oscilación  $T$  de un único Lorenz en función de  $R$ . Los parámetros aquí considerados son:  $N = 4$ ,  $\sigma = 3$ ,  $D = 2$  y condiciones de flujo nulo.

Para hacer un análisis comparativo se representa en el recuadro interior el periodo medio de oscilación  $T$  para un único oscilador de Lorenz. Es notable la similitud mostrada

entre el comportamiento de  $\tau_R$  y  $T$  con el parámetro  $R$ , disminuyendo su valor a medida que este incrementa. Por el contrario, el valor máximo del grado de sincronización aumenta linealmente con  $R$  pasando incluso de valores negativos a positivos, es decir, pasando de mejorar la sincronización a degradarla.

Claramente, en el estudio considerado se pueden apreciar dos efectos; primeramente, se observa un efecto de *locking* entre la frecuencia característica del oscilador y el tiempo de correlación del ruido que se expresa como un máximo de la función  $K(\tau)$  para  $\tau = \tau_R$  y, en segundo lugar, se observa una mejora o una degradación de la sincronización entre los elementos de la cadena que depende de la intensidad del ruido y del coeficiente de difusión, así como de la proximidad al punto de bifurcación  $R_H$ .

### 5.1.1.1 Resonancia en la Dinámica del Atractor

Si se analizan los resultados presentados, se puede decir que el ruido Gaussiano correlacionado en el tiempo es equivalente de alguna manera a una modulación periódica de la dinámica del atractor. Dado que el espectro de potencia del ruido no puede ser considerado plano dentro del rango de frecuencia de interés,  $\tau^{-1}$ , cabe esperar un efecto resonante entre la escala temporal del atractor y el tiempo de correlación del ruido. La dependencia de  $K$  con la escala temporal del atractor y el hecho de que los valores de  $\tau_R$  se encuentren dentro de los periodos de oscilación del atractor refuerzan esta idea.

Para ratificar la existencia de este efecto de resonancia, se ha modificado el término de ruido en la ecuación de evolución de la variable  $y$  del sistema de Lorenz, Ec. (5.2) en el modo,

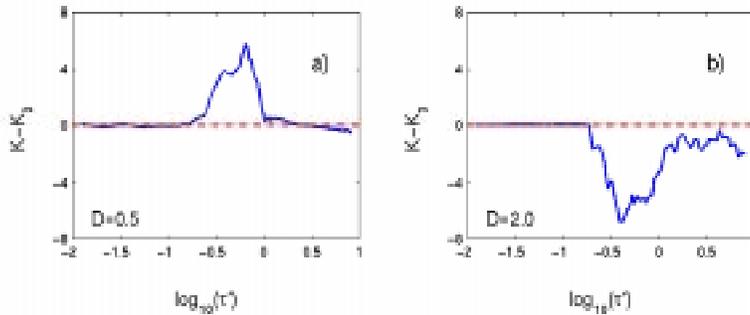
$$\dot{y}_j = R(t)x_j - y_j - x_j z_j + D(y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) \quad (5.5)$$

$$R(t) = R + \bar{\sigma} \cos \left[ \frac{2\pi t}{\tau'} + \phi_j \right] \quad (5.6)$$

donde los valores de la amplitud  $\bar{\sigma}$  y el periodo  $\tau'$  del forzamiento periódico son equivalentes

a la dispersión del ruido  $\sigma$  y al tiempo de correlación en Ec. (5.4).  $\phi_j$  es una fase aleatoria inicial que será diferente o igual para cada elemento de la cadena, dependiendo de si estamos tratando con forzamiento local o global, respectivamente.

Las Figs. 5.15a y 5.15b muestran la dependencia de  $K - K_0$  con el forzamiento periódico  $\tau'$  sobre el sistema de Lorenz modificado, Ecs. (5.5) y (5.6), para dos valores del coeficiente de difusión  $D$ .



**Figura 5.15:** Dependencia de  $K - K_0$  con el forzamiento periódico  $\tau'$  para el modelo de Lorenz modificado, Ecs. (5.5) y (5.6), para dos valores diferentes del coeficiente de difusión; a)  $D = 0.5$  y b)  $D = 2.0$ . Los parámetros considerados son  $N = 4$ ,  $\sigma' = 3$ , condiciones de flujo nulo y  $\phi_j \neq \phi_i, \forall i, j = 1 \dots N$ .

Al igual que en el caso de forzamiento con ruido correlacionado en el tiempo, también aquí el grado de sincronización presenta un valor máximo o un valor mínimo para un  $\tau'$  dado, que depende de la intensidad del acoplamiento entre las celdas de la cadena. Se puede observar que debido a que la frecuencia característica del forzamiento periódico es única y bien definida, los picos son más estrechos que los obtenidos con ruido Gaussiano coloreado, Figs. 5.6 y 5.7. Por otro lado, el valor de  $\tau' = \tau'_R$  correspondiente al máximo y al mínimo de la función  $(K - K_0)(\tau')$  de las Figs. 5.15a y 5.15b es igual al periodo medio de oscilación de un único Lorenz para el conjunto de parámetros seleccionado,  $T = 0.61 \text{ t.u.}$  Los valores medidos para  $\tau'_R$  (o equivalentemente  $T$ ) son mayores que los correspondientes valores para

$\tau_R$ , mostrados en la Fig. 5.14 para diferentes valores del parámetro de bifurcación  $R$ , ya que, por definición, el tiempo de correlación  $\tau$  es el periodo de tiempo en el que los valores de  $\xi(t)$  están correlacionados temporalmente ( $\tau$  controla la memoria temporal del proceso)  $\tau_R$  debe ser menor que  $T$ .

Por otro lado, un segundo efecto ha sido observado en los resultados obtenidos con ruido de color, dicho efecto se materializa en la mejora o degradación del grado de sincronización del sistema.

### 5.1.1.2 Mejora o Degradación de la Sincronización Caótica

Recopilando los resultados mostrados anteriormente se llega a la conclusión de que incrementando la intensidad del acoplamiento entre los elementos de la cadena se puede llegar a una mejora en la sincronización caótica debida a la formación de agrupaciones o *clusters* (conjunto de elementos sincronizados dentro de la cadena). Este efecto se hace más notorio para cadenas de longitud pequeña en las que disminuye el número de *clusters* posibles haciendo que el valor de  $K$  sea menor que el de  $K_0$ . No obstante, en las Figs. 5.13 y 5.14 se puede ver que dicho comportamiento puede llegar a invertirse con el incremento del valor de  $R$ , de forma que el valor máximo de  $K - K_0$  crezca hasta degradar la sincronización (observese que  $R > 49.5 \Leftrightarrow K - K_0 > 0$  en Fig. 5.14). La explicación a este fenómeno puede verse en términos de un efecto de intermitencia *on-off*.

Dado que en la Ec. (5.2) el parámetro de bifurcación  $R$  se modula con  $\xi(t)$ , la probabilidad estacionaria de obtener valores de  $R(t) = R + \xi(t)$  menores que  $R_H$  donde el atractor no es caótico viene dada por

$$P(R(t) \leq R_H) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{R_H} \exp\left(-\frac{(R' - R)^2}{2\sigma^2}\right) dR' \quad (5.7)$$

donde claramente se ve que  $P$  disminuye con el incremento de  $R$  para  $R > R_H$ .

La sincronización entre elementos de la cadena se ve mejorada cuando las trayectorias

de cada sistema se acercan. Este comportamiento dinámico ocurre para  $R(t) < R_H$ ; donde las trayectorias del atractor tienden a uno de los dos puntos fijos estables del sistema de Lorenz, y de este modo, la distancia entre trayectorias disminuye a medida que evolucionan en el tiempo. En otras palabras, las trayectorias correspondientes a los atractores de cada elemento de la cadena convergen con una probabilidad dada por la Ec. (5.7); es decir, la probabilidad de tener valores pequeños de  $\|\bar{u}_j^t - \bar{u}_{j-1}^t\|$  en la Ec. (5.1) disminuye al incrementar  $R$ . Por lo tanto, el comportamiento general de la función  $K(\tau)$  debe ser creciente con  $R$ , tal y como se ve en la Fig. 5.14 para  $K_{max}$ . No obstante, este comportamiento puede modificarse incrementando el valor de  $\sigma$ , ya que la relación de  $P$  con  $R$  disminuye conduciendo a un menor incremento de  $K_{max}$  con  $R$ . Así pues, controlando los valores de  $\sigma$  y  $R$  se puede inducir una mejora de la sincronización entre los elementos de la cadena.

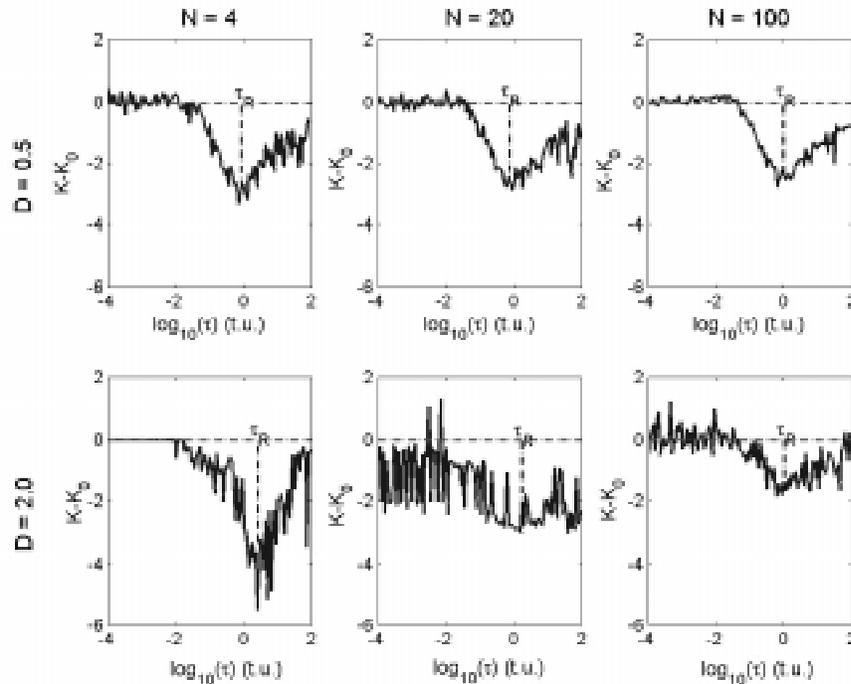
### 5.1.2 Perturbando otros Parámetros del Sistema

Este mismo estudio se puede hacer pero perturbando el parámetro  $\alpha$  en lugar del parámetro  $R$ . En este caso, el sistema de ecuaciones Ec. (5.2), será

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= (\alpha + \xi_j(t))(y_j - x_j) \\ \dot{y}_j &= Rx_j - y_j - x_j z_j + D(y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) \\ \dot{z}_j &= x_j y_j - bz_j\end{aligned}\tag{5.8}$$

Al igual que antes,  $\alpha = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  y  $R = 28$  [Lorenz, 1963],  $D$  da cuenta del término de difusión entre los elementos de la cadena,  $j = 1 \dots N$  ( $N$  número de elementos de la cadena), y  $\xi(t)$  de nuevo representa un ruido Gaussiano coloreado de media cero. Para este estudio nos hemos limitado al caso de ruido correlacionado o global y al igual que para el caso en el que perturbábamos el parámetro  $R$  analizamos el grado de sincronización del sistema, tanto para el caso de condiciones de flujo nulo, como de condiciones de contorno periódicas. Para el primer caso nos servimos del parámetro  $K$ , Ec. (5.1) mientras que el análisis de los anillos se hizo en base al estudio del espectro del mayor exponente de Lyapunov transverso (ver apéndice C).

La Fig. 5.16 muestra el comportamiento de  $K - K_0$  para una cadena con condiciones de flujo nulo en función del tiempo de correlación,  $\tau$ , el número de elementos en la cadena,  $N$ , y el coeficiente de difusión,  $D$ .

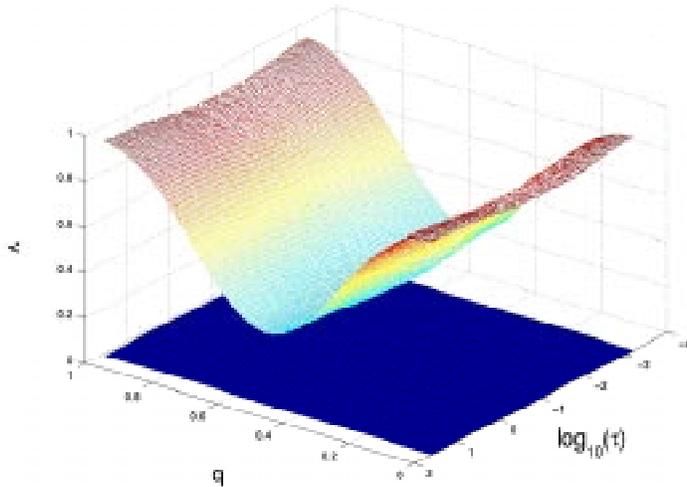


**Figura 5.16:** Dependencia de  $K - K_0$  en función de  $\log_{10}\tau$  para diferentes valores del coeficiente de difusión  $D$  y el número de elementos caóticos  $N$  en una cadena con condiciones de contorno de flujo nulo y en la que un ruido global con  $\sigma = 3$  perturba el parámetro  $\alpha$  del sistema de Lorenz.

Como en el caso en el que se perturbaba al parámetro  $R$ , también aquí se observa un efecto de resonancia entre la escala temporal del sistema caótico y el tiempo de correlación del ruido coloreado,  $\tau = \tau_R$ . Sin embargo, mientras que en el caso mostrado en la Fig. 5.7 se observaba que en función del valor del coeficiente de difusión había una mejora o una degradación de la sincronización en la cadena, aquí, siempre se observa una mejora

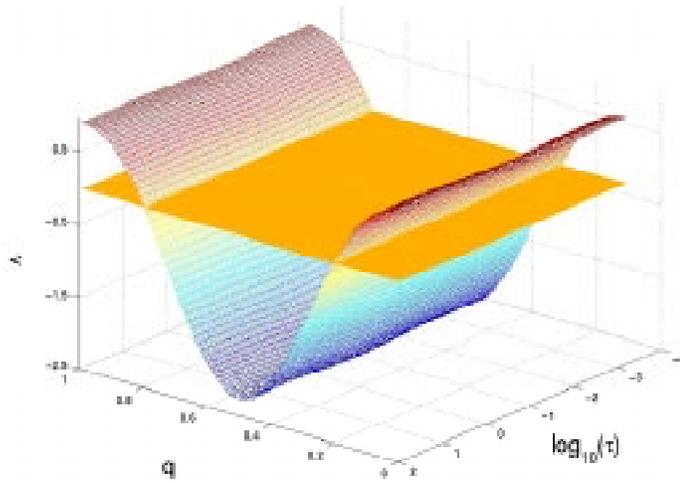
de  $K$  frente a  $K_0$  para un intervalo de valores del tiempo de correlación (recordar que  $K_0$  corresponde al valor de  $K$  para el caso en el que la cadena no es perturbada). Por otro lado, al igual que en el caso donde se perturbaba el parámetro  $R$ , en el límite de ruido blanco Gaussiano,  $\tau \rightarrow 0$  y  $\sigma^2\tau$  constante, la cadena no llega a sincronizar independientemente de la varianza del ruido [Sánchez et al., 1997;1999], y en el límite  $\tau \rightarrow \infty$ , el término de ruido se comporta como un valor constante para cada elemento, de forma que el ruido afecta a la dinámica del atractor que se vuelve asimétrico sin que se observe sincronización entre los elementos de la cadena.

El comportamiento para el caso de cadenas con condiciones de contorno periódicas se presenta en las Figs. 5.17 y 5.18, donde como se hizo en la sección anterior, se lleva a cabo el estudio a través del análisis del mayor exponente de Lyapunov transverso  $\lambda(q, \tau)$  frente a  $\log_{10}\tau$  y el número de onda reducido  $q$ , para  $D = 0.5$  y  $D = 2.0$ , respectivamente.



**Figura 5.17:** Representación 3D del mayor TLE en función del tiempo de correlación y el número de onda reducido. La función  $\lambda(q, \tau)$  cruza de positivo a negativo para algunos valores críticos  $\tau_c$  y  $q_c$ .

Los parámetros considerados son ruido global,  $\sigma = 3$  y  $D = 0.5$ .

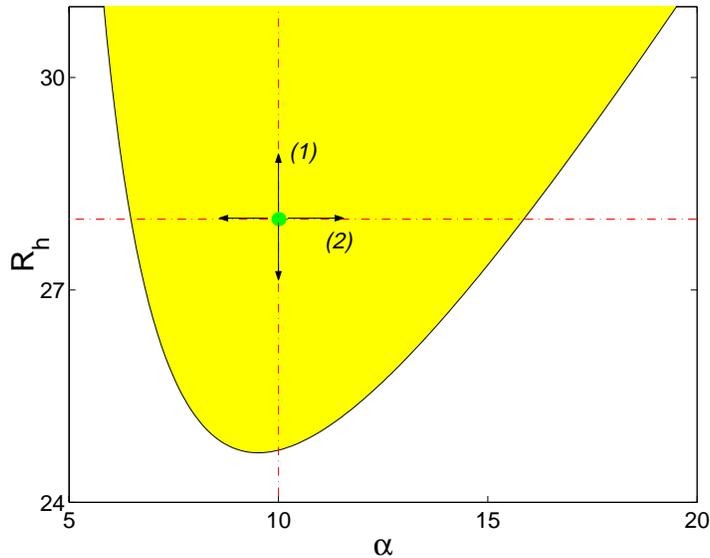


**Figura 5.18:** Representación 3D del mayor  $TLE$  en función del tiempo de correlación y el número de onda reducido. La función  $\lambda(q, \tau)$  cruza de positivo a negativo para algunos valores críticos  $\tau_c$  y  $q_c$ . Los parámetros considerados son ruido global,  $\sigma = 3$  y  $\mathbf{D} = 2.0$ .

En ambas figuras se observa un comportamiento análogo al de las Figs. 5.9 y 5.10. Para cualquier valor de  $q$ ,  $\lambda(\tau)$  muestra el efecto resonante para un  $\tau_R$  al igual que para  $K(\tau)$ .

