BIBLIOTECA VIRTUAL
MIGUEL DE CERVANTES

Universidad de Alicante

Nuevos resultados sobre sistemas lineales y conjuntos convexos

Margarita Rodríguez Álvarez

Tesis de Doctorado

Facultad: Ciencias

Directores: Dr. Miguel Ángel Goberna Torrent
Dr. Valentín Jornet Pla

2001

Universidad de Alicante

Depto. de Estadística e Investigación Operativa

Nuevos resultados sobre sistemas lineales y conjuntos convexos

Memoria presentada por Margarita Rodríguez Álvarez para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, realizada bajo la dirección de los doctores D. Miguel Ángel Goberna Torrent y D. Valentín Jornet Pla.

Alicante, Mayo de 2001

D. MIGUEL ÁNGEL GOBERNA TORRENT, Catedrático de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante, y

D. VALENTÍN JORNET PLA, Catedrático E.U. de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante,

CERTIFICAN: Que la presente memoria **Nuevos resultados sobre sistemas lineales y conjuntos convexos** ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Alicante por Dña. Margarita Rodríguez Álvarez, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firman el presente certificado en Alicante, a 10 de Mayo de dos mil uno.

Fdo: Miguel A. Goberna Fdo: Valentín Jornet

Índice

Introducción **1**

Capítulo 0. Preliminares **5**

0.1. Conjuntos convexos 5

0.2. Sistemas semi-infinitos lineales 13

Capítulo 1. Sistemas lineales generales en $\mathbb{R}^n$ **19**

1.1. Introducción 19

1.2. Existencia de soluciones 22

1.3. Conjuntos linealizables 33

1.4. Geometría 46

1.5. Optimización lineal 49

Capítulo 2. Confín de un conjunto convexo **53**

2.1. Introducción 53

2.2. Confín: Propiedades básicas 54

2.3. Conexión del confín 67

2.4. El confín y la iluminación de los conjuntos convexos cerrados 71

2.5. Algunas aplicaciones a los sistemas de desigualdades lineales 77

Capítulo 3. Caracterización de familias de conjuntos cerrados convexos **83**

3.1. Introducción 83

3.2. Caracterización de las sumas de conjuntos convexos compactos con subespacios vectoriales 88

3.3. Caracterización de los símplices 93
3.4. Caracterización de los sandwiches 97
3.5. Caracterización topológica de los k-sandwiches 103
3.6. Caracterización de los paralelotopos 106
3.7. Caracterización de conjuntos continuos 110
3.8. Caracterización de cuerpos convexos suaves 115
3.9. Caracterización de familias de cuerpos convexos mediante conceptos de iluminación 121

Bibliografía 123

Introducción

El conjunto de soluciones de cualquier sistema de desigualdades lineales de la forma $\{a_t'x \geq b_t,\, t \in T\}$, siendo T un conjunto arbitrario de índices (posiblemente infinito), $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T$, es un conjunto convexo cerrado y, recíprocamente, cualquier conjunto convexo cerrado se puede representar por medio de una infinidad de sistemas lineales de este tipo. Existe, pues, una correspondencia entre sistemas semi-infinitos lineales (SSIL) y conjuntos convexos cerrados.

Sin embargo, los sistemas anteriormente mencionados no son los sistemas lineales más generales que podemos considerar. Un sistema en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$\sigma = \{a_t'x \geq b_t,\, t \in D;\, a_t'x > b_t,\, t \in E\}\,,$$

donde los conjuntos de índices, D y E, son disjuntos y no simultáneamente vacíos, $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T := D \cup E$, contiene un número arbitrario (posiblemente infinito) de restricciones de desigualdad débil (dos de las cuales reemplazan a una ecuación) y/o estricta. Se trata, pues, de un sistema semi-infinito lineal general (SSILG) y su conjunto de soluciones es un conjunto convexo, por tratarse de una intersección de semiespacios abiertos o cerrados.

En este punto, cabe preguntarse si, al igual que ocurre con los conjuntos convexos cerrados (caso particular de los conjuntos convexos) y los SSIL (caso particular de los SSILG), todo conjunto convexo se puede representar por medio de un SSILG. Al ser negativa la respuesta, llamaremos conjuntos linealizables a la clase de conjuntos convexos que sí cumplen esta propiedad. Estos conjuntos fueron introducidos por Fenchel [14] (con la denominación de “evenly convex”) para extender la teoría de la polaridad, pero sin analizar a fondo sus posibles caracterizaciones ni estudiar

exhaustivamente sus propiedades. De la existencia de este trabajo tuvimos noticia a través de una comunicación privada del Prof. Martínez Legaz, quien ha utilizado estos conjuntos para definir un tipo de funciones cuasiconvexas importante para la generalización de la teoría de la conjugación (véanse [24], [30], [25] y [26]).

Aunque los SSIL han sido muy bien estudiados por su conexión con la Programación Semi-Infinita Lineal, no ocurre lo mismo con los SSILG, por lo que dedicaremos el Capítulo 1 de la presente memoria al estudio de esta clase de sistemas y de los conjuntos que admiten este tipo de representaciones lineales. En él analizaremos la existencia de soluciones, caracterizaremos geométricamente los conjuntos linealizables y probaremos que se pueden extender, a esta gran familia de conjuntos convexos, la mayoría de las propiedades conocidas para la subfamilia de los conjuntos convexos cerrados. También mostraremos que es posible obtener información geométrica sobre estos conjuntos a partir de una representación lineal dada y, finalmente, discutiremos la teoría y los métodos para aquellos problemas de optimización lineal que contienen restricciones de desigualdad estrictas.

Dentro de la correspondencia que existe entre SSIL y conjuntos convexos cerrados, hay ciertos tipos de SSIL que se corresponden con determinadas familias de conjuntos convexos cerrados. Así, por ejemplo, los llamados sistemas localmente poliédricos (LOP), sistemas en los que la condición de Weyl (siempre suficiente para que un punto sea extremo) es también necesaria, tienen conjuntos de soluciones cuasipoliédricos (conjuntos convexos cerrados cuyas intersecciones con polítopos son polítopos) y, viceversa, cualquier conjunto cuasipoliédrico admite una representación LOP. Por lo tanto, podemos caracterizar los conjuntos cuasipoliédricos como aquellos conjuntos convexos cerrados que admiten representaciones LOP.

La caracterización de familias de conjuntos convexos cerrados puede resultar útil en diferentes campos de las matemáticas aplicadas. Así, por ejemplo, una condición necesaria para la convergencia de algoritmos de programación matemática que progresan sobre la frontera del conjunto factible (como el método simplex en programación lineal ordinaria y semi-infinita) es la conexión por arcos de la frontera, por lo que sería útil caracterizar aquellos conjuntos convexos cerrados que poseen esta

deseada propiedad. En el Capítulo 3 abordaremos la caracterización de determinadas familias de conjuntos convexos cerrados (algunas de ellas con propiedades muy interesantes de cara a las aplicaciones) desde diferentes puntos de vista, entre ellos sus representaciones lineales.

En particular, para caracterizar la clase de los conjuntos convexos cerrados que tienen la frontera relativa conexa por arcos será necesario el uso de un nuevo concepto, el de confín de un conjunto convexo no vacío, que introduciremos en el Capítulo 2. En este capítulo, además, analizaremos las propiedades del confín de los conjuntos convexos en general y de los convexos cerrados en particular, así como sus relaciones con ciertos conceptos de iluminación ya conocidos y sus aplicaciones a la teoría de los sistemas lineales.

Por último, decir que los tres capítulos que constituyen el cuerpo de esta memoria están precedidos por un capítulo de preliminares, el Capítulo 0, en el que se recoge la notación, las definiciones y los enunciados de los resultados ya conocidos que se van a utilizar en los demás capítulos. Buena parte de dichos resultados aparecen expuestos en la reciente monografía de Goberna y López [19] de una manera ordenada y con una notación unificada que se ha mantenido en esta memoria. Hemos optado por referirnos a [19], siempre que ha sido posible, en lugar de hacerlo a las fuentes originales (que el lector puede encontrar en las notas finales del correspondiente capítulo de [19]).

Capítulo 0

Preliminares

0.1 Conjuntos convexos

En el espacio euclídeo, $\mathbb{R}^n$, denotaremos por $\|\cdot\|$, 0_n,

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

y

$$S_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\},$$

la norma euclídea, el vector cero, la *bola unidad abierta* y la *esfera unidad*, respectivamente. La base canónica de $\mathbb{R}^n$ la representaremos por $e^1, \ldots, e^n$.

Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es *convexo* cuando, para todo par $x, y \in C$, el segmento $[x, y] := \{(1-\lambda)\, x + \lambda y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ está contenido en C. Consideraremos que el vacío es un conjunto convexo por convenio.

Un conjunto no vacío $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es un *cono* si contiene a todos los rayos $\{\lambda x \mid \lambda > 0\}$, con $x \in C \setminus \{0_n\}$.

Dado $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\operatorname{span} C$, $\operatorname{aff} C$, $\operatorname{conv} C$, $\operatorname{cone} C$ y $C^\perp$ al *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *generado* por C, la *envoltura afín* de C, la *envoltura convexa* de C, el *cono convexo generado* por C (definido como la intersección de todos los conos convexos que contienen al origen y al conjunto C) y el subespacio

de los vectores que son ortogonales a todos los elementos de C, respectivamente. Si $C = \emptyset$, adoptaremos el convenio $\operatorname{span}\emptyset = \operatorname{aff}\emptyset = \operatorname{cone}\emptyset = \{0_n\}$. Si C es convexo no vacío, denotaremos por $\dim C$ su *dimensión* (definida como la dimensión de $\operatorname{aff} C$). Todas estas envolturas se pueden describir a través del espacio de *sucesiones finitas generalizadas*, $\mathbb{R}^{(T)}$, cuyos elementos son las funciones $\lambda : T \to \mathbb{R}$ tales que $\lambda_t \neq 0$ sólo en un subconjunto finito de T. El cono convexo, en $\mathbb{R}^{(T)}$, de las sucesiones finitas no negativas es $\mathbb{R}_+^{(T)}$.

Supuesto que C es convexo, diremos que un conjunto convexo $X \subset C$ es una *cara* de C si, para todo par $v^1 \neq v^2$ de C tal que $X \cap]v^1, v^2[\neq \emptyset$, se tiene que $[v^1, v^2] \subset X$. El conjunto vacío también se considera una cara de C por convenio. Los *puntos extremos*, las *aristas* y las *facetas* de C son las caras de C de dimensión 0, 1 y $n-1$, respectivamente. Denotaremos por $\operatorname{extr} C$ el conjunto de todos los puntos extremos de C. Diremos que una cara es *expuesta* si se puede obtener como conjunto de mínimos de una función afín sobre C.

Para C convexo no vacío definiremos el *cono de recesión* de C, O^+C, que viene dado por

$$O^+C := \{v \in \mathbb{R}^n \mid x + \mu v \in C \text{ para todo } x \in C \text{ y para todo } \mu \geq 0\}$$

y el *cono de direcciones factibles* de C en $x \in C$, $D(C, x)$, dado por

$$D(C, x) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid x + \mu v \in C \text{ para algún } \mu > 0\}\,.$$

Si $C \neq \emptyset$ es un cono convexo, definiremos el *cono polar positivo* de C, C^o, dado por

$$C^o := \{u \in \mathbb{R}^n \mid u'x \geq 0 \text{ para todo } x \in C\}\,.$$

Obsérvese que para todo $x \in C$, $D\,(C, x) = \operatorname{cone}(C - x)$.

Al conjunto $O^+C \cap (-O^+C)$ le llamaremos *espacio de linealidad* de C y se denotará por $\operatorname{lin} C$.

Un cono convexo es *apuntado* cuando no contiene rectas, es decir, si su espacio de linealidad se reduce al vector cero.

Un vector no nulo $w \in O^+C$ es una *dirección extrema* del conjunto convexo no vacío C si, para todo par de vectores w^1, $w^2 \in O^+C$ tales que $w = \mu_1 w^1 + \mu_2 w^2$

(μ_1 y μ_2 números reales positivos), se tiene que

$$\operatorname{span}\left\{w^i\right\} = \operatorname{span}\{w\}, \quad i = 1, 2.$$

Desde el punto de vista topológico, denotamos por $\operatorname{int} C$, $\operatorname{cl} C$ y $\operatorname{bd} C$ los conjuntos *interior*, *clausura* y *frontera* de un subconjunto C cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Si el conjunto C es convexo, definimos los conjuntos *interior relativo* y *frontera relativa* de C, denotados por $\operatorname{rint} C$ y $\operatorname{rbd} C$, como el interior y la frontera de C cuando consideramos C como subconjunto de $\operatorname{aff} C$ con la topología inducida.

Dado un conjunto convexo C y un punto $\overline{x} \in \operatorname{bd} C$, existe un vector $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ tal que $a'x \geq a'\overline{x}$ para todo $x \in C$; a la frontera de este semiespacio le llamaremos *hiperplano de soporte* de C en $\overline{x}$.

Se utilizarán a menudo las siguientes familias de conjuntos convexos cerrados: los *poliedros convexos* (definidos como intersecciones finitas de semiespacios cerrados), los *polítopos* (poliedros convexos acotados) y los *conjuntos cuasipoliédricos* (definidos por Klee como aquellos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ cuyas intersecciones con polítopos son polítopos).

Ciertas pruebas por inducción utilizan implícitamente la adaptación de los conceptos anteriores a variedades: Las variedades afines en M (variedad afín de $\mathbb{R}^n$) son las variedades afines de $\mathbb{R}^n$ contenidas en M, y son hiperplanos en M cuando su dimensión es $(\dim M) - 1$. Si L es un hiperplano en M, cada una de las dos componentes conexas de $M \setminus L$ es un semiespacio abierto en M determinado por L; su unión con L proporciona los dos semiespacios cerrados en M correspondientes a L. La intersección de finitos semiespacios cerrados de M es un poliedro convexo en M, pudiéndose probar que son exactamente los poliedros convexos de $\mathbb{R}^n$ contenidos en M. Del mismo modo, los polítopos (cuasipoliedros) de M son los polítopos (cuasipoliedros) de $\mathbb{R}^n$ contenidos en M. Las propiedades de los poliedros convexos, polítopos y cuasipoliedros en una variedad afín de dimensión $m < n$ son las mismas que las de los objetos correspondientes en $\mathbb{R}^m$ (sustituyendo los operadores topológicos, bd e int, por los relativos correspondientes, rbd y rint).

Dado que será frecuente el uso de resultados de Análisis Convexo a lo largo de la

memoria, hacemos, a continuación, una recopilación de los mismos, dando, para cada uno de ellos, la adecuada referencia bibliográfica. En algunos casos aislados, daremos el enunciado y su demostración, por tratarse de nuevas aportaciones.

PROPOSICIÓN 0.1 *[32, Th. 3.8] Si K_1 y K_2 son conos convexos que contienen al origen, entonces $K_1 + K_2 = \operatorname{conv}(K_1 \cup K_2)$.*

PROPOSICIÓN 0.2 *Sea C un conjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^n$. Entonces, se verifican las siguientes proposiciones:*

(i) $\operatorname{rint} C$ *es un conjunto convexo no vacío [32, Th. 6.2];*

(ii) $\operatorname{rint} \operatorname{cl} C = \operatorname{rint} C$ *y* $\operatorname{cl} \operatorname{rint} C = \operatorname{cl} C$ *[32, Th. 6.3]*;

(iii) *si* $x \in \operatorname{rint} C$ *e* $y \in \operatorname{cl} C$, *entonces* $[x, y[\subset \operatorname{rint} C$ *(Lema de Accesibilidad) [32, Th. 6.1]; y*

(iv) $z \in \operatorname{rint} C$ *si, y sólo si, para todo* $x \in C$, *existe* $\mu > 1$ *tal que* $(1-\mu)\, x + \mu z \in C$ *[32, Th. 6.4].*

PROPOSICIÓN 0.3 *[32, Th. 6.6] Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, y sea A una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Entonces*

$$\operatorname{rint}(AC) = A(\operatorname{rint} C).$$

PROPOSICIÓN 0.4 *[32, Cor. 6.6.2] Para cualquier par de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, C_1 y C_2, se cumple*

$$\operatorname{rint}(C_1 + C_2) = \operatorname{rint} C_1 + \operatorname{rint} C_2.$$

Como se ha señalado, el interior relativo de un conjunto convexo no vacío es no vacío. Algo parecido ocurre con $\operatorname{rbd} C$.