La razón de que con perturbaciones en  $\alpha$  se encuentre siempre una mejora de la sincronización de la cadena, mientras que con perturbaciones en  $R$  observemos tanto casos de mejora como de degradación, puede encontrarse a través del análisis lineal de la relación existente entre el valor del parámetro  $R$ , para el que el sistema de Lorenz presenta una bifurcación de Hopf, y el parámetro  $\alpha$ ,

$$R_H(\alpha) = \frac{[\alpha(\alpha + b + 3)]}{\alpha - b - 1} \quad (5.9)$$



**Figura 5.19:** Dependencia del valor de  $R$  para el que tiene lugar la bifurcación de Hopf en el sistema de Lorenz en función del parámetro  $\alpha$ . Las flechas indican la dirección de las perturbaciones dependiendo del lugar en el que se producen las perturbaciones ruidosas,  $R(1)$  y  $\alpha(2)$ . El punto (resultado de la intersección de las dos líneas discontinuas) indica la posición de los valores estándar del sistema de Lorenz que se han considerado en nuestro estudio ( $R = 28$  y  $\alpha = 10$ ). La zona sombreada corresponde al conjunto de valores paramétricos de  $R$  y  $\alpha$  que dan un atractor caótico en la dinámica del sistema.

En la Fig. 5.19, donde se representa dicha relación, se puede ver que a diferencia de lo que ocurre cuando el ruido perturba al parámetro  $R$ , cuando el ruido perturba al parámetro  $\alpha$  el efecto de intermitencia *on-off* tiene lugar tanto para valores positivos como negativos de  $\xi(t)$ , puesto que la línea que delimita la zona donde ocurre la bifurcación de Hopf en el sistema de Lorenz puede ser cruzada en ambas direcciones (en este caso la dirección de perturbación es la señalada con la flecha (2) en la Fig. 5.19). De este modo, se explica el hecho de que cuando se perturba el parámetro  $\alpha$  la sincronización de la cadena sea más fácilmente mejorada.

### 5.1.3 Contribución Aditiva del Ruido

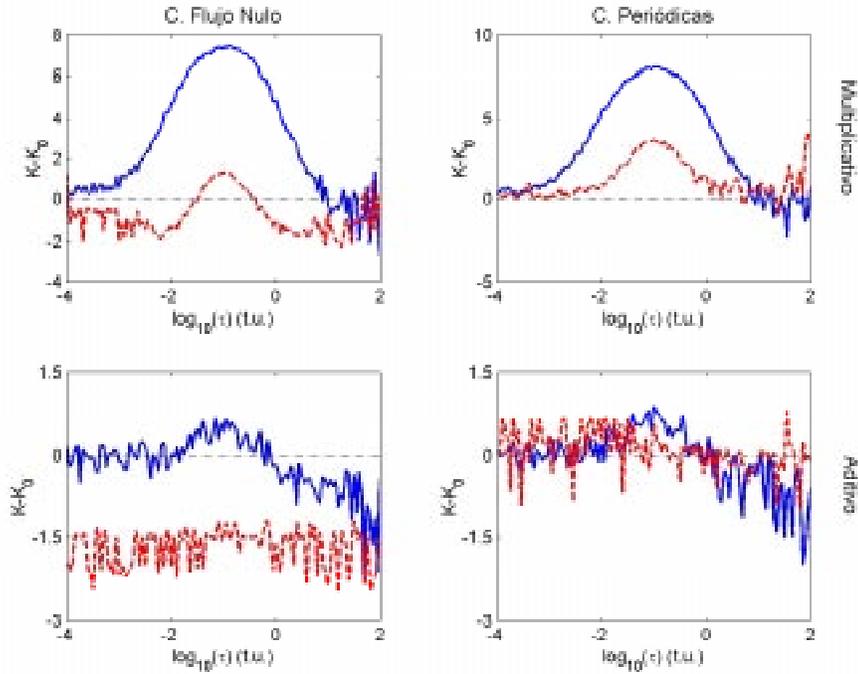
Hasta aquí se ha estudiado el caso en el que la contribución del ruido al sistema era de forma multiplicativa, pero cabe preguntarse que ocurriría en el caso de que la contribución fuera aditiva. En este caso la Ec. (5.2) se transformaría en,

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= \alpha(y_j - x_j) \\ \dot{y}_j &= Rx_j - y_j - x_j z_j + D(y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) + \xi_j(t) \\ \dot{z}_j &= x_j y_j - bz_j\end{aligned}\quad (5.10)$$

Los resultados obtenidos para este análisis muestran una fuerte dependencia del coeficiente de acoplamiento entre los elementos de la cadena, de forma tal que el característico efecto resonante encontrado en el estudio correspondiente a una contribución multiplicativa del ruido de color llega a desaparecer para valores de difusión elevados  $D = 2.0$ , es decir, para fuerte acoplamiento entre los osciladores.

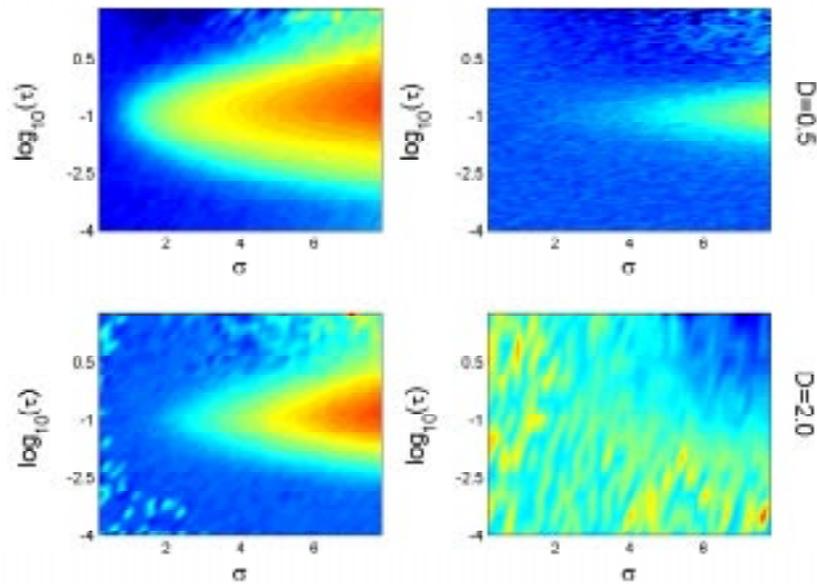
En la Fig. 5.20 se comparan los casos de contribución multiplicativa (filas superiores) y contribución aditiva (filas inferiores) para una cadena de 20 elementos en la que se han considerado tanto condiciones de flujo nulo como periódicas, y una dispersión de ruido  $\sigma = 3$ , para dos valores de difusión dados ( $D = 0.5$  y  $D = 2.0$ , línea continua y punteada, respectivamente).

Un estudio más detallado de  $K$  con la dispersión del ruido y el tiempo de correlación ratifica la mayor dependencia de la contribución aditiva con el término de difusión. Así, en la Fig. 5.21, se puede observar cómo para el caso de  $D = 2.0$  (filas inferiores) el efecto de resonancia con contribución aditiva (columna de la derecha) desaparece en contraposición con el caso multiplicativo (columna de la izquierda) en el que dicho efecto se mantiene. Como ya se mencionó en el estudio de la contribución multiplicativa, el único efecto de la dispersión es incrementar el valor del máximo y ensanchar dicho pico entorno al valor del tiempo de correlación resonante,  $\tau_R$ .



**Figura 5.20:** Dependencia de  $K - K_0$  en función de  $\log_{10}\tau$  para 2 valores de  $D$  y  $N = 20$ . Se ha considerado ruido local y  $\sigma = 3.0$ . La línea continua corresponde al caso  $D = 0.5$  y la línea punteada al caso  $D = 2.0$ .

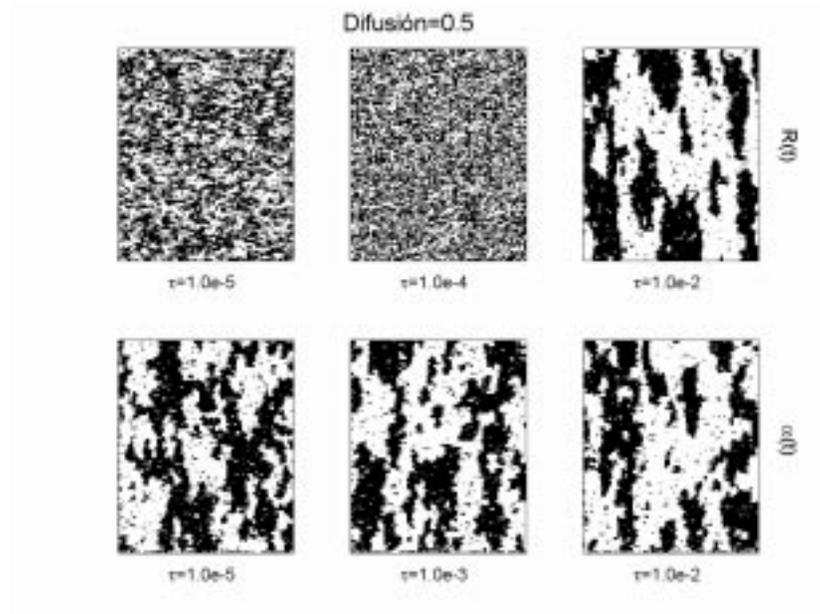
La fuerte dependencia observada con el coeficiente de difusión de la dinámica del sistema especialmente en el caso aditivo puede convertir este efecto resonante en un parámetro de ayuda para discernir entre configuraciones fuertemente acopladas y configuraciones con débil acoplamiento. Es más, si nos remitimos a los resultados presentados en las subsecciones 5.1.1 y 5.1.2, se encuentra que en función del término difusivo se consigue bien una mejora de la sincronización de la cadena con respecto al sistema sin perturbar o bien una degradación de la sincronización.



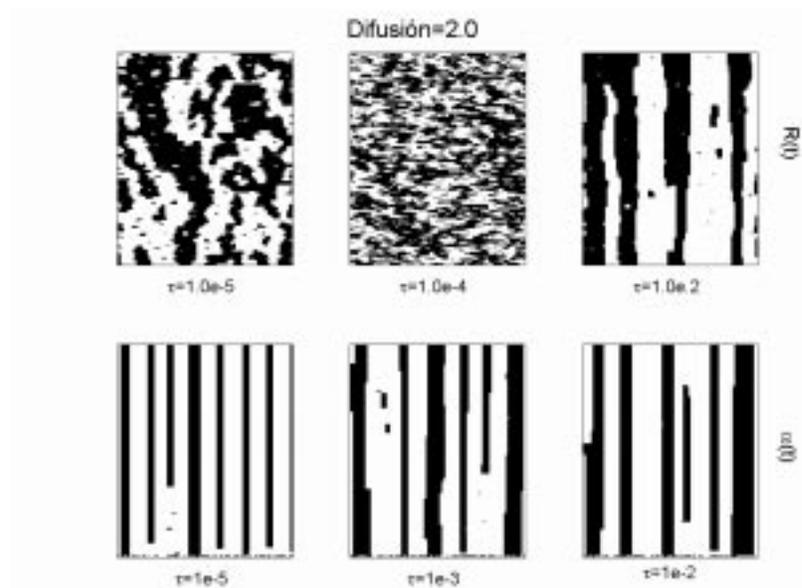
**Figura 5.21:** Dependencia del grado de sincronización  $K - K_0$  en función de  $\log_{10}\tau$  y la dispersión del ruido  $\sigma$ . La columna de la izquierda representa el caso con contribución multiplicativa, con  $D = 0.5$  y  $D = 2.0$ , respectivamente, y la columna de la derecha muestran el caso aditivo. Se ha considerado ruido local en una cadena de  $N = 20$ . El mapa de color cubre el rango  $[-3 \ 13]$  en el caso multiplicativo y  $[-3 \ 6.5]$  en el caso aditivo. La diferente escala se consideró para una mejor visualización de la dinámica de resonancia.

La explicación de los máximos y mínimos de resonancia observados puede encontrarse en la formación de *clusters* o agrupaciones de elementos que sincronizan unos con otros. La aparición de un máximo o de un mínimo, dependerá de donde se perturbe el sistema o de los parámetros impuestos en la cadena como la difusión o las condiciones de contorno. Así, un máximo se puede ver como un incremento en la diversidad de comportamientos y un mínimo como una generalización del comportamiento disminuyendo el número de *clusters* dentro de la cadena. Esto se visualiza en las Figs 5.22 y 5.23 donde se representa la evolución espaciotemporal de los osciladores de una cadena de 100 elementos para dos

coeficientes de difusión y considerando tanto el caso en el que el parámetro perturbado es  $R$  (filas superiores) como el caso en el que las perturbaciones se hacen en el parámetro  $\alpha$  (filas inferiores). En ambas figuras se han tomado 3 valores de  $\tau$  para cada una de las situaciones estudiadas de forma que el comportamiento observado en las Figs 5.6, 5.7 y 5.16 se podría apreciar visualmente en estas figuras. Para el valor del tiempo de correlación correspondiente al valor de resonancia, (imagen central en ambas figuras), dependiendo de si el grado de sincronización,  $K$ , aumenta o disminuye (Figs. 5.6, 5.7 y 5.16) se podría intuir un mayor o menor desorden, concretamente, el caso  $R(t)$  para difusión 2 refleja bastante bien la aparición de una menor agrupación entre los elementos de la cadena, fruto de un aumento en el valor de  $K$  (Fig. 5.6 para  $N = 100$  y  $D = 2.0$ ).



**Figura 5.22:** Observación de la formación y destrucción de agrupaciones en cadenas de Lorenz perturbados por ruido de color. Las filas superiores corresponden a perturbaciones en el parámetro  $R$  y las inferiores en el  $\alpha$ .  $D = 0.5$ . En el eje  $x$  se representa la variable  $x$  de cada uno de los elementos de la cadena y en el eje  $y$  su evolución temporal. El color claro corresponde a valores positivos y el oscuro a valores negativos de la variable.



**Figura 5.23:** Observación de la formación y destrucción de agrupaciones en cadenas de Lorenz perturbadas por ruido de color. Las filas superiores corresponden a perturbaciones en el parámetro  $R$  y las inferiores en el  $\alpha$ .  $D = 2.0$ . En el eje  $x$  se representa la variable  $x$  de cada uno de los elementos de la cadena y en el eje  $y$  su evolución temporal. El color claro corresponde a valores positivos y el oscuro a valores negativos de la variable.

Para ratificar esta aseveración, se procedió al cálculo de la autocorrelación entre los 100 elementos de la cadena en función del tiempo de correlación del ruido. Para el cálculo de dicha correlación se computó la función

$$F(l) = \frac{\sum_j x_j x_{j+l}}{\sum_j x_j^2} \quad (5.11)$$

Si se calculan los límites de confidencialidad de los correlogramas obtenidos ( $\pm 2/\sqrt{N}$ )

[Chatfield, 1984]) se encuentra que tal y como se predecía intuitivamente a la vista de las Figs. 5.22 y 5.23, la resonancia en  $K$  se traduce en una formación o destrucción de *clusters* en la cadena. La tabla 5.2 muestra la longitud de correlación [Chatfield, 1984] obtenida para los diferentes casos mostrados en las Figs. 5.22 y 5.23.

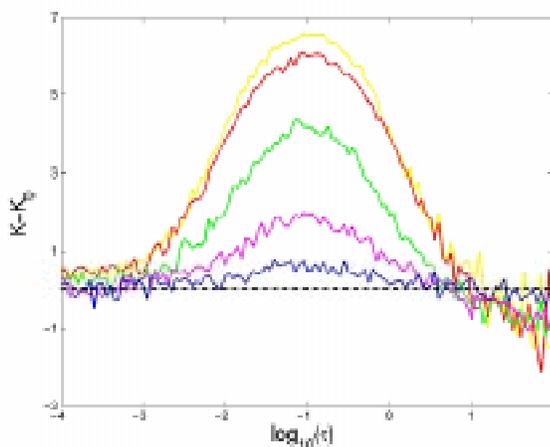
$\tau(\text{t.u.})$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-2}$
$D = 2.0, R(t)$	6.0	4.6	5.5
$D = 0.5, R(t)$	3.0	2.0	6.0
$\tau(\text{t.u.})$	$10^{-5}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$
$D = 2.0, \alpha(t)$	3.9	4.4	4.0
$D = 0.5, \alpha(t)$	5.3	6.0	6.0

**Tabla 5.2:** Longitudes de correlación para los diagramas mostrados en las Figs. 5.22 y 5.23.

Por longitud de correlación se entiende el número medio de elementos que se encuentran correlacionados en una serie numérica. Los valores mostrados en la Tb. 5.2 corresponden a los valores en los que la función de correlación calculada para cada uno de los casos mostrados en las Figs 5.22 y 5.23 cortan los límites de confidencialidad por debajo de los cuales la serie se puede considerar totalmente aleatoria y sin ningún tipo de correlación. Si se observan los valores de la tabla se encuentra que tal y como se intuía en las Figs. 5.22 y 5.23 el incremento observado en  $K$  corresponde con una menor longitud de correlación o lo que es lo mismo un mayor desorden mientras que la disminución de  $K$  se traduce en una mayor longitud de correlación encontrándose una mayor agrupación de elementos en la cadena.

De acuerdo con estas observaciones se podría conocer el tipo de acoplamiento entre los elementos de un sistema o bien inducir la generación o destrucción de agrupaciones simplemente perturbando dicho sistema con señales de ruido coloreado de baja intensidad. Esta idea resulta de gran interés a nivel biológico y de control de caos espaciotemporal. En particular, un atractivo campo de estudio podría ser la región CA3 del *hippocampus*, centro común de los focos epilépticos. En el caso de la epilepsia, estudios recientes achacan el desencadenamiento de un ataque o episodio epiléptico a la sincronización de un gran número de neuronas como consecuencia de una comunicación neuronal demasiado rápida [Jefferys,

1990; Jensen & Yaari, 1997; Larter et al., 1999]. Es más, autores como Freeman y Skarda y posteriormente Kelso y Fuchs han sugerido que el comportamiento caótico es el más deseable para la actividad cerebral ya que un estado caótico corresponde a un número infinito de órbitas periódicas inestables fácilmente accesibles para computación neuronal [Freeman & Skarda, 1985; Kelso & Fuchs, 1995]. Siguiendo esta línea, podría especularse sobre la idea de ayudar a la desincronización de dichas células nerviosas con ruido de baja intensidad o bien podría conocerse el coeficiente de difusión del sistema a partir del grado de sincronización entre las células.

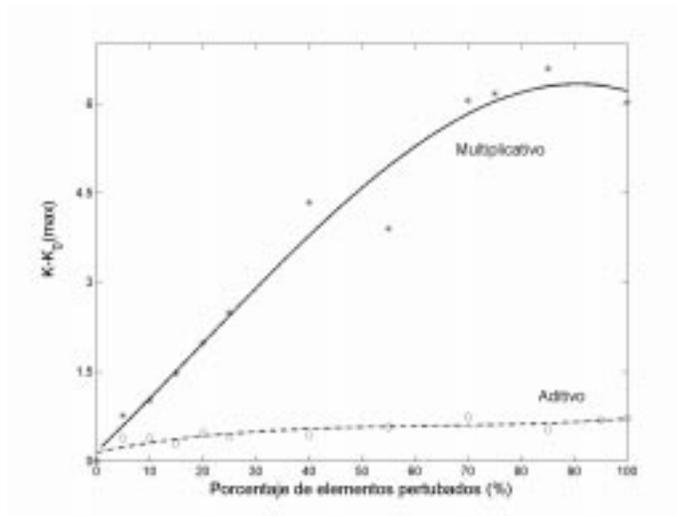


**Figura 5.24:** Dependencia del efecto resonante con el número de elementos perturbados por ruido de color en modo multiplicativo en una cadena de 20 elementos. Se ha considerado ruido local y condiciones de contorno periódicas. Los casos representados corresponden a la perturbación de 1, 4, 8, 14 y 17 celdas, de abajo arriba, respectivamente.

En nuestro estudio se ha conseguido incrementar el desorden de una cadena al perturbar todos los elementos de la misma con ruido de color de baja intensidad. Siguiendo esta línea, se ha buscado cual es el número mínimo de celdas que han de ser perturbadas de forma aleatoria para conseguir un efecto de resonancia capaz de degradar la sincronización entre los elementos de la cadena. Se ha encontrado que con una perturbación del 5% en los elementos de la cadena se obtiene ya un débil aunque perceptible efecto de resonancia tal y como se puede observar

en la Fig. 5.24.

Si se hace un estudio del grado máximo de desincronización experimentado por una cadena frente al porcentaje de elementos perturbados de forma aleatoria, tanto para contribución multiplicativa como aditiva del ruido, se ve como después de un incremento elevado del mismo se tiende a una estabilización del efecto desincronizante. Asimismo, aunque el comportamiento cualitativo es similar con ruido multiplicativo o aditivo, la intensidad del caso aditivo es mucho menor que la que presenta el caso multiplicativo, tal y como cabría esperar.



**Figura 5.25:** Dependencia del grado máximo de desincronización con el porcentaje de elementos perturbados en una cadena.

Estos resultados afianzan más la idea de que utilizando ruido, preferiblemente de color, de baja intensidad se puede controlar el caos espaciotemporal incluso sin perturbar la totalidad de elementos del sistema. Además, esto facilita el proceso de control. Por ejemplo, en el caso de los complejos sistemas neuronales bastaría con la perturbación de un pequeño porcentaje de células para la consecución del efecto deseado.

## 5.1.4 Efecto del Ruido en otros Sistemas Caóticos

### 5.1.4.1 Oscilador de Chua

Se podría pensar que el efecto que se ha encontrado en este estudio es característico única y exclusivamente de cadenas constituidas por unidades caóticas de Lorenz. Así se procedió al estudio de otros sistemas caóticos, en particular para cadenas de osciladores de Chua, pero esta vez el estudio se hizo experimentalmente. Para ello, se llevó a cabo la implementación de 3 osciladores de Chua que perturbamos multiplicativamente con ruido Gaussiano de media cero del tipo de Ornstein-Uhlenbeck [Sancho et al., 1992;]. El caso analizado es, al igual que en el estudio de la sección anterior, restringido al caso de ruido global o correlacionado.

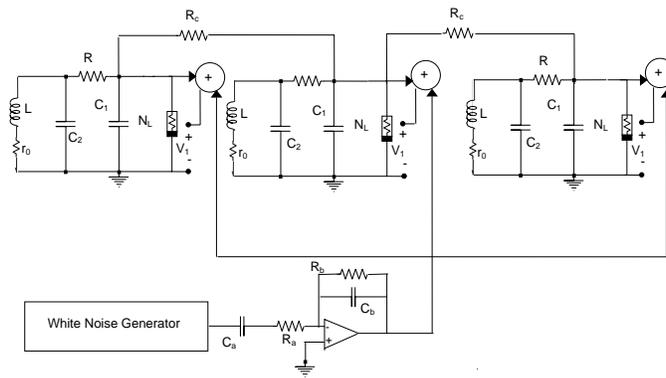
Los experimentos se llevaron a cabo para una cadena de 3 osciladores de Chua [Sánchez et al., 1997;1999; Muñozuri & Lorenzo, 1999] en régimen caótico. El sistema de evolución es

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dV_{1,j}}{dt} &= \frac{1}{R} (V_{2,j} - V_{1,j}) - h(V_{1,j}) + \frac{1}{R_c} (V_{1,j-1} + V_{1,j-1} - 2V_{1,j}) \\
 C_2 \frac{dV_{2,j}}{dt} &= \frac{1}{R} (V_{1,j} - V_{2,j}) + i_{L,j} \\
 L \frac{di_{L,j}}{dt} &= -V_{2,j} - r_0 i_{L,j}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

donde  $V_1$ ,  $V_2$ , y  $i_L$  voltajes a través de los condensadores  $C_1$ ,  $C_2$  y corriente a través de la bobina  $L$ , respectivamente, son las tres variables que describen el sistema dinámico que resulta de la aplicación directa de las leyes de Kirchhoff. Los circuitos se conectan por la variable  $V_1$  a través de la resistencia de acoplamiento  $R_c$  únicamente con sus vecinos más próximos y con condiciones de contorno de flujo nulo. La función característica del diodo de Chua  $h(V_1)$  se define como,

$$h(V_1) = G_b V_1 + \frac{1}{2} (G_a - G_b) [|V_1 + B_p| - |V_1 - B_p|] \tag{5.13}$$

donde  $G_a$  y  $G_b$  son las pendientes interiores y exteriores de  $h(V_1)$ , respectivamente, y  $B_p = 1V$  define la posición de los puntos de ruptura de la función característica del diodo de Chua (ver apéndice A). La Fig. 5.26 muestra el esquema del montaje experimental utilizado.



**Figura 5.26:** Diagrama del montaje experimental implementado para introducir ruido experimental multiplicativamente en una cadena de circuitos de Chua acoplados difusivamente. El ruido se añade al voltaje  $V_1$  y se usa para conducir el elemento no lineal del circuito (ver Ec. 5.13). El ruido se independiza de todas las VCCS para asegurar la no interacción entre los circuitos excepto la debida a las resistencias de acoplamiento  $R_c$ . El ruido blanco gaussiano originado por el generador de funciones se transforma con un filtro en un ruido gaussiano de media cero del tipo de Ornstein-Uhlenbeck (ver apéndice B) con un tiempo de correlación  $\tau = R_b C_b$ , el cual es añadido al circuito a través de un buffer despues de pasar a través de un operacional de ganancia variable que no aparece en el diagrama.

Los componentes son  $(C_1, C_2, L, r_0, R) = (10\text{nF}, 100\text{nF}, 10\text{mH}, 20\Omega, 1.1\text{K}\Omega)$ . Las pendientes de la función característica no lineal  $h(V)$ , Ec. (5.13), se definen como  $G_a = -8/7000$  y  $G_b = -5/7000$ . Los circuitos se han muestreado con un osciloscopio digital (Hewlett-Packard 54825A) con una relación de muestreo máximo de  $4 \times 10^9$  muestras por segundo, 1.5 GHz de ancho de banda, y una longitud de 32000 puntos, conectados a un PC para el procesamiento de datos.

El ruido externo se ha introducido multiplicativamente usando un circuito de Chua modificado [Sánchez et al., 1997;1999] que capacita al elemento no lineal para ser conducido por una fuente externa. El elemento no lineal es controlado, en general, por el voltaje procedente de una fuente externa, no necesariamente el voltaje procedente del condensador  $C_1$ , como ocurre en el caso de un circuito de Chua estándar. De forma que la ecuación de la variable  $V_1$  queda como,

$$C_1 \dot{V}_1 = \frac{V_2 - V_1}{R} - h(V_1 + \xi(t)) \quad (5.14)$$

donde es fácil ver que el término del ruido contribuye multiplicativamente.

El ruido correlacionado se obtiene experimentalmente filtrando la señal de ruido blanco Gaussiano de un generador de funciones a través de un filtro activo con un tiempo constante  $\tau = R_b C_b$  [McClintock & Moss, 1989; Luchinsky et al., 1998]. El generador de funciones usado para la obtención del ruido blanco es un Hewlett-Packard 33120A (ver apéndice B). Al igual que para la construcción del montaje de comunicaciones, el diseño e implementación se ha llevado a cabo con el simulador Orcad.

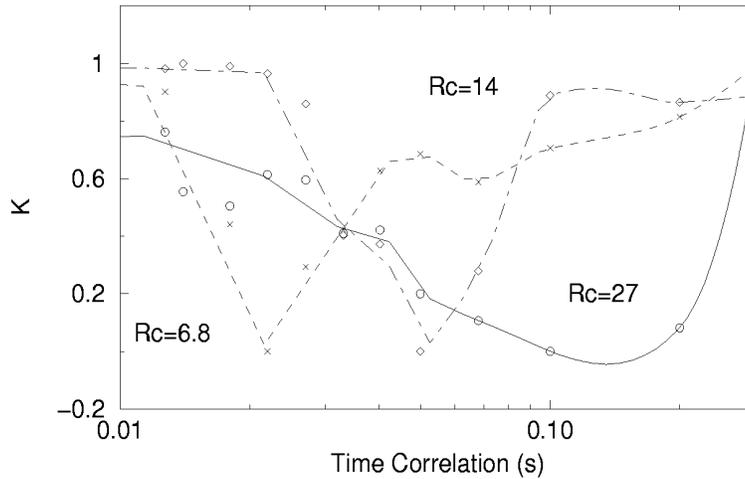
En el proceso de medida experimental, dadas las limitaciones debidas a la capacidad de muestreo del osciloscopio que sólo permite la toma de cuatro señales a la vez, se redujo la definición del parámetro  $K$  pasando a considerar sólo el valor de una de las variables del oscilador, en este caso, la señal  $V_1$ . Para ello, se partió de la hipótesis de que la sincronización alcanzada en esta variable es proporcional a la sincronización alcanzada por el conjunto de variables del sistema, es decir, si esta variable se encuentra sincronizada el resto de variables del sistema también muestran sincronización. Podemos hacer esta suposición partiendo de que los resultados muestran que, cualitativamente, el comportamiento general del sistema no se ve significativamente alterado por la restricción del parámetro  $K$  a una sola variable.

$$K = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{N-1} \sum_{j=2}^N [V_{1,j-1}^t - V_{1,j}^t]^2 \right) \quad (5.15)$$

Como en la Ec. (5.1), esta función es definida positiva y será igual a cero cuando todos los

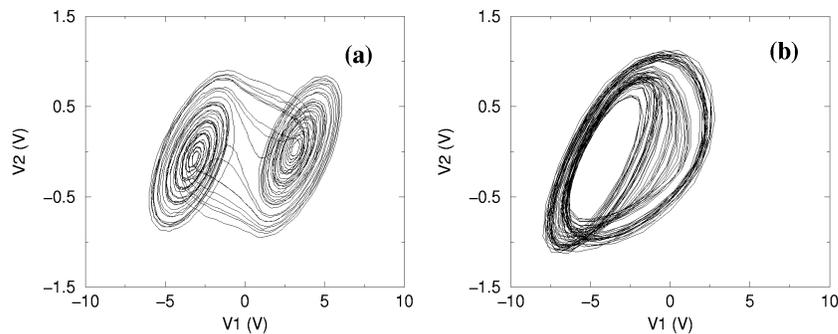
elementos de la cadena se encuentren globalmente sincronizados.

Tal y como se esperaba tras los resultados obtenidos en las secciones 5.1.1 y 5.1.2, si se observa la Fig. 5.27, donde se representa la evolución de  $K$  con el tiempo de correlación  $\tau$  para diferentes valores de la resistencia de acoplamiento, también aquí, el principal efecto del ruido Gaussiano de color sobre la cadena de osciladores es la mejora de la sincronización. Este comportamiento concuerda con el obtenido tanto para sistemas de Lorenz en los que se perturbaba el parámetro  $\alpha$ , como el observado al perturbar el parámetro  $R$  en sistemas con un coeficiente de difusión elevado, lo que traducido a este sistema experimental significa valores bajos de resistencias de acoplamiento  $D \propto 1/R_c$  (ver Figs 5.16, 5.6 y 5.7, respectivamente).



**Figura 5.27:** Representación semilogarítmica de  $K$  en función de  $\tau$  para tres valores diferentes de  $R_c$ . Ya que la longitud de la serie temporal viene determinada por la capacidad de grabación del osciloscopio y la escala temporal del circuito de Chua, se han realizado 50 muestreos de señal para cada valor de  $\tau$  de modo que la estadística sustituye al límite de  $T \rightarrow \infty$  en la Ec. (5.15). Los datos experimentales vienen dados por los símbolos y las líneas representan la interpolación de datos: (+) y línea discontinua para  $R_c = 6.8\Omega$ , ( $\diamond$ ) y línea discontinua con punto para  $R_c = 14\Omega$ , y (o) y línea continua para  $R_c = 27\Omega$ . los valores obtenidos para  $K$  se han escalado entre 0 y 1 para una mejor representación. Los valores máximos y mínimos de  $K$  para cada resistencia de acoplamiento son: 0.11 y 0.13 para  $R_c = 6.8\Omega$ , 0.34 y 0.37 para  $R_c = 14\Omega$ , y 1.39 y 1.51 para  $R_c = 27\Omega$ . La amplitud (pico a pico) del ruido en este experimento es de  $250mV$ .

Debido a que en los resultados obtenidos se encontró que el valor medio de  $K$  crece con la resistencia de acoplamiento  $R_c$  (comportamiento lógicamente esperado, ya que, al aumentar el valor nominal de la resistencia de acoplamiento, lo que se hace es disminuir el término de difusión entre las celdas de la cadena y con ello su acoplamiento dificultando la sincronización entre las mismas), se procedió a un escalamiento de los valores de  $K$  entre 0 y 1 para una mejor visualización de los mismos. En general, independientemente del valor especificado de la resistencia de acoplamiento cuando  $\tau$  crece, el grado de sincronización decrece, casi exponencialmente, hasta alcanzar un mínimo y a continuación experimentar un suave incremento hasta alcanzar un valor constante de saturación para  $\tau \gg 1$ . El mínimo de  $K$  ( $K_{min}$ ) corresponde a una elección óptima de  $\tau$  ( $\tau_{min}$ ) donde se obtiene la mejor sincronización.

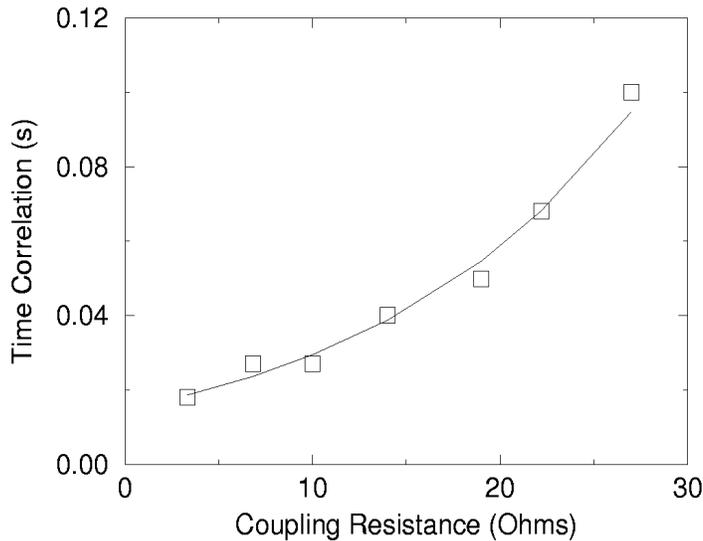


**Figura 5.28:** Efecto del ruido correlacionado en el tiempo sobre el atractor caótico *double-scroll* (a) del circuito de Chua para valores intermedios de  $\tau$ . Cuando  $\tau$  crece, el atractor se distorsiona llegando a ser periódicamente asimétrico, para finalmente perder la apariencia de *double-scroll* (b). La imagen presentada en (b) se tomó congelando la imagen del osciloscopio. Los parámetros son:  $V_{p-p}$ : (a)  $10mV$  y (b)  $400mV$ ,  $\tau = 50ms$ , y  $R_c = 6.8\Omega$ .

Como ocurría en el estudio con osciladores de Lorenz para valores intermedios de  $\tau$ , el ruido Gaussiano correlacionado modula periódicamente el potencial  $V_1$ , observándose un efecto de resonancia entre el tiempo de correlación del ruido y la escala temporal del circuito de Chua [Lorenzo & Muñozuri, 1999]. Si se visualiza el atractor del sistema se puede observar cómo la amplitud del ruido hace que el atractor *double-scroll* pierda su simetría

distorsionándose como consecuencia de la dinámica del ruido. En la Fig. 5.28 se puede ver esta transición fruto de un incremento de la amplitud del ruido.

En el estudio de la dependencia del valor del tiempo de correlación para el que ocurre el valor mínimo de  $K$  con el valor de la resistencia de acoplamiento,  $R_c$ , se encontró que  $\tau_R$  crece con  $R_c$  tal y como se puede ver en la Fig. 5.29. Este comportamiento corrobora el obtenido para el sistema de Lorenz (ver Fig. 5.12). Hay que destacar que mientras que en la Fig. 5.12 se representa la dependencia de  $\tau_R$  con el coeficiente de difusión  $D$  en la Fig. 5.29 dicha representación se hace en función del coeficiente de acoplamiento  $R_c \propto \frac{1}{D}$ .

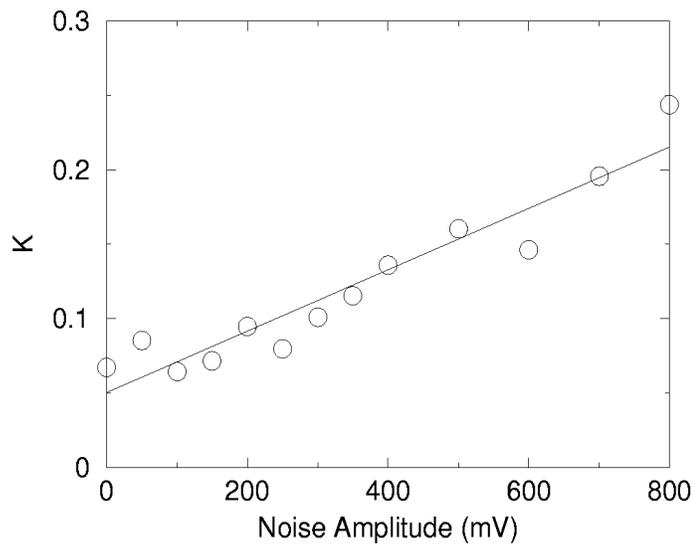


**Figura 5.29:** Dependencia del tiempo de correlación, correspondiente a  $K_{min}$ , con la resistencia de acoplamiento  $R_c$ . La amplitud del ruido (pico a pico) es  $250\text{ mV}$ .