PROPOSICIÓN 0.5 *Sea C un conjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^n$. Entonces, se verifican las siguientes proposiciones:*

(i) $\operatorname{rbd} C$ *es no vacío si, y sólo si, C no es una variedad afín; y*

(ii) *si C es un subconjunto propio de $\mathbb{R}^n$, entonces C tiene, al menos, un punto frontera.*

Demostración. (i) Para demostrar la implicación no trivial, construiremos un par de sucesiones $\{x^n\} \subset C$ e $\{y^n\} \subset (\operatorname{aff} C) \setminus C$ convergentes al mismo punto de $\operatorname{aff} C$. Dicho punto estará en la frontera relativa de C.

Por ser C no vacío y no ser una variedad afín ($(\operatorname{aff} C) \setminus C \neq \emptyset$), existe un punto $x^1 \in C$ y un punto $y^1 \in (\operatorname{aff} C) \setminus C$. Si $\dfrac{x^1 + y^1}{2}$ (que pertenece a $\operatorname{aff} C$ por

ser combinación convexa de elementos de dicho conjunto) pertenece a C, entonces tomamos

$$x^2 = \frac{x^1 + y^1}{2} \text{ e } y^2 = y^1.$$

En caso contrario, tomamos

$$x^2 = x^1 \text{ e } y^2 = \frac{x^1 + y^1}{2}.$$

En general, para construir los términos x^{n+1} e y^{n+1}, se toman

$$x^{n+1} = \frac{x^n + y^n}{2} \quad \text{e} \quad y^{n+1} = y^n, \quad \text{si} \quad \frac{x^n + y^n}{2} \in C,$$

y

$$x^{n+1} = x^n \quad \text{e} \quad y^{n+1} = \frac{x^n + y^n}{2}, \quad \text{si} \quad \frac{x^n + y^n}{2} \in (\operatorname{aff} C) \setminus C.$$

De esta manera hemos construido una sucesión $\{x^n\}$ contenida en el conjunto C y una sucesión $\{y^n\}$ contenida en el conjunto $(\operatorname{aff} C) \setminus C$ cuyos términos n-ésimos verifican que

$$\|x^n - y^n\| = \frac{\|x^{n-1} - y^{n-1}\|}{2}.$$

La sucesión $\{x^n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ ya que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $p \geq 0$, se tiene que

$$\left\|x^{n+p} - x^n\right\| \leq \|x^n - y^n\| = \frac{\|x^1 - y^1\|}{2^{n-1}}.$$

Del mismo modo, $\{y^n\}$ también es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Además, ambas sucesiones son convergentes en $\mathbb{R}^n$ a un mismo punto, el cual pertenece a $\operatorname{aff} C$ por ser éste un conjunto cerrado.

(ii) El argumento de la demostración es el mismo que en el caso anterior sustituyendo $\operatorname{aff} C$ por $\mathbb{R}^n$. ■

La siguiente proposición caracteriza los puntos del interior relativo de la envoltura convexa (envoltura convexa cónica) de un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$.

PROPOSICIÓN 0.6 *[19, Th. A7] Sea C un conjunto no vacío en $\mathbb{R}^n$ y $z \in \operatorname{aff} C$ ($z \in \operatorname{span} C$). Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) $z \in \operatorname{rint} \operatorname{conv} C$ *(*$z \in \operatorname{rint} \operatorname{cone} C$*, respectivamente);*

(ii) *existen puntos* $x^i \in C$*,* $i = 1, 2, \ldots, p$*, con* $\operatorname{aff}\{x^1, x^2, \ldots, x^p\} = \operatorname{aff} C$ *(respectivamente* $\operatorname{span}\{x^1, x^2, \ldots, x^p\} = \operatorname{span} C$*), y escalares positivos* α_i*,* $i = 1, 2, \ldots, p$*, tales que* $z = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x^i$ *y* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ *(respectivamente* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i$ *arbitraria); y*

(iii) $z + \operatorname{cone}(C - z) = \operatorname{aff} C$

$$(\mathbb{R}_+ [(\operatorname{cone} C) - z] = \operatorname{cone}[\{-z\} \cup \operatorname{cone} C] = \operatorname{span} C).$$

En la siguiente proposición demostramos algunas de las propiedades, claramente intuitivas, que tienen los puntos del interior relativo de un convexo no vacío.

PROPOSICIÓN 0.7 *Sea* C *un conjunto convexo no vacío y* $\overline{x} \in \operatorname{rint} C$*. Entonces se verifican las siguientes proposiciones:*

(i) $\operatorname{span}(C - \overline{x}) = \operatorname{cone}(C - \overline{x}) = (\operatorname{aff} C) - C$; y

(ii) $0_n \in \operatorname{rint}(C - \overline{x})$.

Demostración. (i) Para demostrar la primera igualdad es suficiente probar que dada una base en $\operatorname{span}(C - \overline{x})$, sus elementos y los opuestos pertenecen a $\operatorname{cone}(C - \overline{x})$. Sea $\{y^i - \overline{x},\, i = 1, \ldots, m\}$, con $y^i \in C$ para todo $i = 1, \ldots, m$, una base de $\operatorname{span}(C - \overline{x})$.

Puesto que $\overline{x} \in \operatorname{rint} C$, existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$(\overline{x} + \varepsilon B_n) \cap (\operatorname{aff} C) \subset C.$$

Para cada $i = 1, \ldots, m$, el punto

$$\overline{x} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{(y^i - \overline{x})}{\|y^i - \overline{x}\|} \in (\overline{x} + \varepsilon B_n) \cap (\operatorname{aff} C) \subset C,$$

de modo que

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{(\overline{x} - y^i)}{\|y^i - \overline{x}\|} \in C - \overline{x}$$

y, por lo tanto,

$$\overline{x} - y^i \in \operatorname{cone}(C - \overline{x}).$$

Dado que también se verifica que $y^i - \overline{x} \in \operatorname{cone}(C - \overline{x})$ para todo $i = 1, ..., m$, se

obtiene que

$$\operatorname{cone}(C-\overline{x}) = \operatorname{span}(C-\overline{x}).$$

Por otra parte, si $\overline{x} \in \operatorname{rint} C$,

$$(\operatorname{aff} C) - C = (\operatorname{aff} C) - \overline{x}. \tag{0.1}$$

En efecto, si $y - x \in (\operatorname{aff} C) - C$, entonces

$$y - x = y + \overline{x} - \overline{x} - x = (y + \overline{x} - x) - \overline{x} \in (\operatorname{aff} C) - \overline{x}.$$

La segunda igualdad en (i) se obtiene como consecuencia de (0.1) y de la Proposición 0.6(iii).

(ii) Si $\overline{x} \in \operatorname{rint} C$, entonces, por la Proposición 0.6, existen puntos $x^i \in C$, $i = 1, \ldots, p$, con

$$\operatorname{aff} C = \operatorname{aff}\left\{x^1, x^2, ..., x^p\right\},$$

y escalares positivos α_i, $i = 1, \ldots, p$, tales que

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x^i \text{ y } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1.$$

Entonces

$$0_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x^i - \overline{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x^i - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overline{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (x^i - \overline{x})$$

con $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ y

$$\operatorname{aff}(C-\overline{x}) = \operatorname{aff}\left\{x^1 - \overline{x}, x^2 - \overline{x}, ..., x^p - \overline{x}\right\},$$

y, por la Proposición 0.6,

$$0_n \in \operatorname{rint}\operatorname{conv}(C-\overline{x}) = \operatorname{rint}(C-\overline{x}). \qquad \blacksquare$$

El siguiente resultado caracteriza la acotación de un conjunto convexo cerrado no vacío a través de su cono de recesión.

PROPOSICIÓN 0.8 *[32, Th. 8.4] Un conjunto convexo cerrado no vacío $C \subset \mathbb{R}^n$ es acotado si, y sólo si, $O^+C = \{0_n\}$.*

PROPOSICIÓN 0.9 *[32, Cor. 9.1.1] Sean $C_1, \ldots, C_m$ conjuntos convexos no vacíos en $\mathbb{R}^n$ que satisfacen la siguiente condición: si $z_1, \ldots, z_m$ son vectores tales que $z_i \in O^+(\operatorname{cl} C_i)$ y $z_1 + \ldots + z_m = 0_n$, entonces $z_i \in \operatorname{lin}(\operatorname{cl} C_i)$ para $i = 1, \ldots, m$. Entonces*

$$\operatorname{cl}(C_1 + \ldots + C_m) = \operatorname{cl} C_1 + \ldots + \operatorname{cl} C_m,$$

$$O^+[\operatorname{cl}(C_1 + \ldots + C_m)] = O^+(\operatorname{cl} C_1) + \ldots + O^+(\operatorname{cl} C_m).$$

En las dos siguientes proposiciones se dan propiedades acerca de las caras de un conjunto convexo.

PROPOSICIÓN 0.10 *[32, Th. 18.1] Sea C un conjunto convexo, y sea C' una cara de C. Si D es un conjunto convexo en C tal que $(\operatorname{rint} D) \cap C' \neq \emptyset$, entonces $D \subset C'$.*

PROPOSICIÓN 0.11 *[32, Cor. 18.1.3] Sea C un conjunto convexo, y sea C' una cara propia de C. Entonces $C' \subset \operatorname{rbd} C$ y $\dim C' < \dim C$.*

Se dice que un par de conjuntos no vacíos, C_1 y C_2, son *separables* si existe un hiperplano $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = b\}$ tal que $a'x - b \leq 0 \leq a'y - b$ para todo $x \in C_1$ y para todo $y \in C_2$. Si, además, $(C_1 \cup C_2) \setminus H \neq \emptyset$, entonces C_1 y C_2 están *propiamente separados*. En el caso de que las desigualdades sean estrictas, se dice que H separa a C_1 y C_2 *estrictamente.*

Por otra parte, si se cumple la desigualdad

$$\inf\{a'x \mid x \in C_1\} \geq \sup\{a'y \mid y \in C_2\},$$

se dice que C_1 y C_2 están *débilmente separados* y si esta desigualdad es estricta, se dice que H separa a C_1 y C_2 *fuertemente*.

PROPOSICIÓN 0.12 *[32, Th. 11.2] Sea C un conjunto convexo no vacío relativamente abierto en $\mathbb{R}^n$, y sea M una variedad afín no vacía en $\mathbb{R}^n$ que no corta a C. Entonces existe un hiperplano H conteniendo a M, tal que uno de los semiespacios abiertos asociados con H contiene a C.*

PROPOSICIÓN 0.13 *[32, Cor. 11.4.1] Sean C_1 y C_2 conjuntos cerrados convexos no vacíos disjuntos en $\mathbb{R}^n$ que no tienen direcciones de recesión en común. Entonces existe un hiperplano separando fuertemente a C_1 y C_2.*

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, se definen el *epígrafo* de f, $\operatorname{epi} f$, y el

hipografo de f, $\operatorname{hypo} f$, como los conjuntos

$$\operatorname{epi} f := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \leq \alpha \right\}$$

y

$$\operatorname{hypo} f := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \geq \alpha \right\}.$$

Diremos que f es *convexa* o *cóncava* según sea convexo el conjunto $\operatorname{epi} f$ o bien $\operatorname{hypo} f$.

Llamaremos *dominio efectivo* de f, $\operatorname{dom} f$, al conjunto

$$\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}.$$

Una función convexa f se dice que es *propia* si $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ y $f(x) > -\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Dada una función convexa propia, f, y un punto $x \in \operatorname{dom} f$, se dice que el vector u es un *subgradiente* de f en x si, para todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) \geq f(x) + u'(y - x).$$

Se dice que f es *subdiferenciable* en un punto $x \in \operatorname{dom} f$ si existe algún subgradiente de f en x y, en el caso de que éste sea único, se dice que f es *diferenciable* en x.

La subdiferenciabilidad de f en un punto $x \in \operatorname{dom} f$ es equivalente a la existencia de un hiperplano no vertical que soporta a $\operatorname{epi} f$ en $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ y cada subgradiente de f en x, u, está asociado con exactamente uno de estos hiperplanos de soporte (el que tiene como vector normal a $\begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix}$). La existencia de tales hiperplanos de soporte no verticales es una propiedad de los puntos de $\operatorname{rint}(\operatorname{dom} f)$, es decir, f es subdiferenciable en todos los puntos de $\operatorname{rint}(\operatorname{dom} f)$ [32, Th. 23.4].

0.2 Sistemas semi-infinitos lineales

A lo largo de la memoria irán apareciendo repetidamente sistemas lineales de la

forma

$$\sigma = \{a_t' x \geq b_t,\, t \in T\}\,, \tag{0.2}$$

donde T es un conjunto arbitrario de índices (posiblemente infinito), $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T$. En esta sección haremos una recopilación de los principales conceptos y resultados que se van a utilizar en relación con los sistemas semi-infinitos lineales (SSIL).

Denotaremos por F el *conjunto de soluciones* de σ y diremos que σ es *consistente* si $F \neq \emptyset$. Cuando todos los coeficientes de una desigualdad lineal son cero, se dice que esta *desigualdad* es *trivial*. El *sistema* será *trivial* cuando todas sus desigualdades sean triviales.

Las caras de F son los conjuntos $F_t = \{x \in F \mid a_t' x = b_t\}$, $t \in T$, que, de hecho, son caras expuestas de F. Si $a_t \neq 0_n$ entonces diremos que $t \in T$ es un *índice propio*. Se dice que $t \in T$ ($a_t' x \geq b_t$) es un *índice portador* (*desigualdad portadora*) de σ cuando $F_t = F$. El *conjunto de índices portadores* lo denotaremos por T_c. Obviamente, si existe un cierto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_t' x > b_t$ para todo $t \in T$ entonces $T_c = \emptyset$. Tales puntos reciben el nombre de *puntos de Slater*.

Asociados al sistema σ se definen los llamados *primer y segundo cono de momentos*

$$M := \operatorname{cone}\{a_t,\, t \in T\} \quad \text{y} \quad N := \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\, t \in T\right\},$$

y el *cono característico*

$$K := \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\, t \in T;\, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Cualquier conjunto convexo cerrado no vacío $C \subset \mathbb{R}^n$ es la intersección de todos los semiespacios de soporte de C, de manera que C es el conjunto solución de un cierto sistema lineal σ de la forma (0.2). Tal sistema σ se llama *representación externa* de C. Llamaremos *cono de referencia* de C, y lo denotaremos por $K(C)$, a la clausura del cono característico de cualquier representación externa de C. Esta definición es independiente de la representación considerada, ya que dos representaciones lineales distintas del conjunto C son sistemas lineales equivalentes, y por lo tanto, las clausuras

de sus correspondientes conos característicos son iguales [19, Th. 5.10].

En ocasiones, asociados al sistema σ, definiremos un par de problemas parametrizados, cuyo parámetro, c, recorre $\mathbb{R}^n$. El primero de ellos es de Programación Semi-infinita Lineal (PSIL para abreviar), siendo el parámetro el gradiente del funcional objetivo:

$$P(c) \equiv \operatorname{Inf} c'x \quad s.a \quad x \in F.$$

Denotaremos por $F^*(c)$ el *conjunto óptimo* de $P(c)$ y por $v(c)$ su *valor óptimo*, con $v(c) = +\infty$ si $F = \emptyset$. Diremos que un punto $x^* \in F$ es una *solución fuertemente única* para $P(c)$ si existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $x \in F$, $c'x \geq c'x^* + \alpha \|x - x^*\|$. Obviamente, en este caso, $F^*(c) = \{x^*\}$.

El segundo problema es el dual de $P(c)$ (en el sentido de Haar), de modo que el parámetro es el vector de la derecha en el sistema de restricciones,

$$D(c) \equiv \operatorname{Sup} \sum_{t \in T} \lambda_t b_t \quad s.a \quad \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c,\ \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}.$$

Denotaremos por Ψ la función objetivo de $D(c)$, es decir, $\Psi : \mathbb{R}_+^{(T)} \to \mathbb{R}$ tal que $\Psi(\lambda) := \sum_{t \in T} \lambda_t b_t$, por $\Lambda(c)$ su conjunto factible, por $\Lambda^*(c)$ su conjunto óptimo y por $v_D(c)$ su valor óptimo, acordando que $v_D(c) = -\infty$ si $\Lambda(c) = \emptyset$. Llamaremos *salto de dualidad*, $\delta(c)$, a la diferencia entre el valor del problema primal y el del dual,

$$\delta(c) := v(c) - v_D(c),$$

que siempre es no negativo por el Teorema de Dualidad Débil.