Cuando  $\tau \rightarrow \tau_R$  se espera una fuerte interacción entre la escala temporal del ruido y la del circuito de Chua y esta interacción redundará en una mejor sincronización entre los elementos de la cadena. Asimismo, en la Fig. 5.30, se presenta la dependencia de  $K$  con la

amplitud del ruido para un valor dado de  $\tau$  cerca del caso límite de ruido blanco.

Como se esperaba, el incremento en la amplitud del ruido degrada la sincronización entre los elementos de la cadena y al igual que ocurría en el estudio de cadenas de Lorenz (Fig. 5.11) no se observa un efecto resonante con la amplitud del ruido.



**Figura 5.30:** Dependencia de  $K$  con la amplitud pico a pico de un ruido correlacionado en el tiempo.  
 $R_c = 10\Omega$ ,  $\tau = 0.01s$ .

Recopilando los resultados obtenidos experimentalmente se puede concluir que el comportamiento observado en el estudio de cadenas de osciladores de Chua, ratifica lo encontrado en el análisis de cadenas de osciladores de Lorenz.

#### 5.1.4.2 Oscilador de Rössler

Buscando una zona de transición en el comportamiento del efecto resonante según

que el área de trabajo sea periódica o caótica, se consideró el análisis de un sistema capaz de presentar dentro de un rango adecuado un diagrama de bifurcación lo suficientemente amplio como para abarcar tanto un comportamiento de ciclo límite como un comportamiento caótico. Para este estudio se descartó el sistema de Lorenz por su irregular diagrama de bifurcación. Excluido el sistema de Chua por su inestabilidad, fruto de la rica variedad de comportamientos que encierra dicho oscilador, finalmente se optó por estudiar el sistema de Rössler, ya que éste presenta un diagrama de bifurcación al caos de doble periodo para un estrecho rango de su parámetro de bifurcación, (ver Fig. A.8 del apéndice A).

Una vez elegido el sistema, se prosiguió a la simulación de una cadena de osciladores de Rössler con condiciones de flujo nulo y localmente perturbada por ruido paramétrico tanto a través de una contribución multiplicativa como de una contribución aditiva. En el siguiente sistema de ecuaciones se presentan ambos tipos de contribución

$$\begin{aligned}\frac{dx_j}{dt'} &= -y_j - z_j \\ \frac{dy_j}{dt'} &= x_j + ay_j + \xi_j^a(t) + D(y_{j+1} + y_{j-1} - 2y_j) \\ \frac{dz_j}{dt'} &= b + z_j(x_j - |c + \xi_j^m(t)|)\end{aligned}\quad (5.16)$$

donde  $\xi_j^m(t)$  y  $\xi_j^a(t)$  corresponden a los casos de ruido multiplicativo y aditivo, respectivamente. En este sistema de ecuaciones se ha llevado a cabo un rescalamiento del sistema, para obtener resonancia en valores de  $\tau$  razonables, de forma que  $t' = 10t$ . Asimismo, se ha tomado  $a = 0.1$ ,  $b = 0.1$  y se ha elegido a  $c$  como parámetro de bifurcación. Al igual que en el estudio anterior  $D$  representa al coeficiente de difusión entre los osciladores y el ruido utilizado ha de ser de baja intensidad pues una dispersión elevada llevaría a la desaparición del atractor para valores bajos del parámetro  $c$ . La introducción del valor absoluto en la ecuación diferencial de la variable  $z$  del sistema ( $|c + \xi_j^m(t)|$ ) se hizo para evitar que valores menores que cero de la señal ruidosa dieran lugar a valores del parámetro  $c$  negativos, en cuyo caso el sistema se desestabilizaría perdiendo así el conocimiento de su dinámica. Podría pensarse que la restricción introducida en el sistema, con el valor absoluto de la Ec. (5.17), puede modificar las propiedades de nuestra perturbación, sin embargo, se

ha comprobado que nuestro condicionante no altera de forma significativa las características (media, desviación estándar, etc.) de la señal ruidosa.

Por otro lado, la introducción del ruido aditivo en la variable  $y$  se hizo después de probar su posible introducción en la variable  $z$  y obtener una desaparición abrupta del atractor lo que imposibilitaba el seguimiento de la dinámica del sistema. A diferencia de lo que ocurría en el sistema de Lorenz donde se tenía que  $\langle x, \xi \rangle = 0$ , en el sistema de Rössler  $\langle z, \xi \rangle \neq 0$ . Esto motiva la aparición de diferencias ya no sólo cuantitativas, sino también cualitativas del ruido multiplicativo con respecto al ruido aditivo. En el caso del Lorenz, el sistema responde al ruido multiplicativo en la misma forma que al ruido aditivo, con la diferencia de que en el caso multiplicativo la respuesta presenta una mayor intensidad. En el sistema de Rössler, el ruido multiplicativo actuará como tal, pudiendo provocar la observancia de transiciones o comportamientos no observados en el estudio del Lorenz.

En esta sección se ha restringido el estudio a una cadena de 4 osciladores, tipo Rössler, con condiciones de flujo nulo y ruido correlacionado<sup>2</sup>. Como se hizo para las ecuaciones del sistema de Lorenz, la Ec. (5.16) se integró usando el método de Euler con un paso temporal de  $tstep = 10^{-4}$  repitiéndose las simulaciones una media de cinco veces para cada 3.000.000 de iteraciones o hasta que el parámetro de estudio  $K$  variara menos de un 5%.

Para el caso en el que la contribución es multiplicativa se ha obtenido, al igual que ocurría con los osciladores de Lorenz y Chua, una resonancia entre las escalas temporales existentes en el sistema, esto es, el periodo medio del oscilador y el tiempo de correlación del ruido.

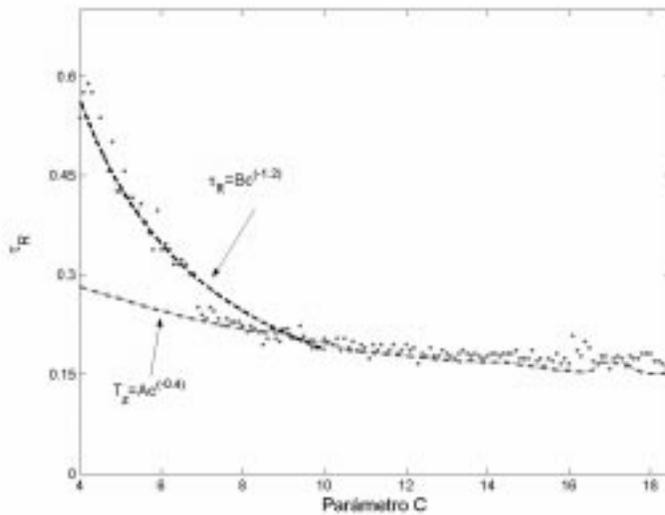
Dicho efecto de resonancia se manifiesta a través de un máximo en  $K$  para un  $\tau_R$  dado, independientemente de que el atractor del sistema se encuentre en zona caótica o en zona periódica. Analizando dicho valor  $\tau_R$  en función del parámetro  $c$  se ha encontrado que ha diferencia de lo que ocurría en el sistema de Lorenz, en el que se observó que  $\tau_R$  evolucionaba

---

<sup>2</sup> Estudios similares se han llevado a cabo para cadenas de 20 osciladores sin encontrarse cambios significativos en su comportamiento.

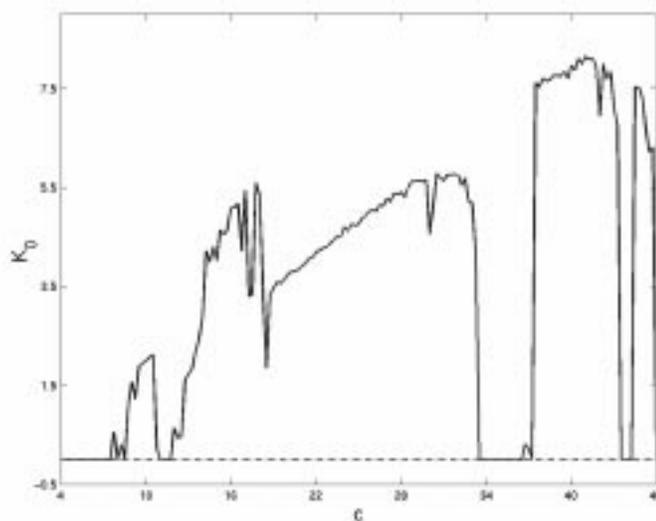
parejo al periodo medio de oscilación del sistema. Aquí,  $\tau_R$  no sigue el comportamiento del periodo medio de oscilación del oscilador, sino que se comporta como el periodo de la variable  $z$  del sistema para el cual  $z > 0$ ,  $T_z$ . Este comportamiento es razonable si se tiene en cuenta que en la Ec. (5.16) el ruido multiplicativo sólo contribuye cuando dicha variable  $z$  presenta valores mayores que cero ( $z |c + \xi_j^m(t)| > 0$ ).

Por otro lado, también es notable la diferente dependencia encontrada para  $\tau_R$  según que nos encontremos en zona caótica o en zona periódica de la cascada de bifurcación. Si se observa la Fig. 5.31, en la que se representa tanto el valor de  $\tau_R$ , como el de  $T_z$  en función del parámetro  $c$  y se analizan los diferentes valores, se llega a que para  $c > c_\sigma$ ,  $\tau_R(c) \rightarrow T_z$ , mientras que en la zona de la cascada de doble periodo  $c < c_\sigma$ ,  $\tau_R(c) \rightarrow T_z^3$ , o lo que es lo mismo,  $\tau_R(c < c_\sigma) \propto \tau_R^3(c > c_\sigma)$ . El valor  $c_\sigma = 7$  corresponde al valor del punto de acumulación de la cascada de doble periodo que como consecuencia de la existencia del ruido se ha desplazado desde su valor originario  $c_\infty = 9$ .



**Figura 5.31:** Dependencia de  $\tau_R$  y  $T_z$  con el parámetro de bifurcación  $c$  del oscilador de Rössler.

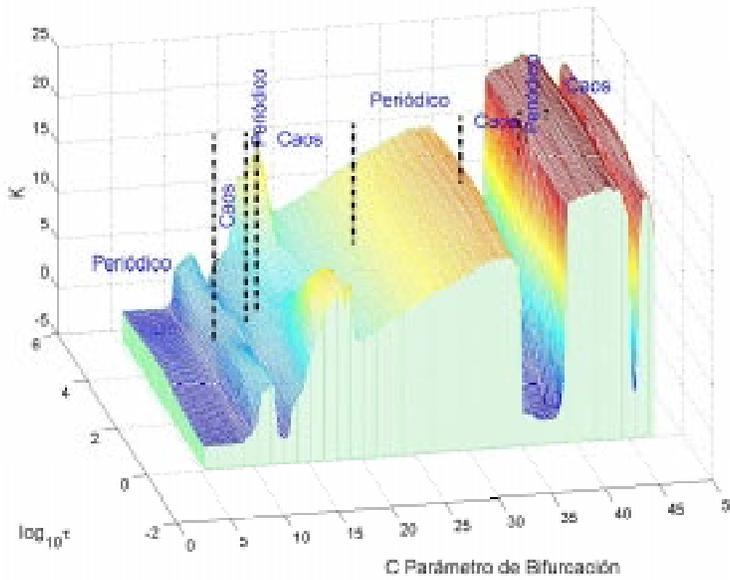
Si nos remitimos a los estudios de Cabrera *et al.* [Cvitanović, 1984; Cabrera & De la Rubia, 1997; Cabrera *et al.*, 1999] es posible encontrar una ley de potencias equivalente de la forma  $\tau_R \propto |T - T_1|^\gamma$  donde  $T_1$  es el periodo del ciclo límite en el punto de bifurcación del oscilador (en este caso este punto de bifurcación se ha elegido para normalizar los calculos y corresponde al valor en que comienza la cascada de doble periodo). El valor  $\gamma$  es un exponente que toma valores distintos dependiendo del signo de  $c - c_\sigma$ . Se ha encontrado que  $\gamma = -3$  para  $c < c_\sigma$  y  $\gamma = -1$  para  $c > c_\sigma$ . Igual que antes se ha encontrado un factor 3 entre los exponentes que gobiernan la transición entre la zona periódica del oscilador y la zona caótica del mismo.



**Figura 5.32:** Dependencia de  $K_0$  con el parámetro de bifurcación  $c$ .

La contribución aditiva del ruido difumina las distintas bifurcaciones que sufre el atractor de Rössler en función del parámetro  $c$  pero no induce ningún cambio en el comportamiento del sistema conservando el comportamiento del parámetro  $K_0$  cuando el ruido no perturba el sistema, Fig. 5.32. Lo que sí se observa es la resonancia entre las escalas temporales del oscilador y del ruido correlacionado. Además, como consecuencia de

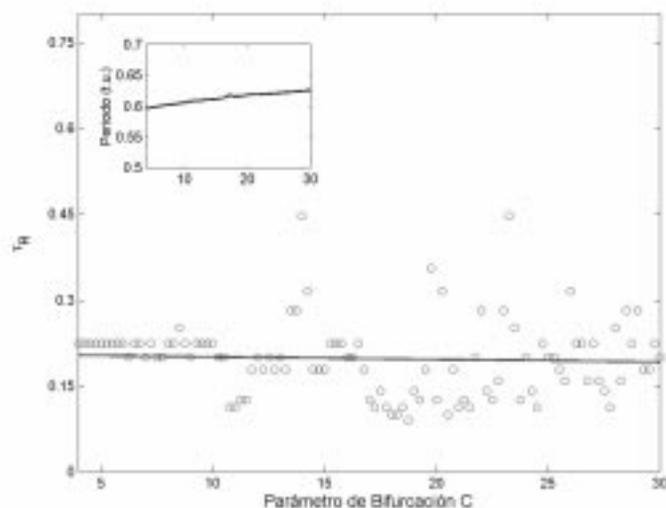
la pequeña longitud de la cadena considerada, 4 osciladores, se observa dicha resonancia como un máximo o como un mínimo según que el atractor se encuentre en zona periódica o caótica. Este comportamiento mostrado en la Fig 5.33, es el que se cabría esperar ya que, 4 osciladores periódicos e idénticos acoplados difusivamente presentan una fuerte sincronización que se verá degradada cuando dichos osciladores sean perturbados por ruido, no obstante, en el caso de osciladores caóticos el ruido puede ayudar a la formación de pequeños *clusters*, formación que se verá favorecida cuanto menor sea el tamaño de la cadena.



**Figura 5.33:** Representación tridimensional del grado de sincronización  $K$  frente al parámetro de bifurcación  $c$  y la función del tiempo de correlación  $\log_{10}\tau$ . Se han considerado condiciones de flujo nulo, ruido local,  $D = 1$ ,  $N = 4$  y  $\sigma = 1$ .

En esta figura, las líneas punteadas delimitan las ventanas periódicas y caóticas del diagrama de bifurcación de un rossler. Como se puede ver los cambios en el comportamiento de  $K$ , máximos o mínimos, ocurren en las zonas de transición salvo pequeños desplazamientos consecuencia estos del efecto del ruido aditivo en el sistema. Además, a

diferencia de lo que ocurría en el caso multiplicativo, no se observa ningún desplazamiento o variación significativa en el valor de  $\tau_R$ . Esta invarianza puede ser motivada porque, mientras en el caso multiplicativo el ruido era introducido en la ecuación diferencial de la variable  $z$ , de forma que éste sólo afectaba al sistema cuando dicha variable  $z$  tomaba valores distintos de cero, en el caso aditivo la señal ruidosa se introduce en la ecuación diferencial de la variable  $y$  con lo que ahora la resonancia tendrá lugar no con el periodo de la variable  $z$ , sino con el periodo medio de oscilación de todo el sistema que tal y como se puede ver en la fig. 5.34 prácticamente no varía con el parámetro de bifurcación  $c$ .



**Figura 5.34:** Dependencia del tiempo de correlación de resonancia  $\tau_R$  en función del parámetro de bifurcación  $c$ . La gráfica interna muestra la dependencia del periodo medio de oscilación de un único Rössler en función de  $c$ . Los parámetros son:  $N = 4$ ,  $\sigma = 1.0$ ,  $D = 1.0$ , condiciones de flujo nulo y ruido aditivo.

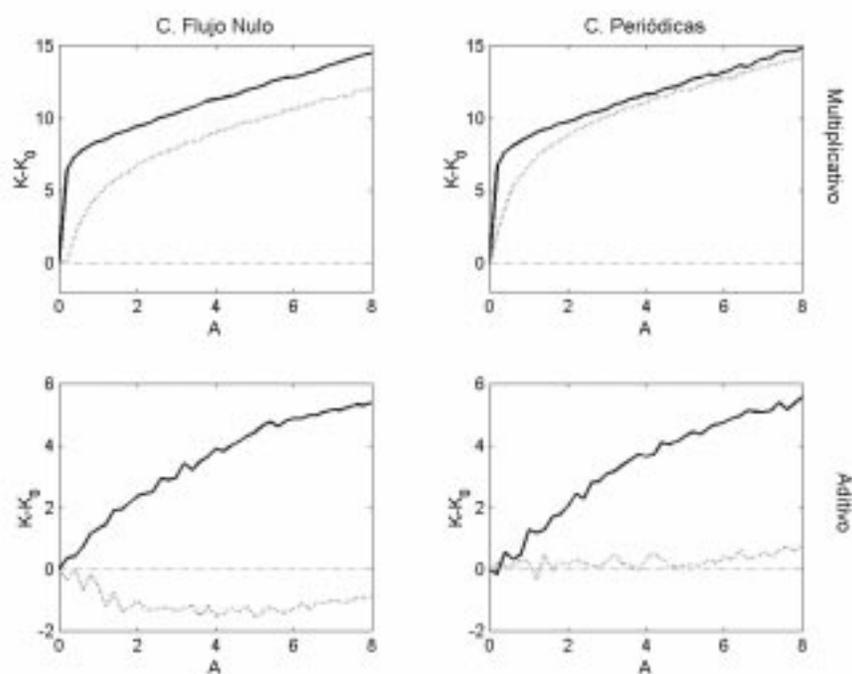
## 5.2 Efecto del Ruido Blanco

La sustitución de ruido blanco por ruido de color ha dado una mayor versatilidad a nuestro análisis de sistemas espaciotemporales perturbados por señales estocásticas, ya que con ruido blanco carecemos de un tiempo de correlación capaz de producir resonancia entre la escala temporal del sistema en estudio y la del ruido. Además, el ruido de color reporta un análisis físico más realista que el hasta ahora obtenido con ruido blanco. No obstante, para comparar una y otra elección se ha estudiado también el caso en que una cadena de elementos caóticos de Lorenz acoplados difusivamente se ve perturbada por ruido blanco Gaussiano de media cero. Al igual que en la sección anterior, se ha considerado tanto contribución multiplicativa como aditiva, y se han analizado los efectos cooperativos de la intensidad del ruido, la longitud de la cadena y el valor del coeficiente de difusión. Los sistemas utilizados corresponden a los presentados en la Ec. (5.2) y Ec. (5.10), para contribución multiplicativa y aditiva, respectivamente. La diferencia ahora radica en la naturaleza del término estocástico, que representa a un ruido blanco Gaussiano de media cero, cuya función de correlación es,

$$\langle \xi_w(t) \xi_w(t') \rangle = 2A \delta(t - t') \quad (5.17)$$

La amplitud del ruido es  $A$ . Como se hizo en el caso con ruido de color, el sistema de ecuaciones ha sido numéricamente integrado usando un método explícito de Euler con un paso temporal de  $10^{-4}$  (ver apéndice B) [García-Ojalvo & Sancho, 1999].

El comportamiento obtenido en este estudio, focalizado ahora para una cadena de 20 elementos en la que se consideran tanto condiciones de flujo nulo como condiciones de contorno periódicas y ruido local, se muestra en la Fig. 5.35 donde tal y como se intuía el ruido blanco en contribución multiplicativa degrada la sincronización entre los elementos de la cadena a medida que se incrementa su intensidad. No obstante, en el caso de contribución aditiva se observa una fuerte dependencia del sistema con el valor de  $D$  llegando a obtenerse una mejora de la sincronización del sistema cuando este presenta condiciones de flujo nulo. Esta fuerte dependencia nos lleva a concluir que en este caso el responsable más directo de dicho comportamiento es el coeficiente de difusión entre los osciladores de la cadena y no el

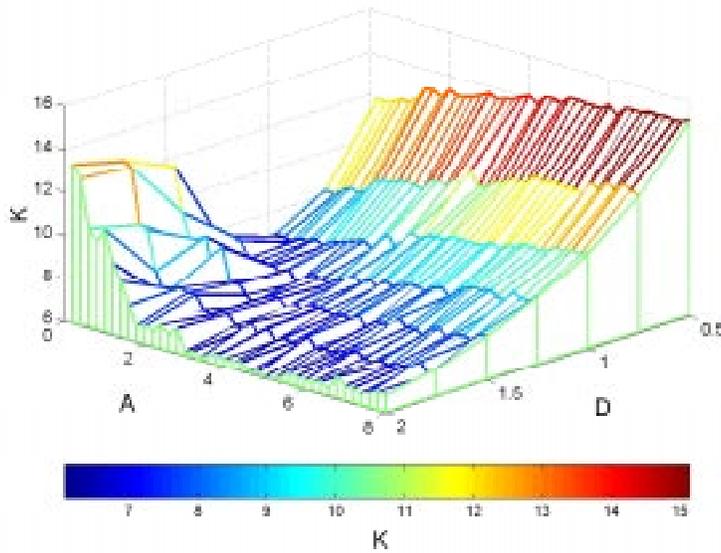


1. **Figura 5.35:** Dependencia de  $K - K_0$  en función de  $A$  con  $N = 20$  y ruido local. La línea continua corresponde a  $D = 0.5$  y la línea punteada a  $D = 2.0$ .

ruido en sí mismo.

Con vistas a una mejor caracterización de esta dependencia de  $K$  con el coeficiente de difusión  $D$ , se estudió la evolución de dicho parámetro  $K$  para una cadena de osciladores tanto en función de la dispersión del ruido como del término de difusión. En la Fig. 5.36 se muestra el resultado de dicho estudio. Como se puede ver, existen dos comportamientos diferenciados según que  $D$  presente valores altos o bajos de la difusión. Para los primeros, se observa un incremento lineal de la degradación de la sincronización en función del crecimiento de la dispersión del ruido, mientras que para valores bajos de  $D$  se detecta una ligera mejoría de la

sincronización que tiende a estabilizarse a medida que  $A$  crece.



**Figura 5.36:** Representación tridimensional del comportamiento de  $K$  frente a  $D$  y  $A$  en una cadena de 4 osciladores con condiciones de flujo nulo.

### 5.3 Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado y analizado el efecto que induce en cadenas de sistemas caóticos difusivamente acoplados la introducción de señales ruidosas. Se han considerado dos tipos de ruido Gaussiano de media cero, ruido blanco y ruido de color. Asimismo, se tuvo en cuenta tanto una contribución aditiva de los mismos como una contribución multiplicativa en la que diferentes parámetros del sistemas fueron perturbados. El análisis se ha hecho en función del grado de sincronización del sistema global,  $K$ , cantidad definida positiva presentada en la Ec. (5.1), y del espectro del mayor de los exponentes de Lyapunov transversos

del conjunto (ver apéndice C).

Se ha obtenido un efecto de resonancia en el sistema que a diferencia de la resonancia estocástica común no se da en función de la amplitud de la señal ruidosa sino del tiempo de correlación del ruido de color utilizado. Hasta ahora, la mayoría de los sistemas que analizaban el efecto del ruido en sistemas dinámicos y la aparición de resonancia estocástica, eran sistemas excitables o biestables en los que el ruido o bien elevaba el nivel umbral de respuesta o bien favorecía uno u otro estado [Anishchenko et al., 1993; Nicolis et al., 1993]. En nuestro caso, los osciladores de la cadena se encuentran en comportamiento caótico y nuestra variable de estudio, nivel de sincronización, sustituye a la  $SNR$  utilizada en los estudios clásicos de resonancia estocástica. Otro factor importante en este estudio es el término de difusión  $D$ . La relación encontrada entre el nivel de sincronización de un sistema y dicho parámetro puede ser de gran utilidad en la comprensión y control de muchos sistemas, como las ya mencionadas redes neuronales, ya que en función de que dicho parámetro sea mayor o menor la dinámica de resonancia presenta un comportamiento de mejora o degradación del nivel de sincronización. De nuevo el estudio de esta dinámica puede ser de ayuda para conocer la intensidad del acoplamiento entre los elementos de un sistema dado.

Desde otra perspectiva también se ha encontrado como el ruido puede ayudar a diferenciar los distintos comportamientos presentes en los elementos de una cadena, tal como se pudo comprobar en el estudio de una cadena de osciladores de Rössler perturbados aditivamente por ruido de color.

En este capítulo se ha encontrado como no siempre el ruido tiene que verse como un elemento destructivo, en ocasiones una dosis adicional de aleatoriedad o estocasticidad en un sistema puede conducir a una mejora en el resultado deseado.

# Capítulo 6

## Conclusions and Outlook

---

### 6.1 Conclusions

In this work, it is possible to distinguish two main trends joined together through two common elements, chaos and noise. On the one hand, the analysis of the performance versus the noisy environment was carried out for different chaotic synchronization schemes looking for an application in the communication field and, on the other hand, the effect of the noise on several chaotic systems was studied in arrays of diffusively coupled elements.

The results obtained are summarized as follows,

**1.-** Each synchronization scheme was perturbed by white Gaussian noise of zero mean. This allows to define a variable that characterized the loss of synchronization for each scheme. We found that the best systems correspond to the systems with feedback in the reception, (for example, the scheme of synchronization through compound chaotic signal).

**2.-** Comparing the best results of the studied schemes has shown that the chaotic synchronization can play the same role as a lowpass filter, (i.e., suppress the noisy background of a transmission). However, the large cost for implementing these mechanisms makes its introduction in the commercial world difficult.

**3.-** The best synchronization scheme was chosen to test the sensitivity and efficiency of several modulation schemes. In particular, the masking technique was studied in an analogical system as well as different amplitude modulations in a digital system. The obtained results, although acceptable, are worst in coherent modulation than in non-coherent modulation, that

is, the schemes which use chaotic synchronization present a less efficiency and sensitivity than those without synchronization in the receiver.

**4.-** A resonant behavior between the time scale of a chaotic attractor and the noise correlation time (that is shown as a maximum or minimum for the degree of synchronization  $K$ ) has been observed by several chaotic systems diffusively coupled. This maximum or minimum is translated in a worsening or enhancement of the chaotic synchronization. The resonant behavior has been observed, both under additive and multiplicative contributions of the correlated noise. Nevertheless, the resonant phenomenon is much more reduced for the additive case and even disappears for strong coupling.

**5.-** The results obtained with white Gaussian noise show a worsening of the synchronization as the noise intensity is increased. Moreover, a strong dependence on the coupling strength is observed in such a way that high values of  $D$  hardly modify the synchronization level of the array.

**6.-** Arrays composed by diffusively coupled chaotic oscillators are considered and their bifurcation parameter is varied. The effect of additive noise on the different bifurcations observed by these systems is to produce a bifurcation gap in the set of available states. This gap increases with the noise dispersion. On the other hand, for a multiplicative contribution, the noise is able to induce different behaviors since the dynamic can be considered to lie within the periodic or the chaotic area. This behavior was described in terms of two different exponents that characterize both dynamical regions. Moreover, only for a non-zero mean multiplicative contribution of the noise this noise-induced behavior was observed (for example, the Rössler chaotic attractor).

**6.2 Outlook** The results obtained in this work open new perspectives in the field of communications based in chaos. On the one hand, we have seen that the systems which use some kind of error feedback in order to achieve synchronization present a better

performance versus the noisy contamination than without it. On the other hand, the non-coherent modulation techniques were found to show a more competitive behavior than the coherent modulation techniques preserving the properties of the chaotic signals.

Concerning the second part of the manuscript, one might speculate that the different behavior observed for weak and strong coupling among cells when the system is perturbed with noise (independently of the time correlation) could be used to get an idea of the coupling and synchronization strength in neural networks involved in hippocampal epilepsy. In this sense, experiments could be performed by setting the level of an external noise and then measuring the degree of coherence/synchronization of the output or response of the system with some information carrying stimulus. For those areas of the neural system strongly correlated, the degree of synchronization will increase with increasing noise intensity while for the remainder areas, the output will remain constant.

Moreover, in the case of epilepsy, the current studies show that if populations of neurons are communicating quickly the nodes of the lattice synchronize in a periodic limit cycle, much like a seizure where many neurons are synchronized. Schiff et al. [Schiff et al., 1994] were able to anticontrol the seizurelike neuronal discharges in slices of rat hippocampal tissue delivering low-amplitude regularly timed electrical stimulations. This method know as *anticontrol of chaos* [Le Van Quyen et al., 1997], may lead to practical clinical implementation of techniques that desynchronize the periodic behavior, typical of epileptic seizures and perhaps suppress the seizure generation [Glanz, 1997].

In this sense, although much further study is needed, the resonant effect observed under the driving of time-correlated noise of low intensity could help to avoid this synchronization phenomenon, since even those areas of the network strongly synchronized, for a certain value of  $\tau \approx \tau_R$  could become unsynchronized. In order to explore this question, the possibility to control the internal neuronal noise to influence on the degree of coherence or synchronization of the cells must be investigated.

Finally, still a question remains open, as time-correlated noise can affect the level of

coherence of the output, then this could also affect the way synaptic couplings are established (in the same way some pharmacological treatments for epilepsy do). Of course, the way noise could be used to drive an ensemble of realistic neurons is still unknown and will be the subject of future investigations. The application of these results could help in the analysis of the behavior of the cells related to the epileptic seizures, suggesting new, nonsurgical approaches to treat of the disease.

# Apéndice A

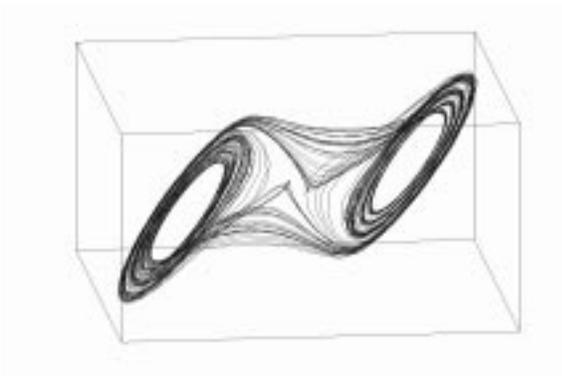
## Circuitos Generadores de Caos

---

### A.1 Circuito de Chua

Un circuito se dice que es de orden  $n$  si contiene  $n$  elementos almacenadores de energía y autónomo si no contiene fuentes de corriente alterna. El comportamiento más complicado que un circuito autónomo de orden menor que 3 puede exhibir es una oscilación periódica. De ahí que el circuito más simple capaz de presentar comportamiento caótico deba ser al menos de orden 3.

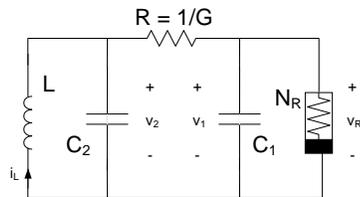
El circuito de Chua es el circuito autónomo más simple que es capaz de exhibir bifurcación y caos Fig. A.1 [Chua et al., 1993a;1993b; Cruz & Chua, 1993].



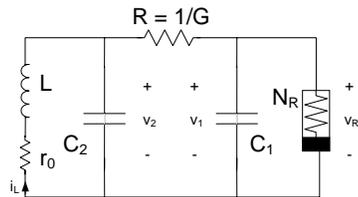
**Figura A.1:** Representación tridimensional del típico atractor caótico proporcionado por el circuito de Chua, más conocido como *double-scroll*.

El circuito de Chua, Fig. A.2a, es un circuito electrónico no lineal que es el objeto de muchas actividades de investigación científica. Este circuito contiene 4 elementos lineales, (dos condensadores una bobina y una resistencia) y una resistencia no lineal llamada diodo de Chua, cuya implementación se muestra en las Figs. A.3, A4.

Ya que el circuito de Chua está dotado de un repertorio de fenómenos dinámicos no lineales inusualmente rico, se ha convertido en un paradigma universal para el caos. Si añadimos una resistencia lineal en serie con la bobina, obtenemos el oscilador de Chua, mostrado en la Fig.A.2b que puede generar una mayor diversidad de comportamientos.



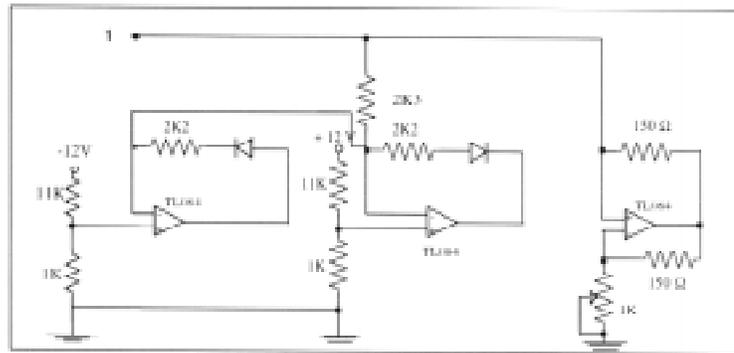
(a).CIRCUITO DE CHUA



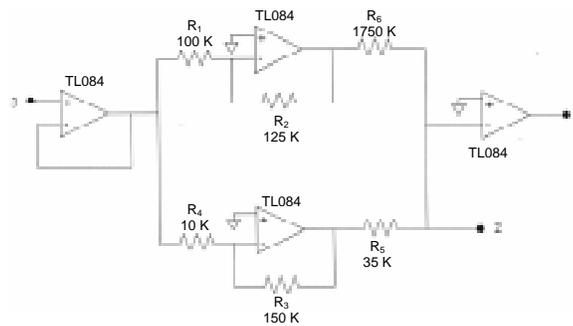
(b).OSCILADOR DE CHUA

**Figura A.2:** a) Esquemático del circuito de Chua. b) Esquemático del oscilador de Chua.

La implementación del diodo de Chua se muestra en la Fig. A.3 y Fig. A.4. Esta última implementación del diodo corresponde a una modificación hecha en el mismo para permitir el control de dicho diodo por una tensión distinta de  $V_1$  y permitir así la adición de ruido multiplicativo en el oscilador de Chua [Sánchez, 1999; Sánchez et al., 1999].



**Figura A.3:** Esquema del diodo de Chua.

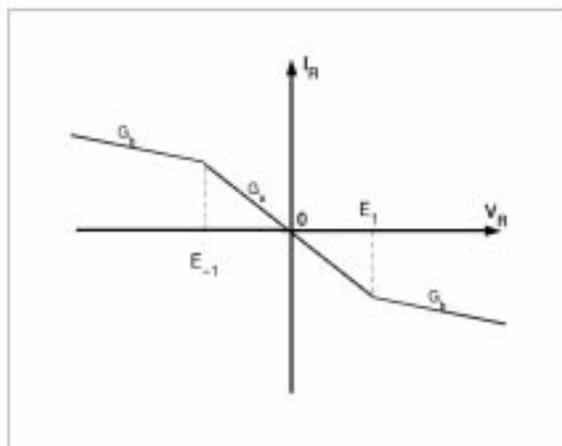


**Figura A.4:** Implementación modificada del diodo de Chua, para facilitar la conducción del circuito de Chua por *driving* en el elemento no lineal.

Las ecuaciones de estado del oscilador de Chua son:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{v_2 - v_1}{R} - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{v_1 - v_2}{R} + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_2 - r_0 i_L \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde  $g(v) = G_b v + 0.5(G_a - G_b)(|v + B_p| - |v - B_p|)$  es la función V-I característica de la resistencia no lineal  $N_R$  con una pendiente igual a  $G_a$  en la región interna y  $G_b$  en la región externa. Una típica función V-I característica de  $N_R$  se muestra en la Fig. A.5.



**Figura A.5:** Función lineal a trozos que representa la intensidad que circula a través del elemento no lineal  $N_R$  en función del voltaje  $V_R$ .