Dado un sistema consistente σ, se dice que $a'x \geq b$ es una *consecuencia* de σ si la satisfacen todos los puntos de F, es decir, $a'z \geq b$ para todo $z \in F$. En relación con este concepto, el *Lema de Farkas extendido* [40] caracteriza las desigualdades lineales $a'x \geq b$ que son consecuencia de un sistema consistente σ como aquellas para las que se satisface

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \operatorname{cl} K.$$

Un caso particular es el *Lema de Farkas extendido para sistemas homogéneos* [19, Cor. 3.1.3] que dice que la desigualdad $a'x \geq 0$ es consecuencia del sistema

$\{a_t'x \geq 0,\ t \in T\}$ si, y sólo si, $a \in \operatorname{cl} M$.

En un sistema consistente, para cada $x \in F$, definimos el *conjunto de índices activos*

$$T(x) := \{t \in T \mid a_t'x = b_t\}$$

y el *cono de restricciones activas*

$$A(x) := \operatorname{cone}\{a_t,\ t \in T(x)\}$$

en el punto x.

Los resultados más importantes sobre los sistemas finitos de desigualdades lineales sólo son válidos para ciertas clases de sistemas infinitos.

Consideremos, por ejemplo, el Teorema de Weyl [38] que caracteriza los puntos extremos de F cuando $|T| < \infty$: $\overline{x} \in F$ es un punto extremo de F si, y sólo si, $\dim A(\overline{x}) = n$. En [1] se prueba que este resultado se cumple cuando $A(x)^o = D(F, x)$ para todo $x \in F$. Un sistema que satisface esta propiedad se dice que es *localmente poliédrico* (LOP). Para aquellos problemas PSIL

$$(P) \qquad \operatorname{Inf} c'x$$

$$s.a. \quad a_t'x \geq b_t,\ t \in T,$$

cuyo sistema de restricciones es LOP, se han propuesto extensiones del método simplex y del método del gradiente reducido [2].

El Teorema de Karush-Kuhn-Tucker para problemas PL establece que $\overline{x} \in F$ es una solución óptima de (P) si, y sólo si, $c \in A(\overline{x})$. En [31] se demuestra que esta afirmación también es cierta cuando cualquier desigualdad que defina un semiespacio soporte de F es también consecuencia de un subsistema finito de σ. Los sistemas que satisfacen esta propiedad se llaman *localmente Farkas-Minkowski* (LFM).

Para los sistemas LOP se verifica que F es cuasipoliédrico [19, Cor. 5.6.1] y, recíprocamente, todo cuasipoliedro admite una representación LOP [19, Th. 5.11]. Cualquier sistema finito es LOP y cualquier sistema LOP es LFM [19, Th. 5.7].

Un *sistema* σ es *continuo* cuando T es un espacio topológico compacto y Hausdorff y todos los coeficientes, $a_1(\cdot), \ldots, a_n(\cdot), b(\cdot)$, son continuos en T.

PROPOSICIÓN 0.14 *[19, Lem. 4.1(i)] Dado un sistema σ, se verifica la siguiente relación entre las clausuras de N y K:*

$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cl} N$ *si, y sólo si,* $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cl} K$.

PROPOSICIÓN 0.15 *Si $F \neq \emptyset$ es el conjunto solución de $\sigma = \{a_t' x \geq b_t,\ t \in T\}$ entonces se cumplen las siguientes proposiciones:*

(i) $\operatorname{rint} F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x > b_t,\ t \in T \backslash T_c;\ a_t' x = b_t,\ t \in T_c\}$ [19, Th. 5.1(i)]; *y*

(ii) $\dim F = n - \dim \operatorname{lin} \operatorname{cl} K$ [19, Th. 5.8].

PROPOSICIÓN 0.16 *[19, Cor. 5.1.1] Un sistema consistente σ tiene, al menos, un punto de Slater si, y sólo si, $T_c = \emptyset$.*

PROPOSICIÓN 0.17 *[19, Th. 5.9] Cualquier sistema LFM no trivial σ, satisface las siguientes propiedades:*

(i) $\dim F = n$ *si, y sólo si, ninguna combinación convexa de desigualdades no triviales de σ da lugar a la desigualdad trivial.*

(ii)

$$\dim F = n - \dim \operatorname{span} \{a_t,\ t \in T_c\}.$$

Además, si $T_c \neq \emptyset$, se tiene

$$\operatorname{aff} F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x = b_t,\ t \in T_c\}.$$

(iii) $\operatorname{rint} F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x > b_t,\ t \in T \backslash T_c;\ a_t' x = b_t,\ t \in T_c\}$.

PROPOSICIÓN 0.18 *[19, Th. 9.1(i)] Dado $\overline{x} \in F$, si $\dim A(\overline{x}) = n$ entonces $\overline{x}$ es punto extremo de F. Esta condición también es necesaria cuando σ es LOP.*

PROPOSICIÓN 0.19 *[19, Th. 9.3] Si $F \neq \emptyset$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *F es acotado;*

(ii) $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{int} K$;

(iii) $\operatorname{int} K = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a'x > b \text{ para todo } x \in F \right\}$;

(iv) $M = \mathbb{R}^n$; *y*

(v) *existe un subsistema finito de σ cuyo conjunto solución es acotado.*

PROPOSICIÓN 0.20 *[19, Th. A.11] Sea C un conjunto poliédrico de máxima dimensión en $\mathbb{R}^n$, y consideremos una representación lineal de C*

$$\{a_i' x \geq b_i,\ i = 1, \ldots, p\}. \tag{0.3}$$

Entonces se verifican las siguientes proposiciones:

(i) $\operatorname{bd} C = \bigcup_{i=1}^{p} H_i \cap C$, donde $H_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i' x = b_i\}$;

(ii) si X es una faceta de C, existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $X = H_j \cap C$; y

(iii) cada conjunto $H_i \cap C$ es una faceta de C si, y sólo si, (0.3) es una representación minimal de C (es decir un sistema sin restricciones redundantes).

Capítulo 1

Sistemas lineales generales en $\mathbb{R}^n$

1.1 Introducción

Los sistemas lineales más generales en $\mathbb{R}^n$ contienen un número arbitrario (posiblemente infinito) de restricciones de desigualdad débil (dos de las cuales reemplazan a una ecuación) y/o estricta, por lo que pueden escribirse en la forma

$$\sigma = \{a_t'x \geq b_t,\, t \in D;\, a_t'x > b_t,\; t \in E\}\,, \tag{1.1}$$

donde los conjuntos de índices, D y E, son disjuntos y no simultáneamente vacíos, $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T := D \cup E$. Denotaremos por F el conjunto solución de σ.

Los sistemas ordinarios de desigualdades lineales ($E = \emptyset$ y $|D| < \infty$) han sido ampliamente tratados en la literatura, debido a que están íntimamente relacionados con la teoría y los métodos de la Programación Lineal. Por lo que se refiere a los sistemas semi-infinitos lineales ($E = \emptyset$ y $D \neq \emptyset$ arbitrario), cuyo análisis da lugar a la fundamentación teórica de la Programación Semi-Infinita Lineal, son bien conocidos, por ejemplo, los teoremas de existencia de Zhu [40] y Fan [12], así como los trabajos de Eckhardt [11] y Goberna y López ([17] y [18]) acerca de la dimensión del conjunto de soluciones o los estudios sobre su envoltura afín o su interior y frontera relativos llevados a cabo por Goberna y López [17]. Más recientemente, han aparecido los

trabajos de Marchi et al. [23], Anderson et al. [1] y Goberna et al. [16] acerca de la estructura facial de dicho conjunto.

Los sistemas lineales con desigualdades estrictas ($E \neq \emptyset$) surgen, de forma natural, en problemas de separación, en optimización, en análisis de estabilidad y en muchos otros campos. De hecho, una familia de $m \geq 2$ conjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, $A_1, \ldots, A_m$, se dice que es estrictamente separable [5] si existen m semiespacios cerrados, $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$, tales que $A_j \subset \operatorname{int} \Sigma_j$, $j = 1, \ldots, m$, y $\bigcap_{j=1}^{m} \operatorname{int} \Sigma_j = \emptyset$, es decir, si, para cada $j = 1, \ldots, m$, existe una solución de $\sigma_j = \{a'x - x_{n+1} > 0,\ a \in A_j\}$, $\begin{pmatrix} c^j \\ d_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, con $c^j \neq 0_n$, tal que el sistema $\sigma_0 = \left\{(c^j)'\, x > d_j,\ j = 1, \ldots, m\right\}$ es inconsistente. Además, si $\bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} A_k \neq \emptyset$, $j = 1, \ldots, m$, entonces la inconsistencia de σ_0 se puede sustituir por $\sum_{j=1}^{m} \begin{pmatrix} c^j \\ d_j \end{pmatrix} = 0_{n+1}$ [5, Th. 2].