En la mayoría de las ocasiones para llevar a cabo estudios analíticos de este sistema se ha desarrollado un sistema adimensional de las ecuaciones representado por el sistema,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y - \gamma z\end{aligned}\tag{A.2}$$

donde  $x = \frac{V_1}{B_p}$ ,  $y = \frac{V_2}{B_p}$ ,  $z = \frac{I_L}{B_p G}$ ,  $\tau = \frac{tG}{C_2}$  y  $f(x)$  es la forma adimensional de la función característica  $g(V_1)$ :

$$f(x) = \left\{ bx + \frac{1}{2} (a - b) [|x + 1| - |x - 1|] \right\}\tag{A.3}$$

Los parámetros adimensionales se definen como:  $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$ ,  $\beta = \frac{C_2}{LG^2}$ ,  $\gamma = \frac{C_2 r_0}{LG}$ ,  $a = \frac{G_a}{G}$ ,  $b = \frac{G_b}{G}$

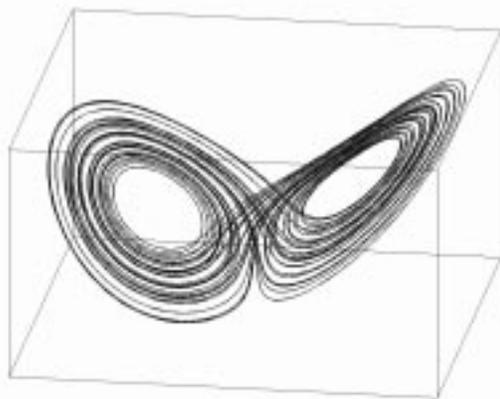
## A.2 Circuito de Lorenz

La propuesta de Lorenz fue analizar el comportamiento impredecible del tiempo. Para ello se sirvió de la ecuación de Navier-Stokes y de la ecuación térmica a las que tras aplicar una serie de transformaciones de Fourier redujo a un sistema de 3 ecuaciones,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\alpha x + \alpha y \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{A.4}$$

con  $\alpha$ ,  $r$  y  $b$  parámetros positivos, resultando en una simplificación idealizada de la ecuación diferencial para la convección de fluidos. Una capa de fluido es calentado desde abajo y enfriado desde arriba, esto representa la atmósfera de la tierra calentada por la absorción terrestre de la luz solar y enfriada por la pérdida de calor en el espacio. En el movimiento convectivo resultante,  $x$  representa el movimiento convectivo, es decir, la velocidad de flujo

del fluido. Si  $x > 0$  el fluido circula en sentido horario mientras que si  $x < 0$  el fluido circula en sentido antihorario. La variable  $y$  representa la variación de temperatura horizontal y la variable  $z$  representa la variación de temperatura vertical. Los parámetros  $\alpha$ ,  $r$  y  $b$  son proporcionales al número de Prandtl, al número de Rayleigh y al tamaño de la región cuyo comportamiento es definido por el sistema de ecuaciones Ec. (A.4). No obstante, otros muchos sistemas físicos pueden ser descritos con este modelo de ecuaciones, así este sistema es equivalente al que define las ecuaciones más simples de un láser, ondas baroclínicas, problemas de convección en una región toroidal,... La Fig. A.6 muestra el atractor de Lorenz que fue el primer atractor caótico observado en un sistema autónomo de tercer orden.

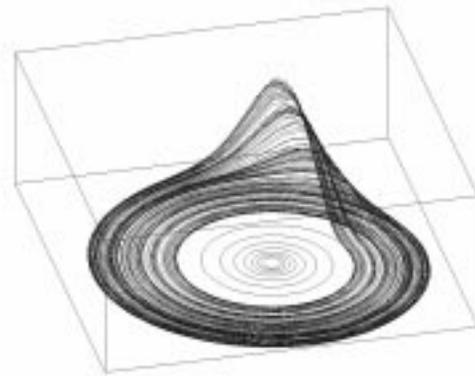


**Figura A.6:** Representación tridimensional del típico atractor caótico proporcionado por el circuito de Lorenz, más conocido como la mariposa de Lorenz. Para este caso particular  $\alpha = 10$ ,  $b = 8/3$  y  $R = 28$ .

La ecuación de Lorenz es más complicada que la de Chua ya que necesita de dos funciones no lineales de dos variables, mientras que la ecuación de Chua precisa sólo de una función no lineal con una sola variable.

### A.3 Circuito de Rössler

En 1976 el científico alemán O. Rössler encontró un modo de generar un atractor caótico con un conjunto de ecuaciones diferenciales más simple que el modelo de Lorenz, ya que la simetría existente sobre el eje  $z$  en el atractor de Lorenz no es necesaria para generar un atractor caótico.

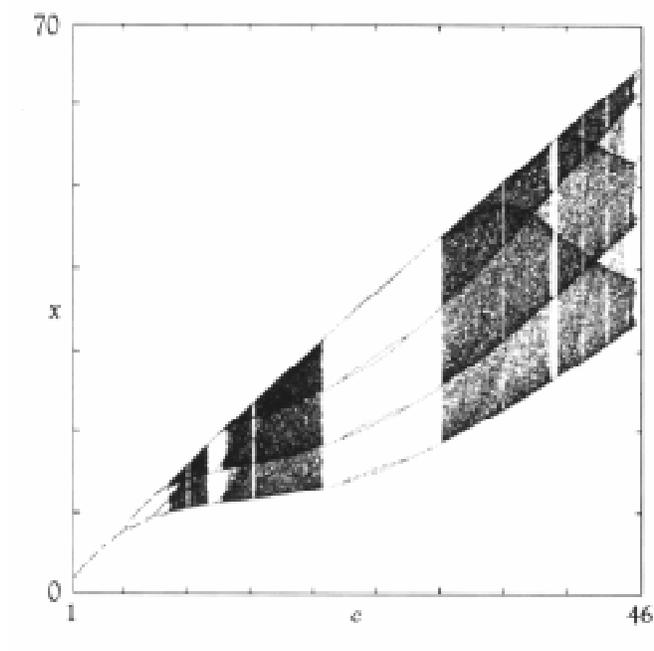


**Figura A.7:** Representación tridimensional del típico atractor caótico proporcionado por el circuito de Rössler.

Este sistema puede ser considerado para modelar el flujo alrededor de uno de los lazos del atractor de Lorenz [Holden, 1986; Alligood et al., 1997]. Las ecuaciones del modelo de Rössler son

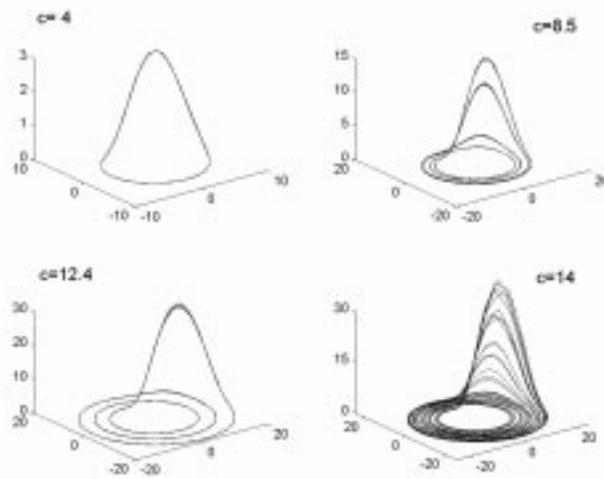
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + (x - c)z\end{aligned}\tag{A.5}$$

Con  $a = 0.1$ ,  $b = 0.1$ , y  $c = 14$  se obtiene un flujo caótico que forma una única espiral dentro de un disco, con trayectorias desde la parte externa de la espiral torcida y plegada a la parte interna de la espiral, formando una banda de Möbius. Este sistema de ecuaciones representa un modelo simple de la dinámica de las reacciones químicas en un tanque de agitación. La utilización de este tercer modelo se debe a que en el atractor de Rössler se puede seguir relativamente bien y dentro de un rango adecuado del parámetro  $c$  una bifurcación de doble periodo, Fig A.8, cosa que no podíamos seguir en el sistema de Lorenz.



**Figura A.8:** Diagrama de Bifurcación para el sistema de Rössler en función del parámetro  $c$  [Alligood et al., 1997].

En la Fig. A.9 se muestran diferentes atractores generados por el sistema de ecuaciones de la Ec. (A.5) para varios valores del parámetro  $c$ .



**Figura A.9:** Diferentes atractores generados por el sistema de Rössler al variar  $c$ .

## Apéndice B

# El Ruido y su Simulación Numérica y Experimental

---

La integración numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas, o ecuaciones que introducen términos de ruido, requiere métodos de integración diferentes de los que precisa una ecuación diferencial ordinaria. La presencia de términos estocásticos en la ecuación hace necesaria la simulación de números aleatorios. Generalmente se originan números aleatorios uniformemente distribuidos y a partir de ellos se generan números correspondientes a otras densidades de probabilidad. Gracias a la existencia de rutinas generadoras de números aleatorios, Gaussianos, de Poisson..., normalmente se procede a generar dichos números a partir de otros distribuidos uniformemente (con densidad e probabilidad 1) en el intervalo  $[0, 1]$ .

Al igual que en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en la simulación de las ecuaciones diferenciales estocásticas se simula una trayectoria discreta particular consistente con la ecuación estocástica, la cual corresponde a una realización particular del término estocástico (una cierta secuencia de números aleatorios simulados como se mencionó anteriormente). Las propiedades estadísticas de la solución se obtienen mediante promedios estadísticos sobre muchas trayectorias.

Uno de los algoritmos más elementales y el que a su vez se ha usado en nuestro estudio es el algoritmo de Euler. En este apéndice presentaremos dicho algoritmo para la integración numérica de una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t) \tag{B.1}$$

donde  $\xi(t)$  será un ruido Gaussiano tanto blanco como de color del tipo de Ornstein-Uhlenbeck.

## B.1 Ruido Blanco Gaussiano

### B.1.1 Desarrollo Numérico

El procedimiento es similar al de la resolución numérica de una ecuación diferencial ordinaria. La solución formal de la ecuación estocástica, Ec. (B.1), para un incremento de tiempo pequeño  $\Delta$  es

$$x(t + \Delta) = x(t) + \int_t^{t+\Delta} f(x(t'))dt' + \int_t^{t+\Delta} g(x(t'))\xi(t')dt' \quad (\text{B.2})$$

Con el fin de desarrollar el segundo miembro de la ecuación en potencias de  $\Delta$ , se hacen los siguientes desarrollos en torno a  $x(t)$

$$f(x(t')) = f(x(t)) + f'(x(t))(x(t') - x(t)) + \dots \quad (\text{B.3})$$

$$g(x(t')) = g(x(t)) + g'(x(t))(x(t') - x(t)) + \dots \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo los primeros términos de Ec. (B.3) y Ec. (B.4) en la Ec. (B.2) se tiene que la solución será

$$x(t + \Delta) = x(t) + f(x)\Delta + g(x)X_1(t) + O(\Delta^2) \quad (\text{B.5})$$

donde la cantidad estocástica  $X_1(t)$

$$X_1(t) = \int_t^{t+\Delta} \xi(t')dt' \quad (\text{B.6})$$

es gaussiana de valor medio nulo y varianza igual a  $2D\Delta$ , generándose de la forma

$$X_1(t) = \sqrt{2D\Delta}z_1 \quad (\text{B.7})$$

donde  $z_1$  representa un número aleatorio Gaussiano de media nula y varianza igual a uno. El segundo término de la Ec. (B.5) pertenece a la parte determinista y es de orden  $\Delta$  y el tercero es de orden  $\Delta^{1/2}$ . Pero también el segundo término de la Ec. (B.4) contribuye al orden  $\Delta$  cuando se sustituye en la Ec. (B.2). De este modo para ser coherentes se debe considerar la contribución de dicho término.

$$\int_t^{t+\Delta} \frac{dg}{dx} \Big|_{(x(t))} [x(t') - x(t)] \xi(t') dt' \quad (\text{B.8})$$

Si en la Ec. (B.5) se toma el orden más bajo en  $\Delta$  (que es  $\Delta^{1/2}$  y no  $\Delta$ ), se tendrá que

$$x(t') - x(t) = g(x(t))X_1(t) \quad (\text{B.9})$$

Si se sustituye en la Ec. (B.8) queda

$$g'(x(t))g(x(t)) \int_t^{t+\Delta} \xi(t') dt' \int_t^{t'} \xi(t'') dt'' = \frac{1}{2} g'g X_1^2(t) \quad (\text{B.10})$$

que es de orden  $\Delta$ . De esta forma y desarrollando hasta orden  $\Delta^{3/2}$  se tiene que el algoritmo es

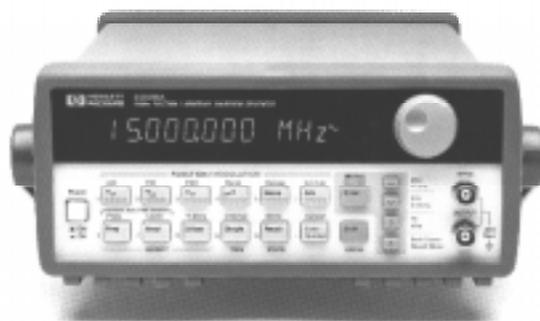
$$x(t + \Delta) = x(t) + f(x)\Delta + g(x)X_1(t) + \frac{g'(x)g(x)}{2} X_1^2(t) + O(\Delta^{3/2}) \quad (\text{B.11})$$

No se sigue un desarrollo a órdenes mayores ya que la idoneidad del algoritmo es más sensible al valor  $\Delta$  y al número de realizaciones llevadas a cabo para la obtención de los promedios que a tomar órdenes superiores en  $\Delta$  [Sancho et al., 1982].

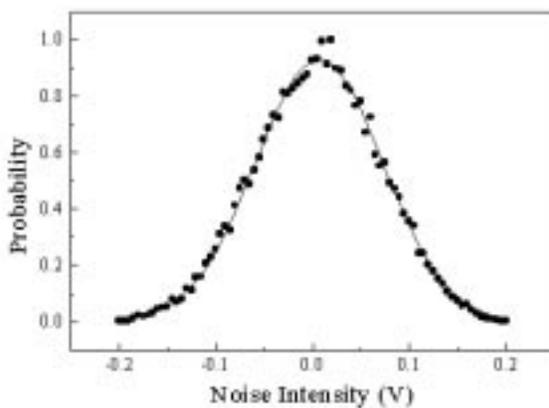
### B.1.2 Desarrollo Experimental

La obtención de ruido blanco con tiempo de correlación cero y un espectro de potencia que permanezca plano hasta frecuencia infinita es una idealización. El ruido en sistemas físicos reales siempre tiene un tiempo de correlación finito y correspondientemente presenta un espectro no totalmente plano para algunas frecuencias características. No obstante, el tiempo de correlación del ruido suele ser muy pequeño. Para la realización experimental de los diferentes procesos en los que involucramos señales de ruido blanco Gaussiano de

media cero se ha usado un generador de ondas de la casa Hewlett Packard, en particular el HP33120A que es un generador de funciones sintetizadas de 15 MHz con cuatro memorias cargables de formas de onda arbitrarias de 16.000 puntos, compatible con SCPI (Comandos Estándar para los Instrumentos Programables) y con el software de generación de formas de onda Arb/Benchlink HP34811A.



**Figura B.1:** Generador de funciones. Generador de formas de onda arbitraria HP33120A.



**Figura B.2:** Distribución normalizada del ruido gaussiano de media cero dado por el generador de funciones HP33120A.

En la Fig B.1 se muestra dicho generador. La señal ruidosa proporcionada por este generador es de tipo Gaussiano con un ancho de banda de 10 MHz y puesto que dicho valor es mucho mayor que el de las frecuencias características de nuestros osciladores caóticos, se puede considerar que se trata de un ruido blanco Gaussiano de media cero tal y como se ve en la Fig B.2 donde se representa la distribución normalizada del ruido dado por dicho generador de funciones.

## B.2 Ruido Tipo Ornstein-Uhlenbeck

### B.2.1 Desarrollo Numérico

La generación de ruido con propiedades estadísticas específicas es uno de los requerimientos básicos de cualquier simulación estocástica. En la mayoría de los casos el ruido requerido es Gaussiano y blanco, pero en muchas otras ocasiones (ruidos reales) se precisa de una correlación temporal específica y de una implementación sencilla de la misma. En los últimos años se propusieron muy diversos algoritmos para la generación de ruidos correlacionados temporalmente, la mayoría de los cuales obedecen una ecuación lineal de Langevin controlada por ruido blanco Gaussiano. Un ejemplo de ruido de color es el de Ornstein-Uhlenbeck. Este proceso es frecuentemente usado para representar ruidos reales con una intensidad  $\epsilon$  y un tiempo de correlación  $\tau$ . Este es un ruido Gaussiano, markoviano y estacionario que obedece la ecuación lineal de Langevin,

$$\dot{\eta} = -\frac{\eta}{\tau} + \frac{\xi(t)}{\tau} \quad (\text{B.12})$$

donde  $\xi(t)$  es un ruido blanco Gaussiano de intensidad  $\epsilon$ . La correlación temporal de este proceso es

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \gamma(|t - t'|) = \frac{\epsilon}{\tau} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}} \quad (\text{B.13})$$

En este caso particular se tiene un sistema con dos ecuaciones

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\Gamma(t) \quad (\text{B.14})$$

$$\dot{\Gamma} = -\frac{\Gamma}{\tau} + \frac{\xi(t)}{\tau} \quad (\text{B.15})$$

donde  $\xi(t)$  es un ruido blanco Gaussiano. Integrando analíticamente y haciendo las aproximaciones de la Ec. (B.11) se obtiene,

$$x(t + \Delta) = x(t) + f(x)\Delta + g(x)\Gamma(t)\Delta + \frac{1}{2}g'g\Gamma(t)^2\Delta^2 + O(\Delta^{3/2}) \quad (\text{B.16})$$

$$\Gamma(t + \Delta) = \Gamma(t)\left(1 - \frac{\Delta}{\tau}\right) + \frac{X_1(t)}{\tau} + O(\Delta^{3/2}) \quad (\text{B.17})$$

Se ha mantenido un término aparentemente de orden  $(\Delta^2)$ , ya que si se toma el límite  $\tau \rightarrow 0$  en la Ec. (B.17) resulta que

$$\Gamma(t)\Delta = X_1(t) \quad (\text{B.18})$$

y así en el límite de ruido blanco se recupera el algoritmo de la Ec. (B.11) a partir de la Ec. (B.16). En nuestro caso particular se ha sustituido el algoritmo diferencial de la Ec. (B.17) por un algoritmo integral [Fox et al., 1988] más rápido y preciso que permite el uso de pasos de integración mayores.