En particular, la búsqueda de un hiperplano que separe estrictamente a un par de conjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^n$, Y y Z, se puede formular como el sistema de desigualdades estrictas

$$\{y'x > x_{n+1},\ y \in Y;\ -z'x > -x_{n+1},\ z \in Z\},$$

donde la incógnita $\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ determina el vector de coeficientes del hiperplano de separación.

Por otra parte, si $A_0, A_1, \ldots, A_n$ son matrices simétricas dadas y la construcción del modelo de un cierto problema de optimización requiere que una combinación lineal de ellas, digamos $A(x) = A_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j A_j$, sea definida positiva, entonces esta restricción se puede formular como $\{s'A(x)\, s > 0,\ s \in S_n\}$.

Finalmente, un sistema semi-infinito lineal continuo $\{a_t'x \geq b_t,\, t \in T\}$ es estable (en los diferentes sentidos especificados en [19, Th. 6.9]) si, y sólo si, existe solución para el correspondiente sistema de desigualdades estrictas $\{a_t'x > b_t,\, t \in T\}$.

A pesar de la gran cantidad de aplicaciones que tienen, en potencia, los sistemas lineales con desigualdades estrictas, hasta ahora sólo se han dado teoremas de existencia para casos particulares. Así, son conocidos, el Teorema de Carver [10] y el Teorema de Transposición de Motzkin [29], ambos para sistemas finitos, y

los Teoremas de Gordan y Motzkin extendidos [20] para sistemas semi-infinitos homogéneos. Todos estos resultados son extendidos por el teorema de existencia que probaremos en la Sección 1.2, donde también se discutirá el cálculo numérico de una solución.

La Sección 1.3 muestra que los conjuntos de soluciones de los sistemas de desigualdades lineales de la forma (1.1), poseen buenas propiedades geométricas. En efecto, esta familia de conjuntos convexos (llamados "evenly convex" en [14]) captura la mayoría de las propiedades más notables de una subclase, los conjuntos cerrados convexos, que juega un papel crucial en la teoría y en las aplicaciones de la optimización.

La Sección 1.4 analiza las propiedades geométricas de F en términos de los coeficientes de su representación lineal σ.

Por último, en la Sección 1.5 demostramos que es posible tratar de modo efectivo problemas de optimización lineal con restricciones estrictas, extendiendo a esta clase de problemas PSIL resultados de optimalidad, unicidad fuerte y acotación del conjunto óptimo.

En este capítulo explotaremos la relación entre σ, como en (1.1), y su sistema relajado $\overline{\sigma} = \{a_t' x \geq b_t,\, t \in T\}$ (obtenido al sustituir $a_t' x > b_t$ por $a_t' x \geq b_t$ para todo $t \in E$). Obviamente, la consistencia de $\overline{\sigma}$ no implica la consistencia de σ (considérese, por ejemplo, el sistema $\sigma = \{0 < x < 0\}$ en $\mathbb{R}$).

PROPOSICIÓN 1.1 *Sea $\overline{\sigma}$ el sistema relajado de σ y sea $\overline{F}$ el conjunto solución de $\overline{\sigma}$. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) *Si $F \neq \emptyset$, entonces $\overline{F} = \operatorname{cl} F$.*

(ii) *Si $F = \emptyset$ y σ no contiene desigualdades triviales, entonces o $\overline{F} = \emptyset$ o $\dim \overline{F} < n$.*

Demostración. (i) Sea $x^1 \in F$. Si $\overline{x} \in \overline{F}$, entonces

$$(1-\lambda)\,\overline{x} + \lambda x^1 \in F,\ 0 < \lambda < 1, \tag{1.2}$$

de modo que

$$\overline{x} = \lim_{\lambda \to 0} \left[(1-\lambda)\,\overline{x} + \lambda x^1\right] \in \operatorname{cl} F.$$

Por lo tanto, $\overline{F} \subset \operatorname{cl} F$. La inclusión opuesta es trivial.

(ii) Supongamos que $F = \emptyset$, $\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \neq 0_{n+1}$ para todo $t \in T$ y $\overline{F} \neq \emptyset$.

Puesto que $\overline{\sigma}$ es consistente y $\{a_t' x > b_t,\ t \in T\}$ no tiene solución (es decir, no existe ningún punto de Slater para $\overline{\sigma}$), existe un $t \in T$ tal que $a_t' x = b_t$ para todo $x \in \overline{F}$ (Proposición 0.16), con $a_t \neq 0_n$ (en otro caso, tomando un $\overline{x} \in \overline{F}$ arbitrario, se obtiene $b_t = 0_n' \overline{x} = 0$, de modo que $\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = 0_{n+1}$). Por lo tanto, $a_t' x = b_t$ define un hiperplano que contiene a $\overline{F}$. ■

Obsérvese que, para $\sigma = \{0_n' x > 0\}$, $F = \emptyset$ y $\overline{F} = \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, la afirmación (ii) de la Proposición 1.1 podría fallar para sistemas que contengan desigualdades triviales.

1.2 Existencia de soluciones

PROPOSICIÓN 1.2 *Sea σ el sistema de (1.1).*

(i) *Si σ es consistente, entonces*

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{cl} \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\}. \tag{1.3}$$

Además, si $E \neq \emptyset$, entonces también se verifica la siguiente condición

$$0_{n+1} \notin \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in E \right\} + \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in D \right\}. \tag{1.4}$$

(ii) *Cada una de las siguientes condiciones garantiza la consistencia de σ:*

(ii.a) *$E = \emptyset$ y se verifica (1.3).*

(ii.b) *$E \neq \emptyset$, se verifican (1.3) y (1.4) y el conjunto de (1.4) es cerrado.*

Además, puede agregarse $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$ en los conjuntos generadores de los conos de (1.3) y (1.4).

Demostración. (i) Supongamos que

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cl} \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\}.$$

Entonces existe una sucesión $\left\{\begin{pmatrix} d^r \\ \delta_r \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\lim_r \begin{pmatrix} d^r \\ \delta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$ y

$$\begin{pmatrix} d^r \\ \delta_r \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ \lambda^r \in \mathbb{R}_+^{(T)},\ r = 1, 2, \ldots.$$

Puesto que σ es consistente, podemos tomar $x^0 \in F$. Entonces, se tiene

$$\begin{pmatrix} d^r \\ \delta_r \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x^0 \\ -1 \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t^r \left(a_t' x^0 - b_t\right) \geq 0,\ r = 1, 2, \ldots, \tag{1.5}$$

y, tomando límites en (1.5), se llega a la contradicción

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x^0 \\ -1 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Así pues, se verifica (1.3).

Supongamos ahora que $E \neq \emptyset$. Si

$$0_{n+1} \in \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in E\right\} + \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in D\right\},$$

entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $\sum_{t \in E} \lambda_t = 1$ y

$$0_{n+1} = \sum_{t \in E} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \sum_{t \in D} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}.$$

Tomando una solución arbitraria de σ, x^0, se tiene

$$0 = 0_{n+1}' \begin{pmatrix} x^0 \\ -1 \end{pmatrix} = \sum_{t \in E} \lambda_t \left(a_t' x^0 - b_t\right) + \sum_{t \in D} \lambda_t \left(a_t' x^0 - b_t\right) > 0.$$

Por lo tanto, se cumple (1.4).

(ii.a) Supongamos que $E = \emptyset$ y se cumple (1.3). Por la Proposición 0.13, existe un hiperplano en $\mathbb{R}^{n+1}$, $\overline{c}' \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \gamma$, con $\overline{c} = \begin{pmatrix} c \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, tal que $\overline{c}' \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma$ y $\overline{c}' \overline{v} > \gamma$ para todo $\overline{v} \in \operatorname{cl} \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in D\right\}$. La última condición implica que $\overline{c}' \overline{v} \geq 0 > \gamma$ para todo $\overline{v} \in \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in D\right\}$, en particular, $a_t' c + b_t c_{n+1} \geq 0$ para todo $t \in D$.

Puesto que $c_{n+1} = \gamma < 0$, definiendo $x^1 = |c_{n+1}|^{-1} c$, se tiene que $a_t' x^1 \geq b_t$ para todo $t \in D$, de manera que σ es consistente.

(ii.b) Supongamos ahora que $E \neq \emptyset$, se verifican (1.3) y (1.4) y el conjunto

$$A := \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in E\right\} + \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in D\right\}$$

es cerrado.