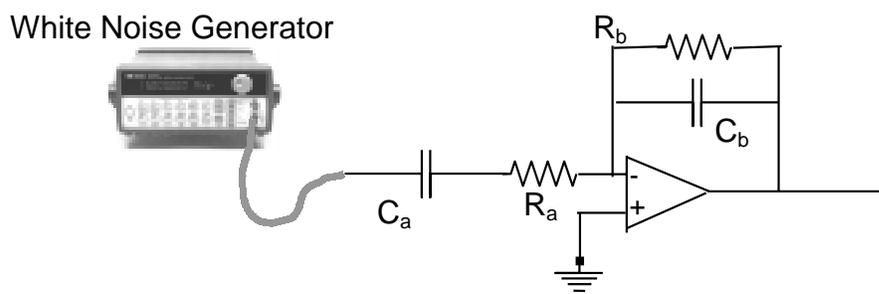
$$\Gamma(t + \Delta) = e^{-\frac{\Delta}{\tau}}\Gamma(t) + h(t, \Delta) \quad (\text{B.19})$$

$$\text{con } h(t, \Delta) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{2\Delta}{\tau}}\right)} z_1$$

## B.2.2 Desarrollo Experimental

Para la construcción de un generador de ruido exponencialmente correlacionado del tipo Ornstein-Uhlenbeck nos inspiramos en un diseño desarrollado en la universidad de Pisa e implementado más tarde en Lancaster [Luchinsky et al., 1998]. La Fig. B.3 muestra el esquema construido. Se parte de la salida de ruido blanco Gaussiano obtenida con el generador

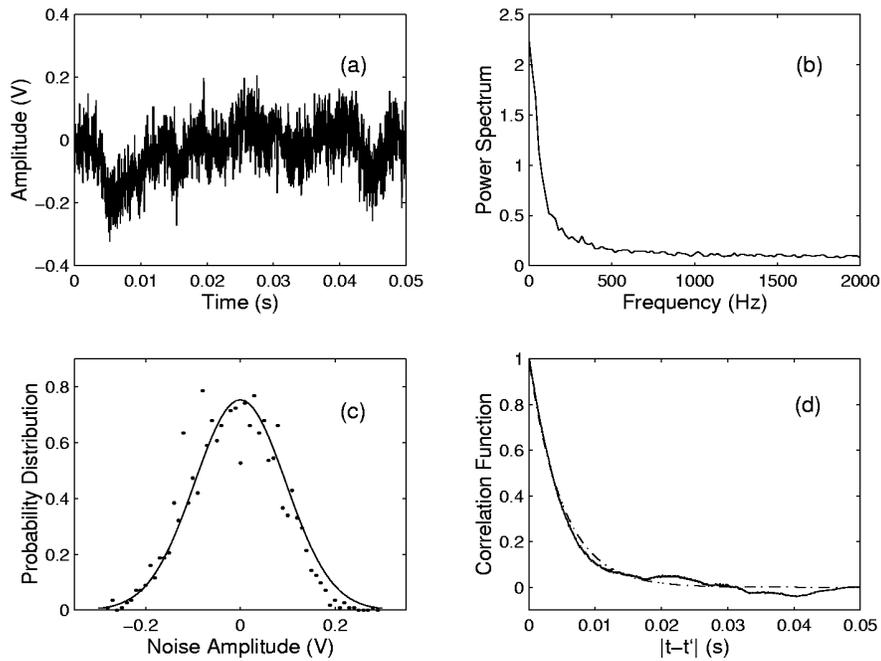
de ondas HP33120A y se pasa a través de un filtro activo con un único polo y con un tiempo constante  $\tau = R_b C_b$ .



**Figura B.3:** Diagrama del dispositivo construido para la generación de un ruido Gaussiano exponencialmente correlacionado del tipo Ornstein-Uhlenbeck. El tiempo de correlación,  $\tau$ , viene dado por el producto  $R_b C_b$ . El límite de bajas frecuencias es determinado por  $R_a C_a$  y es fijado a  $\approx 1\text{Hz}$ .

Las propiedades estadísticas del ruido de color del tipo Ornstein-Uhlenbeck se muestran en la Fig. B.4. Las Figs. B.4a-B.4d muestran las propiedades físicas de un ruido experimental correlacionado en el tiempo. El espectro de potencia del ruido Fig. B.4b no puede ser plano en el rango de la frecuencia de interés,  $\tau^{-1} \approx 200\text{Hz}$ . Para pequeñas intensidades de ruido la distribución de probabilidad obtenida no se ajusta perfectamente a la distribución gaussiana como consecuencia del ruido experimental en el proceso de muestreo Fig. B.4c. La función de correlación se calculó experimentalmente Fig. B.4d comparándola con la función teórica dada por la Ec. B.13. Se observa cómo los valores experimentales del ruido están correlacionados exponencialmente dentro de la escala temporal siguiendo la

correlación teórica esperadaesperado



**Figura B.4:** Caracterización del ruido Gaussiano correlacionado en el tiempo obtenido después de que un ruido blanco gaussiano de media cero pase a través de un filtro con un solo polo. a) muestra la evolución temporal de un ruido de color de amplitud  $500mV$  (pico a pico) y tiempo de correlación  $\tau = 5ms$ . b) corresponde al espectro de potencia de la señal ruidosa. c) es la función de distribución de la probabilidad ajustada a una curva gaussiana (línea continua). d) Función de correlación, línea continua, la curva teórica dada en la Ec. B.13 viene dada por la línea discontinua.

# Apéndice C

## Espectro de Lyapunov Transverso

---

El efecto del ruido de color sobre la sincronización caótica de un anillo de elementos caóticos de Lorenz puede ser caracterizado a través de una análisis lineal de la estabilidad de las pequeñas perturbaciones alrededor del estado sincronizado [Heagy et al., 1994]. De este modo, si uno considera un anillo con  $N$  osciladores de dimensión  $m$  el análisis lineal de las pequeñas perturbaciones dará

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{H} \delta \mathbf{x} \quad (\text{C.1})$$

para las diferencias entre las variables de osciladores contiguos  $\delta \mathbf{x}$ , donde la matriz Jacobiana  $H$  de dimensión  $(Nm) \times (Nm)$  tiene  $N$  bloques de dimensión  $m \times m$ , que tienen la misma forma de la matriz linealizada de un único oscilador [Matías et al., 1997; Mariño et al., 1998], y un número de términos fuera de la diagonal correspondientes al acoplamiento. La forma más conveniente de analizar tal conjunto es a través del uso de la transformada discreta de Fourier, como consecuencia de la estructura circulante de la matriz  $\mathbf{H}$  [Heagy et al., 1994; Matías et al., 1997; Mariño et al., 1998]. Lo que se obtiene de dicho estudio es que el problema original de la Ec. (C.1) se puede desacoplar en términos de la transformada de Fourier,  $\eta$ , de las diferencias  $\delta \mathbf{x}$ ,

$$\dot{\eta}^{(k)} = \mathbf{C}^{(k)} \eta^{(k)} \quad (\text{C.2})$$

donde  $\mathbf{C}$  es la transformada de Fourier de  $\mathbf{H}$ ,

$$\eta^{(k)} = (1/N) \sum_{j=0}^{N-1} \delta \mathbf{x}_j e^{2\pi i j k / N} \quad (\text{C.3})$$

es la transformada de Fourier de  $\delta \mathbf{x}$ , y las matrices  $\mathbf{C}^{(k)}$  toman la forma

$$\mathbf{C}^{(k)} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ R + \xi(t) - z & -1 + 2D(c_k - 1) & -x \\ y & k & -b \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

con  $c_k = \cos(2rk/N)$  y  $k = 0, \dots, (N - 1)$  los modos de Fourier. Para este estudio, se ha considerado ruido espacialmente correlacionado, o lo que es lo mismo ruido global  $\xi(t)$  para mantener la estructura circulante de la matriz  $\mathbf{H}$  de la Ec. (C.1).

El modo de Fourier  $k = 0$  representa el estado caótico sincronizado uniforme del anillo, y la estabilidad de este estado se puede caracterizar analizando el espectro transverso, correspondiente a los modos de Fourier con  $k \neq 0$ . Cuando el sistema de ecuaciones Ec. (5.2) es no lineal, las matrices  $\mathbf{C}^{(k)}$  tienen coeficientes no constantes, variando caóticamente. Así, la estabilidad es más convenientemente analizada a través de los correspondientes exponentes de Lyapunov de las matrices  $\mathbf{C}^{(k)}$ , Ec. (C.3), que generan el espectro de Lyapunov transverso (TLS) [Heagy et al., 1994]. El modo uniforme  $k = 0$  será estable cuando dicho espectro sea negativo y se hará inestable en el momento en el que algún exponente de Lyapunov transverso se haga positivo. En lugar de determinar el exponente de Lyapunov transverso para cada pareja  $(k, N)$ , un procedimiento más práctico es definir un número de onda reducido  $q = k/N$  como una variable continua en el rango  $[0, 1]$ . El mayor exponente de Lyapunov transverso  $\lambda(q)$  en función de  $q$  permite caracterizar la estabilidad del estado sincronizado uniforme. Una observación interesante es que  $\lambda(q)$  debe ser simétrico con respecto a la línea  $q = 1/2$  ya que para un  $N$  dado,  $\mathbf{C}^{(k)}$  y  $\mathbf{C}^{(N-k)}$  son las mismas matrices ( $c_k = c_{N-k}$ ), con lo que tendrán las mismas propiedades para su espectro de autovalores.

La función  $\lambda(q)$  se obtiene usando el procedimiento de Wolf et al., [Wolf et al., 1985]. Los exponentes de Lyapunov transversos son calculados para cada número de onda  $q$  desde las matrices  $\mathbf{C}^{(k)}$ , Ec. (C.3), donde los coeficientes no constantes son calculados a partir de la integración de la Ec. (5.2) sin acoplamiento. Además, el ruido de color  $\xi(t)$  en las Ecs. (5.2) y (C.3) se ha considerado global. Otro punto importante a tener en cuenta es que cuando  $c_0 = 1$  los exponentes de Lyapunov correspondientes al modo uniforme  $k = q = 0$  son idénticos a

los de un sistema caótico aislado y forzado por ruido  $\xi(t)$ .

## Bibliografía

- [1] Alligood K. T., Sauer T. D. and Yorke J. A. "Chaos: An introduction to Dynamical Systems", Spinger-Verlag, New York, (1997).
- [2] Alsing P. M., Gavrielides A., Kovanis V., Roy R. and Thornburg Jr. K. S., *Phys. Rev E*, **56**, pp. 6302, (1997).
- [3] Anishchenko V. S., Safonova M. A. and Chua L. O., *Int. J. Bif. Chaos*, **2**, pp. 397, (1992).
- [4] Anishchenko V. S., Neiman A. B. and Safonova M. A., *J. Stat. Phys.*, **70**, pp. 183, (1993).
- [5] Anishchenko V. S., Safonova M. A. and Chua L. O., *Int. J. Bif. Chaos*, **4**, pp. 441, (1994).
- [6] *Astronomia: El universo en tus manos* Edit. Orbis-Fabri. (1991)
- [7] Benettin G., Galgani L. and Strelcyn J. M., *Phys. Rev A*, **14**, pp. 2338, (1976).
- [8] Benzi R., Sutera A. and Vulpiani A., *J. Phys. A*, **14**, pp. L453, (1981).
- [9] Beth Th., Lazic D. E. and Mathias A., "Advances in Cryptology - CRYPTO'94", Yvo G. Desmedt Ed., Springer-Verlag, pp. 318, (1994).
- [10] Braiman, Y., Ditto, W.L., Wiesenfeld, K. & Spano, M.L., *Phys. Lett. A*, **206**, pp. 54, (1995).
- [11] Braiman, Y., Lindner, J.F., and Ditto, W.L., *Nature*, **378**, pp. 465, (1995).
- [12] Brown R. Rulkov F. and Tufillaro N. B., *Phys. Rev E*, **50**, pp. 4488, (1994).
- [13] Bullard E. C., *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **263**, pp. 481, (1968).
- [14] Bulsara A. R., and Schmera G., *Phys. Rev E*, **47**, pp. 3734, (1993).
- [15] Bulsara A. R., Lowen S. B. and Rees C. D., *Phys. Rev E* **49**, pp. 4989, (1994).
- [16] Cabrera J. L. and De la Rubia F. J., *Europhys. Lett.*, **39**, pp. 123, (1997).
- [17] Cabrera J. L., Gorroñoigoitia J. and De la Rubia F. J., *Phys. Rev Lett.* **82**, pp. 2816, (1999).
- [18] Carroll T. L. and Pecora L. M., *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **38**, pp. 453, (1991).
- [19] Carroll T. L. and Pecora L.M., *Physica D* **67**, pp. 126, (1993).
- [20] Carroll T. L., *Am. J. Phys.* **63**, pp. 377, (1995a).
- [21] Carroll T. L., *IEEE Trans. Circ. Syst.-I*, **42**, pp. 105, (1995b).
- [22] Carroll T. L., *Phys. Rev E* **52**, pp. 5817, (1995c).
- [23] Castelfranco A. M. and Stech H. W., *SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Appl. Math.*, **47**, pp. 573, (1987).
- [24] Castillo E. and Gutiérrez J. M., *Phys. Lett. A*, **244**, pp. 71, (1998).
- [25] Chatfield C., "The Analysis of Time Series: An Introduction", 3rd edition, Chapman and Hall, London, (1984).
- [26] Chillingworth D. R. J. and Holmes R. J., *Math. Geol.*, **12**, pp. 41, (1980).
- [27] Chua L. O., Itoh M., Kocarev Lj. and Eckert K., *J. Circuits Syst. Computers*, **3**, pp. 93, (1993a).
- [28] Chua L. O., Wu C. W., Huang A. and Zhong G.Q., *IEEE Trans. Circ. Syst.-I*, **40**, 10 pp. 732, (1993b).
- [29] Cruz J. M. and Chua L. O., *IEEE Trans. Circ. Syst.-II*, **40**, 10 pp. 614, (1993).
- [30] Cuomo K. M. and Oppenheim A. V., *Phys. Rev Lett.*, **71**, pp. 65, (1993).
- [31] Cuomo K. M., *Int. J. Bif. Chaos*, **4**, pp. 727, (1994).

- [32] Curran P F and Chua L. O., *Int. J. Bif. Chaos*, **7**, pp. 1375, (1997).
- [33] Curran P F, Suykens J. A. K. and Chua L. O., *Int. J. Bif. Chaos*, **7**, pp. 2891, (1997).
- [34] Cvitanović P. "Universality in Chaos" Adam Hilger Ltd., Techno House, Redcliffe Way, Bristol, (1984).
- [35] DeCastro M., Pérez-Muñuzuri V., Chua L. O. and Pérez-Villar V., *Int. J. Bif. Chaos*, **5**, pp. 859, (1995).
- [36] Dedieu H., Kennedy M. P. and Hasler M., *IEEE Trans. Circ. Syst.-II*, **40**, pp. 634, (1993).
- [37] Delaney K. R., Gelperin A., Fee M. S., Flores J. A., Gervais R., Tank D. W. and Kleinfeld D., *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, **91**, pp. 669, (1995).
- [38] Del Rio E., Velarde M. G., Rodríguez-Lozano A., Rulkov N. F., and Volkovskii A. R., *Int. J. Bif. Chaos*, **4**, pp. 1003, (1994).
- [39] Destexhe A., *Tesis Doctoral: "Aspects non-linéaires de l'activité rythmique du cerveau"*, (Univ. of Brussels).
- [40] Dixon R. C., "Spread Spectrum Communication Systems with Commercial Applications", 3rd edition, Wiley, New York, (1994).
- [41] Douglass J. K., Wilkens L., Pantazelou E. and Moss F., *Nature*, **365**, pp. 337, (1993).
- [42] Fedchenia I. I., Mannella R., McClintock P. V. E., Stein N. D. and Stocks N. G., *Phys. Rev. A*, **46**, pp. 1769, (1992).
- [43] Femat R. and Solís-Perales G., *Phys. Lett. A*, **262**, pp. 50, (1999).
- [44] Fox R. F., Gatland I. R., Roy R. and Vemuri G., *Phys. Rev. A*, **38**, pp.5938 (1988).
- [45] Freeman W. J., Chang H. J., Burke B. C., Rose P. A. and Badler J., *IEEE Trans. on Circ. and Syst. I*, **44**, pp. 989, (1997).
- [46] Fronzoni L., Mannella R., McClintock P.V.E. and Moss F., *Phys. Rev. A*, **36**, pp.834 (1987).
- [47] Fujisaka H. and Yamada T., *Prog. Theor. Phys.*, **69**, pp. 32, 1983.
- [48] Gade P. M. and Basu C., *Phys. Lett. A*, **217**, pp. 21, (1996).
- [49] Gailey, P. C., Neiman, A., Collins, J. J. and Moss, F., *Phys. Rev. Lett.*, **79**, pp. 4701, (1997).
- [50] Gammaitoni L., Menichella-Saetta E., Santucci S., Marchesoni F. and Presilla C., *Phys. Lett. A* **142**, pp. 59, (1989)
- [51] Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta, E and Santucci S., *Phys. Rev. Lett.*, **71**, pp. 3625, (1993).
- [52] Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P. and Marchesoni F., *Rev. Mod. Phys.* **70**, pp. 223, (1998).
- [53] García-Ojalvo J. and Sancho J.M., "Noise in spatially extended systems", Institute for Nonlinear Science, Springer-Verlag, New York, (1999).
- [54] Garfinkel A., Spano M. L., Ditto W. L. and Weiss J. N., *Science*, **257**, pp. 1230, (1992).
- [55] Gassmann F., *Phys. Rev. E*, **55**, pp. 2215, (1997).
- [56] Gingl Z., Kiss L. B. and Moss F., *Europhys. Lett.*, **29**, pp. 191, (1995).
- [57] Glanz J., *Science*, **277**, pp. 1758, (1997).
- [58] Glass L. and Mackey M., *Ann. of New York Acad. of Sci.*, **35**, pp. 214, (1979).
- [59] Gleick J., "Caos - La creación de una ciencia", Editorial Seix Barral S.A., (1988).
- [60] Guedes de Oliveira A. and Jones A. J., *Int. J. Bif. Chaos*, **8**, pp. 2225, (1998).
- [61] Halle K. S., Wu C. W., Itoh M. and Chua L. O. *Int. J. Bif. Chaos*, **3**, pp. 469, (1993).

- [62] Hänggi P, Marchesoni F and Grigolini P, *Z. Phys. B*, **56**, pp. 33, (1984).
- [63] Hänggi P, Jung P Zerbe C. and Moss F, *J. Stat. Phys.*, **70**, pp. 25, (1993).
- [64] Hayes S., *Phys. Rev. Lett.*, **70**, pp. 3031, (1993).
- [65] Hayes S., Grebogi C. Ott E. and Mark A., *Phys. Rev. Lett.*, **73**, pp. 1781, (1994).
- [66] Haykin S. S., "Communication Systems", John Wiley and Sons, Inc., New York, 3rd. edition (1994).
- [67] Herzel H. and Freund J., *Phys. Rev. E*, **52**, pp. 3238, (1995).
- [68] Hilton R. C., "Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction For Scientists And Engineers", Oxford University Press, (1994).
- [69] Holden A. V., "Chaos", Manchester University Press, (1986).
- [70] Inchiosa M. E. and Bulsara A. R., *Phys. Rev. E*, **52**, pp. 327, (1995).
- [71] Jefferys J.G.R., *Experimental Physiology* **75**, pp. 127 (1990).
- [72] Jensen M.S. and Yaari Y., *J. Neurophysiol.* **77**, pp. 1224 (1997).
- [73] Jung P, *Phys. Rep.*, **234**, pp.175, (1993).
- [74] Kádár S., Wang J and Showalter K., *Nature*, **391**, pp. 770-772, (1998).
- [75] Kapitaniak T. and Chua L. O., *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **6**, pp. 357, (1996).
- [76] Kapitaniak T., Wojewoda J. and Brindley J., *Phys. Lett. A*, **210**, pp. 283, (1996).
- [77] Kocarev Lj., Halle K. S., Eckert K. Chua L. O. and Parlitz U., *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **2**, pp. 709, (1992).
- [78] Kocarev, L. and Parlitz, U., *Phys. Rev. Lett.*, **77**, pp. 2206, (1996).
- [79] Kocarev Lj., Tasev Z., Stojanovski T. and Parlitz U., *Chaos*, **7**, pp. 635, (1997).
- [80] Kocarev Lj., Janjic P, Parlitz U. and Stojanovski T., *Chaos, Solitons and Fractals*, **9**, 283, (1998).
- [81] Kolumbán G., Vizvári B., Schwarz W. and Abel A. *Proc. 4th. Int. Workshop on nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, pp. 87, Sevilla, 27-28 June, (1996).
- [82] Kolumbán G., Kennedy M. P. and Chua L. O., *IEEE Trans. on Circ. and Syst.* **44** (10), pp. 927, (1997).
- [83] Kolumbán G., Kennedy M. P. and Chua L. O., *IEEE Trans. on Circ. and Syst.* **45**, pp. 1129, (1998).
- [84] Lakshmanan M. and Murali K., "Chaos in Nonlinear Oscillators: Controlling and Synchronization" World Scientific, Singapore, (1996).
- [85] Lange H. F. H., "Correlation Techniques, Foundations and Applications of Correlation Analysis in Modern Communications, Measurement and Control", D. Van Nostrand Company, Inc., (1966).
- [86] Larter R., Speelman B. and Worth R. M., *Chaos*, **9**, pp. 795, (1999).
- [87] Lee C., Williams D. B. and Lee J., *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **7**, pp. 1383, (1997).
- [88] Lefever R. and Turner J. Wm., *Phys. Rev. Lett.*, **56**, pp. 1631, (1986).
- [89] Leith C. E., *Mon. Wea. Rev.*, **102**, pp. 409, (1974).
- [90] Le Van Quyen M., Martinerie J., Adam C. and Varela F. J., *Phys. Rev. E*, **56**, pp. 3401, (1997)
- [91] Lindner J. F., Meadows B. K., Ditto W. L., Inchiosa M. E. and Bulsara A. R., *Phys. Rev. Lett.*, **75**, pp. 3, (1995); *Phys. Rev. E*, **53**, pp. 2081, (1996).
- [92] Locher M., Johnson G. A. and Hunt E. R., *Phys. Rev. Lett.*, **77**, pp. 4698, (1996).

- [93] Longa L., Curado E. M. F. and Oliveira F. A., *Phys. Rev E*, **54**, pp. R2201, (1996).
- [94] Lorenz E. N., *J. Atmos. Sci.*, **20**, pp. 130, (1963).
- [95] Lorenzo M. N., *Tesis de licenciatura: "Ondas de Sincronización en Sistemas Caóticos"*, Univ. de Santiago de Compostela, (1996).
- [96] Lorenzo M. N., Mariño I. P., Pérez-Muñuzuri V., Matías M. A. and Pérez-Villar V., *Phys. Rev E*, **54**, pp. R3094, (1996).
- [97] Lorenzo M. N., Kennedy M. P., Kolumbán G. and Kis G., Proceedings NDES'98, pp. 249, Budapest, Hungary, (1998).
- [98] Lorenzo M. N. and Pérez-Muñuzuri V., *Phys. Rev E.*, **60**, pp. 2779, (1999).
- [99] Lorenzo M. N. and Pérez-Muñuzuri V. "Chaotic Synchronization induced by exponentially correlated parametric noise" in D. S. Broomhead, E. A. Luchinskaya, P. V. E. McClintock and T. Mullin, Ed., *Stochaos: Stochastic and Chaotic Dynamics in the Lakes*, (American Institute of Physics, Melville, N.Y, USA 2000), pp. 387, (2000).
- [100] Lorenzo M. N. and Pérez-Muñuzuri V., (Enviado a *Chaos*), (2000).
- [101] Lorenzo M. N., Pérez-Muñuzuri V., Murali K. and Pérez-Villar V., (Enviado a *Int. J. of Bifurcation and Chaos*), (2000).
- [102] Lozi R. and Chua L. O., *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **3**, pp. 1319, (1993).
- [103] Luchinsky D. G., McClintock P. V. E. and Dykman D. I., *Rep. Prog. Phys.*, **61**, pp. 889, (1998).
- [104] Lucky R. W., Salz J. and Weldon E. J., "Principles of Data Communication", McGraw-Hill, New York, (1968).
- [105] Makeyev V. M., *Biophysics*, **38**, pp.189, (1993).
- [106] Malescio G., *Phys. Rev E*, **53**, pp. 6551, (1996).
- [107] Mandelbrot B. B., "Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension", Flammarion, París, (1975).
- [108] Mantegna R. N. and Spagnolo B., *Nuovo Cimento D*, **17**, pp. 873, (1995).
- [109] Mariño I. P., *Tesis Doctoral: "Synchronization and control of chaotic systems. Spatio-temporal structures and applications to communications."*, Univ. de Santiago de Compostela, (1999).
- [110] Mariño I. P., Rosa E. Jr., Grebogi C., *Int. J. Bif. Chaos* **9**, pp.2291, (1999).
- [111] Maritan A. and Banavar J. R., *Phys. Rev Lett.*, **72**, pp. 1451, (1994).
- [112] Maritan A. and Banavar J. R., *Phys. Rev Lett.*, **73**, pp. 2932, (1994).
- [113] Matías M. A. and Güémez J., *Phys. Rev Lett.*, **72**, pp. 1455, (1994).
- [114] Matías M. A. and Güémez J., *Phys. Lett. A*, **209**, pp. 48, (1995).
- [115] Matías M.A., Güémez J., Pérez-Muñuzuri V., Mariño I. P., Lorenzo M. N., and Pérez-Villar V., *Europhys. Lett.*, **37**, pp. 379, (1997a).
- [116] Matías M.A., Pérez-Muñuzuri V., Lorenzo M. N., I. P. Mariño, and Pérez-Villar V., *Phys. Rev Lett.* **78**, pp. 219, (1997b).
- [117] May R. M., *Nature*, **261**, pp. 459., (1976).
- [118] May R. M. and Oster G. F., *Phys. Lett. A*, **78**, pp. 1, (1980).
- [119] Mayer-Kress G. and Haken H., *J. Stat. Phys.* **26**, pp. 149, (1981).
- [120] McNamara B., Wiesenfeld K. and Roy R., *Phys. Rev Lett.*, **60**, pp. 2626, (1988).
- [121] Minai A. A. and Pandian T. D., *Chaos* **8**, pp. 621, (1998).

- [122] Minai A. A. and Anand T., *Phys. Rev E*, **57**, pp. 1559, (1998).
- [123] Minai A. A. and Anand T., *Physica D* **125**, pp 241, (1999a).
- [124] Minai A. A. and Anand T., *Phys. Rev E*, **59**, pp. 312, (1999b).
- [125] Moss F., "Stochastic resonance: From the ice ages to the monkey's ear", in Contemporary Problems in Statistical Physics, ed. Weiss, G. H. (SIAM, Philadelphia), pp. 205, (1994).
- [126] Moss F, Pierson D. and O'Gorman, *Int. J. Bif. Chaos* **4**, pp.1383, (1994).
- [127] Mullin T., "The Nature of Chaos". Clarendon Press-Oxford University Press, (1993).
- [128] Murali K. and Lakshmanan M., *Int. J. Bif. Chaos* **7**, pp.415, (1997a).
- [129] Murali K. and Lakshmanan M., *Phys. Rev E*, **56**, pp. 251, (1997b).
- [130] Murch A. R. and Bates R. H. T., *IEEE Trans. on Circ. and Syst.* **37**, pp. 608, (1990).
- [131] Neiman A., Sparin, P.I. and Stone L., *Phys. Rev E*, **56**, pp. 270, (1997).
- [132] Nekorkin V, Kazantsev V. B. and Chua L. O., *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **6**, pp. 1295, (1996).
- [133] Nicolis C., *Tellus*, **34**, pp. 1, (1982).
- [134] Nicolis C., *J. Stat. Phys.*, **70**, pp. 3, (1993).
- [135] Nicolis G., Nicolis C. McKernan D., *J. Stat. Phys.*, **70**, pp. 125, (1993).
- [136] Nicolis G., "Introduction to Nonlinear Science"., Cambridge University Press, (1995).
- [137] Ogorzalek M. J., Galias Z., Dabrowski A. M. and Dabrowski W. R., *IEEE Trans. on Circ. and Syst.*, **42**, pp. 706, (1995).
- [138] Olarrea J. and De la Rubia F. J., *Phys. Rev E.*, **53**, pp. 268, (1996).
- [139] Ott E., Grebogi C., and Yorke J.A., *Phys. Rev Lett.*, **64**, pp. 1196, (1990).
- [140] Pantazelou E., Dames C., Moss F, Douglass J. and Wilkens L., *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **5**, pp. 101, (1995).
- [141] Parlitz U., Chua L. O., Kocarev Lj., Halle K. S. and Shang A., *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **2**, pp. 973, (1992).
- [142] Parlitz U. and Kocarev L., *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **6**, pp. 581, (1996).
- [143] Pecora L. M. and Carroll T. L., *Phys. Rev Lett.*, **64**, pp. 821, (1990).
- [144] Pecora L. M., Carroll T. L., Gregg A. J., Douglas J. M. and Heagy J. F., *Chaos*, **7**, pp. 520, (1997).
- [145] Pei X., Bachmann K. and Moss F, *Phys. Lett. A*, **206**, pp. 61, (1995).
- [146] Pei X., Wilkens J. and Moss F, *J. Neurophysiol.*, **76**, pp. 3002, (1996).
- [147] Pérez G. and Cerdeira H. A., *Phys. Rev Lett.*, **74**, pp. 1970, (1995).
- [148] Pérez-Muñuzuri V. and Lorenzo M. N., *Int. J. Bif. and Chaos*, **9**, pp. 2321, (1999).
- [149] Pérez-Muñuzuri V, Sagués F and Sancho J. M. *Phys. Rev E*, **62**, (2000)
- [150] Pérez-Villar V, Muñuzuri A. P, Pérez-Muñuzuri V and Chua L. O., *Int. J. Bif. and Chaos*, **3**, pp. 1067, (1993).
- [151] Pikovsky A. S., *Phys. Rev Lett.*, **73**, pp. 2931, (1994).
- [152] Pikovsky A. S. and Kurths J., *Phys. Rev Lett.*, **78**, pp. 775, (1997).
- [153] Plant R. E., *SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Appl. Math.*, **40**, pp. 150, (1981).
- [154] Poincaré H., "Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles I-VI". Oeuvre I. Gauthier-Villars, Paris, (1880).
- [155] Porrà J. M., *Phys. Rev E*, **55**, pp. 6533, (1997).

- [156] Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T., "Numerical Recipes in Fortran. The art of scientific computing", Cambridge University Press, (1988).
- [157] Pyragas K., *Phys. Lett. A*, **181**, pp. 203, (1993).
- [158] Raima L., Speelman B. and Worth R. M., *Chaos*, **9**, pp. 795, (1999).
- [159] Riani M. and Simonotto E., *Nuovo Cimento D* **17**, pp. 903, (1995).
- [160] Rosenblum M. G., Pikovsky A. S. and Kurths J., *Phys. Rev Lett.*, **76**, pp. 1804, (1996).
- [161] Rosenblum M. G., Pikovsky A. S. and Kurths J., *Phys. Rev Lett.*, **78**, pp. 4193, (1997).
- [162] Rul'kov N. F., Sushckik M. M., Tsimring L. S. and Abarbanel H. D. I., *Phys. Rev E*, **51**, pp. 980, (1996).
- [163] Rul'kov N. F., and Sushckik M. M. *Phys. Lett. A*, **214**, pp. 145, (1996).
- [164] Sancho J. M., San Miguel M., Katz S. L. and Gunton J. D., *Phys. Rev A*, **26**, pp. 1589, (1982).
- [165] Sánchez E., Matías M. A. and Pérez-Muñuzuri, *Phys. Rev E*, **56**, pp. 4068, (1997); *ibid.*, *IEEE Trans. on Circ. and Syst.*, **46**, pp. 517, (1999).
- [166] Sánchez E., *Tesis Doctoral: "Estudio experimental de la sincronización de arrays de osciladores caóticos"*, Univ. de Salamanca, (1999).
- [167] Schiff S. J., Jerger K., Duong D. H., Chang T., Spano M. L. and Ditto W. L., *Nature*, **370**, pp. 615, (1994).
- [168] Schuster H. G., "Deterministic Chaos: An introduction", Physik-Verlag, Weinheim, (1988).
- [169] Sendiña-Nadal I, Alonso S., Pérez-Muñuzuri V, Gómez-Gesteira M., Pérez-Villar V, Ramírez-Piscina L., Casademunt J., Sancho J. M. and Sagués F, *Phys. Rev Lett.*, **84**, pp. 2734, (2000).
- [170] Shinbrot T., Grebogi C., Ott E. and Yorke J. A., *Nature*, **363**, pp. 411, (1996).
- [171] Simonotto E., Riani M., Seite C., Roberts M., Twitty and Moss F, *Phys. Rev Lett.*, **78**, pp. 1186, (1997).
- [172] Short K. M., *Int. J. of Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, **4**, pp. 959, (1994).
- [173] Short K. M., *Int. J. of Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, **6**, pp. 367, (1996).
- [174] Skarda C. A. and Freeman W. J., *Behavioral and Brain Science*, **10**, pp. 161, (1987)
- [175] Stone L., Saparin P.I., Huppert A. and Price C., *Geophysical Research Letters*, **25**, pp. 175, (1998).
- [176] Stremler F. G., "Introducción a los sistemas de comunicación", Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. Wilmington, Delaware, U.S.A., (1993).
- [177] Strogatz S. H., "Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering", Addison-Wesley Publishing Company, (1994).
- [178] Sussman G. J. and Wisdom J., *Science*, **241**, pp. 433, (1988).
- [179] Suykens J. A. K., and Vandewalle J., *Int. J. Bif. Chaos*, **7**, pp. 665, (1997).
- [180] Suykens J. A. K., Curran P. F. and Chua L. O., *Int. J. Bif. Chaos*, **7**, pp. 671, (1997a).
- [181] Suykens J. A. K., Vandewalle J. and Chua L. O., *Int. J. Bif. Chaos*, **7**, pp. 1323, (1997b).
- [182] Suykens J. A. K., Curran P. F., Vandewalle J. and Chua L. O., *IEEE Trans. Circuits and Systems-I*, **44**, pp. 891, (1997c).
- [183] Toral R., Mirasso C. R., Hernández-García, E. and Piro O., Proceedings of the 2nd International Conference on Unsolved Problems of Noise and Fluctuations, Adelaide (Australia), Ed. Abbot

- D. and Kiss L. B., (1999).
- [184] Vadivasova T. E., Balanov A. G., Sosnovtseva O. V., Postnov D. E. and Mosekilde E., *Phys. Lett. A*, **253**, pp. 66, (1999).
- [185] Vernam G. S., *J. Amer. Inst. Elec-Engn.*, **55**, pp. 109, (1926).
- [186] Viterbi A. J., "CDMA Principles of Spread Spectrum Communication", Addison-Wesley Wireless Communication Series, (1995).
- [187] Viterbi A. J., "Principles of Coherent Communication", McGraw-Hill, New York, (1966).
- [188] Wang X., Tang B. and Ruan J., *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **8**, pp. 2239, (1998).
- [189] Wiesenfeld K. and Moss F., *Nature* **373**, pp. 33, (1995).
- [190] Wiesenfeld K. and Jaramillo F., *Chaos*, **8**, pp.539, (1998).
- [191] Xiao J. H., Hu G. and Zhilin Qu, *Phys. Rev Lett.*, **77**, pp. 4162, (1996).
- [192] Yang T., Wu C. W. and Chua L. O., *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **44**, pp. 469, (1997).
- [193] Yang T. and Chua L. O., *Int. J. Bif. Chaos*, **7**, pp. 645, (1997).
- [194] Yang T., Yang Lin-Bao and Yang Chun-Mei, *Physica D*, **124**, pp. 248, (1998a).
- [195] Yang T., Yang Lin-Bao and Yang Chun-Mei, *Phys. Lett. A*, **247**, pp. 105, (1998b).
- [196] Yang W., Ding W., Mandell A. J. and Ott E., *Phys. Rev E*, **51**, pp. 102, (1995).
- [197] Zhou C-S. and Chen T-L., *Phys. Lett. A*, **234**, pp. 429, (1997).
- [198] Zhu S., Yu W. and Roy R., *Phys. Rev A*, **34**, pp. 4333, (1986).
- [199] Zhu Y., Iyengar G., Toth Z., Tracton M. S. and Marchok T., *Preprints of the 15th. AMS Conference on Weather Analysis and Forecasting*, 19-23 August 1996, Norfolk, Virginia, pp. 179, (1196).
- [200] Ziemer R. E. and Tranter W. H., "Principles of communications. Systems, Modulation and Noise", Houghton Mifflin Company Boston, (1990).