Puesto que $0_{n+1} \notin A$, por la Proposición 0.13, existe un vector $\begin{pmatrix} c \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\begin{pmatrix} c \\ c_{n+1} \end{pmatrix}' a > 0$ para todo $a \in A$. En particular, $\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \in A$ para todo $t \in E$, por lo que $a_t' c + b_t c_{n+1} > 0$, y $\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} \in A$ para todo $t \in E$, $s \in D$ y $\mu > 0$, de manera que

$$a_s' c + b_s c_{n+1} > -\frac{a_t' c + b_t c_{n+1}}{\mu}.$$

Por lo tanto, $a_t' c + b_t c_{n+1} > 0$ para todo $t \in E$ y $a_s' c + b_s c_{n+1} \geq 0$ para todo $s \in D$.

Sea $\overline{x}$ una solución de $\overline{\sigma}$ (sistema que satisface (ii.a) y, por tanto, es consistente) y consideremos el siguiente punto de $\mathbb{R}^n$:

$$\widehat{x} := \begin{cases} \dfrac{c}{|c_{n+1}|}, & \text{si} \quad c_{n+1} < 0 \\ c + \overline{x}, & \text{si} \quad c_{n+1} = 0 \\ 2\overline{x} + \dfrac{c}{c_{n+1}}, & \text{si} \quad c_{n+1} > 0 \end{cases}.$$

Realizando sencillos cálculos algebraicos, se demuestra que $\widehat{x} \in F$, por lo que σ es consistente.

Finalmente, veremos que en (1.4) se puede sustituir $\operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in D\right\}$ por $\operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in D;\ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ (el equivalente en (1.3) se obtiene directamente de la Proposición 0.14).

En primer lugar, para probar (i), consideramos σ consistente, $E \neq \emptyset$ y

$$0_{n+1} \in \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in E\right\} + \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in D;\ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Entonces,

$$0_{n+1} = \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $\sum_{t\in E} \lambda_t = 1$ y $\mu > 0$ (ya que $\mu = 0$ contradice (1.4)). De (1.6) se deduce que

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{t\in T} \frac{\lambda_t}{\mu} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\},$$

lo que contradice (1.3). Por lo tanto, se verifica

$$0_{n+1} \notin \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in E \right\} + \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in D;\ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{1.7}$$

Por otro lado, si suponemos que $E \neq \emptyset$ y se cumple (1.7), siendo cerrado el conjunto del segundo miembro, aplicando (ii.b), se tiene que el sistema

$$\{a_t' x > b_t,\ t \in E;\ a_t' x \geq b_t,\ t \in D;\ 0_n' x \geq -1\}$$

es consistente y, por lo tanto, σ es consistente. ■

Obsérvese que si $|T| < \infty$, se cumple la hipótesis de clausura de la condición (ii.b) y, a partir de esta versión de la Proposición 1.2, se prueba el Teorema de Transposición de Motzkin [29], que fue utilizado por el propio Motzkin (1951) y por Slater (1951) para probar el Teorema de Dualidad de la Programacion Lineal.

COROLARIO 1.3 *Dadas las matrices $A\,(m \times n)$ y $C\,(p \times n)$, y los vectores $b \in \mathbb{R}^m$ y $d \in \mathbb{R}^p$, el sistema $\{Ax < b;\ Cx \leq d\}$ es consistente si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones siguientes:*

(i) *si $y'A + z'C = 0_n'$, $y \geq 0_m$ y $z \geq 0_p$, entonces $y'b + z'd \geq 0$.*

(ii) *si $y'A + z'C = 0_n'$, $y \geq 0_m$, $y \neq 0_m$ y $z \geq 0_p$, entonces $y'b + z'd > 0$.*

Demostración. La prueba del directo es trivial.

Supongamos ahora que $\{Ax < b;\ Cx \leq d\}$ es inconsistente y probaremos que falla (i) o (ii).

Denotemos las columnas de A' por $a_1, \ldots, a_m$ y las columnas de C' por $a_{m+1}, \ldots, a_{m+p}$. Denotemos también por $b_1, \ldots, b_m$ las componentes de b y por $b_{m+1}, \ldots, b_{m+p}$ las componentes de d. Entonces

$$\{Ax < b;\ Cx \leq d\} = \{a_i' x < b_i,\ i = 1, \ldots, m;\ a_i' x \leq b_i,\ i = m+1, \ldots, m+p\}.$$

Si falla (1.3), podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m+p} \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m+p.$$

Definiendo $y' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ y $z' = (\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_{m+p})$, se tiene $y \geq 0_m$, $z \geq 0_p$, $A'y + C'z = 0_n$ e $y'b + z'd = -1$, por lo que falla (i).

Alternativamente, si falla (1.4), podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m+p} \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m+p.$$

Definiendo y y z como antes, se tiene ahora $y \geq 0_m$, $y \neq 0_m$, $z \geq 0_p$, $A'y + C'z = 0_n$ e $y'b + z'd = 0$, por lo que falla (ii). ■

Si en el sistema (1.1) consideramos el caso particular $E = \emptyset$, entonces la Proposición 1.2 coincide con los teoremas de existencia de Zhu y Fan. En el caso de que sea $D = \emptyset$ ($T = E$), (1.4) se convierte, simplemente, en

$$0_{n+1} \notin \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\}, \tag{1.8}$$

y este conjunto es cerrado si T es compacto y a_t y b_t son funciones continuas (en particular si $|T| < \infty$). A partir de esta versión de la Proposición 1.2 se demuestra, de forma análoga al Corolario 1.3, el Teorema de Carver [10].

COROLARIO 1.4 *Dada la matriz $A\,(m \times n)$ y el vector $b \in \mathbb{R}^m$, el sistema $\{Ax < b\}$ es consistente si, y sólo si, la única solución de $\{A'y = 0_n,\ b'y \leq 0,\ y \geq 0_m\}$ es la trivial.*

Por otra parte, si σ es un sistema semi-infinito lineal continuo, el conjunto $\operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\}$ es cerrado y la condición (1.8) caracteriza la estabilidad de este tipo de sistemas [21].

Otro caso particular que debemos considerar es que σ en (1.1) sea homogéneo, en cuyo caso, la Proposición 1.2 se convierte en el Teorema de Motzkin extendido [19, Th. 3.5] si $E \neq \emptyset$ y en el Teorema de Gordan extendido [19, Th. 3.2] si $D = \emptyset$.

El siguiente ejemplo muestra que la hipótesis de clausura de la condición (ii.b) de la Proposición 1.2 no es superflua.

EJEMPLO 1.5 Considérese el sistema de desigualdades estrictas en $\mathbb{R}^2$

$$\sigma = \left\{ tx_1 + x_2 > -t^2,\ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\};\ -x_2 > 0\ \ (t=0) \right\}.$$

Se cumple (1.3) porque 0_2 es solución de $\overline{\sigma}$. Si fallase (1.4), entonces podríamos escribir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{t\neq 0} \lambda_t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -t^2 \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(\mathbb{R})}$ y $\sum\limits_{t\in\mathbb{R}} \lambda_t = 1$. Comparando las terceras componentes de ambos miembros de (1.9), se obtiene $\lambda_t = 0$ para todo $t \neq 0$, de manera que $\lambda_0 = 0$ y $\sum\limits_{t\in\mathbb{R}} \lambda_t = 0$ (contradicción). Así pues, también se cumple (1.4).

Supongamos ahora que $x \in \mathbb{R}^n$ satisface $tx_1 + x_2 > -t^2$ para todo $t \neq 0$. Tomando límites cuando t tiende a cero, se obtiene $x_2 \geq 0$, de modo que σ es inconsistente.

Por lo tanto, σ satisface (1.3) y (1.4) a pesar de que carece de soluciones.

Se puede comprobar que, en este caso,

$$\operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in E \right\} = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -t^2 \end{pmatrix},\ t \neq 0 \right\}$$

no es cerrado, ya que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{t\to 0} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

pero

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -t^2 \end{pmatrix},\ t \neq 0 \right\}.$$

Diremos que el sistema σ de (1.1) es un *sistema general fuertemente inconsistente* si posee algún subsistema finito inconsistente y es un *sistema general asintóticamente inconsistente* si es inconsistente y todos sus subsistemas finitos son consistentes. Para esta clasificación de los sistemas generales inconsistentes se obtienen los siguientes resultados como consecuencia de la Proposición 1.2.

COROLARIO 1.6 *Sea σ el sistema de (1.1).*

(i) *Si σ es fuertemente inconsistente, entonces*

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T \right\} \tag{1.10}$$

o bien

$$0_{n+1} \in \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in E \right\} + \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in D \right\}. \tag{1.11}$$

En particular, si $E = \emptyset$, se cumple (1.10).

(ii) *Cada una de las siguientes condiciones garantiza la inconsistencia fuerte de σ:*
(ii.a) *Se verifica (1.10).*
(ii.b) *$E \neq \emptyset$ y se verifica (1.11).*

Demostración. (i) Supongamos que σ es fuertemente inconsistente. Entonces existe $S \subset T$ finito tal que

$$\{a_t' x \geq b_t,\ t \in S \cap D;\ a_t' x > b_t,\ t \in S \cap E\}$$

es inconsistente.

Por el apartado (ii.a) de la Proposición 1.2, si $E = \emptyset$ se cumple

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in S \right\} \tag{1.12}$$

y, por lo tanto, se verifica (1.10).

Si $E \neq \emptyset$, aplicando el apartado (ii.b) de la misma proposición, se obtiene (1.12) (y, por lo tanto, (1.10)) o bien

$$0_{n+1} \in \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in S \cap E \right\} + \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in S \cap D \right\}$$

y, por lo tanto, (1.11).

(ii.a) Supongamos que se cumple (1.10). Entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Tomando el sistema

$$\widehat{\sigma} = \{a_t' x \geq b_t,\ t \in (\operatorname{supp} \lambda) \cap D;\ a_t' x > b_t,\ t \in (\operatorname{supp} \lambda) \cap E\}$$

y aplicando a $\widehat{\sigma}$ el apartado (i) de la Proposición 1.2, (1.13) implica la inconsistencia de $\widehat{\sigma}$, por lo que σ es fuertemente inconsistente.

(ii.b) Supongamos que $E \neq \emptyset$ y que se cumple (1.11). Entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $\sum_{t\in E} \lambda_t = 1$ y

$$0_{n+1} = \sum_{t\in E} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \sum_{t\in D} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Del mismo modo que en (ii.a), (1.14) implica que $\widehat{\sigma}$ es inconsistente y, por lo tanto, σ es fuertemente inconsistente. ■

COROLARIO 1.7 *Sea σ el sistema de (1.1).*

(i) *Si $E = \emptyset$, σ es asintóticamente inconsistente si, y sólo si,*

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \left[\operatorname{cl}\operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T\right\}\right] \setminus \left[\operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T\right\}\right]. \tag{1.15}$$

(ii) *Si $E \neq \emptyset$, se cumple (1.15) y*

$$0_{n+1} \notin \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in E\right\} + \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in D\right\}, \tag{1.16}$$

entonces σ es asintóticamente inconsistente.

El recíproco se cumple si el conjunto de (1.16) es cerrado.

Demostración. (i) Es consecuencia de la Proposición 1.2 y del Corolario 1.6.

(ii) Supongamos que $E \neq \emptyset$ y se cumplen (1.15) y (1.16).

La condición (1.15) implica que σ es inconsistente (Proposición 1.2 (i)). Por otra parte, si se cumplen (1.15) y (1.16), entonces no se cumplen ni (1.10) ni (1.11), por lo que σ no puede ser fuertemente inconsistente.

Para probar el recíproco, supongamos que σ es asintóticamente inconsistente y que el conjunto de (1.16) es cerrado. Dado que σ no es fuertemente inconsistente, no se cumplen ni (1.10) ni (1.11) (Corolario 1.6), lo que implica que se cumplen (1.15) y (1.16). En efecto, si no se cumpliese (1.15), al no cumplirse tampoco (1.10), se tendría

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{cl}\operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T\right\}$$

y, por el apartado (ii.b) de la Proposición 1.2, σ sería consistente. ■

Nótese que, al igual que en la Proposición 1.2, se puede añadir $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$ a los generadores de los conos de (1.10), (1.11), (1.15) y (1.16).

La condición de clausura del Corolario 1.7 no es superflua. Así, en el Ejemplo 1.5, σ es asintóticamente inconsistente, se cumple (1.16), pero no se cumple (1.15).

COROLARIO 1.8 *Sea σ el sistema de (1.1). Si σ es inconsistente y el sistema homogéneo asociado a σ, $\sigma_0 = \{a_t'x \geq 0,\ t \in D;\ a_t'x > 0,\ t \in E\}$, tiene una solución estricta, entonces σ es asintóticamente inconsistente.*

Demostración. Si σ fuese fuertemente inconsistente, entonces, por el Corolario 1.6, debería cumplirse (1.10) o bien (1.11).

Si se cumple (1.10), entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}.$$

Si x es una solución estricta de σ_0, multiplicando la igualdad anterior por $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, se obtiene

$$\sum_{t \in T} \lambda_t \left(a_t'x\right) = \left(\sum_{t \in T} \lambda_t a_t\right)' x = 0_n'x = 0, \tag{1.17}$$

y esto implica $\lambda_t = 0$ para todo $t \in T$, puesto que $a_t'x$ es siempre estrictamente positivo. Este hecho contradice la igualdad $\sum_{t \in T} \lambda_t b_t = 1$.

Por otra parte, si no se cumple (1.10), deberá cumplirse (1.11), lo que implica que existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ tal que $\sum_{t \in E} \lambda_t = 1$ y

$$0_{n+1} = \sum_{t \in T} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}.$$

Multiplicando esta igualdad por $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, se obtiene, de nuevo, (1.17) y $\lambda_t = 0$ para todo $t \in T$, lo que se contradice con la igualdad $\sum_{t \in E} \lambda_t = 1$. ■

En [19] se realiza una clasificación de los sistemas semi-infinitos lineales inconsistentes según acepten o no soluciones extendidas. Se definen dos tipos de soluciones extendidas, las soluciones asintóticas y las soluciones polinomiales.

Se dice que una sucesión $\{x^r\} \subset \mathbb{R}^n$ es una solución asintótica del sistema $\overline{\sigma} = \{a_t' x \geq b_t,\ t \in T\}$ si, para todo $t \in T$,

$$\liminf_r\ a_t' x^r \geq b_t,$$

donde se permite $+\infty$ como límite.

Se dice que $p = (p_1, \ldots, p_n)' \in (\mathbb{R}[y])^n$ es una solución polinomial de $\overline{\sigma}$ si, para todo $t \in T$,

$$a_t' p := \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, p_i \geq b_t$$

(con respecto del orden lexicográfico de $\mathbb{R}[y]$).

En [19, Th. 4.3] se establece, para un sistema semi-infinito lineal $\overline{\sigma}$, la equivalencia entre la existencia de ambos tipos de soluciones extendidas y la consistencia de todo subsistema finito de $\overline{\sigma}$. A los sistemas inconsistentes que cumplen estas condiciones equivalentes se les da el nombre de asintóticamente inconsistentes y a los que no las cumplen fuertemente inconsistentes.

Para sistemas con desigualdades estrictas, se pueden definir, de forma análoga, las soluciones asintóticas y polinomiales, aunque, en este caso, no se produce la mencionada equivalencia (véase Ejemplo 1.9). Sin embargo, con las definiciones dadas de sistemas generales asintótica y fuertemente inconsistentes, los Corolarios 1.6 y 1.7 subsumen las caracterizaciones de la inconsistencia fuerte y asintótica dadas en [19, Th. 4.4] y el Corolario 1.8 extiende el resultado obtenido para sistemas semi-infinitos lineales en [19, Cor. 4.4.1].

EJEMPLO 1.9 Considérese el sistema $\sigma = \{x_2 \geq -r^{-1},\ r \in \mathbb{N};\ -x_2 > 0\}$ en $\mathbb{R}^2$.

Toda solución de $\{x_2 \geq -r^{-1},\ r \in \mathbb{N}\}$ cumple la restricción $x_2 \geq 0$, por lo que σ es un sistema inconsistente. Además, cualquier subsistema finito de σ es consistente, de modo que σ es un sistema general asintóticamente inconsistente.

Sin embargo, σ no posee soluciones asintóticas ni polinomiales. En efecto, si $\left\{x^k\right\} \subset \mathbb{R}^2$ fuese solución asintótica de σ, se cumpliría

$$\liminf_k\ x_2^k \geq -r^{-1}, \text{ para todo } r \in \mathbb{N}, \tag{1.18}$$

y

$$\liminf_k\ -x_2^k > 0.$$

Puesto que

$$\liminf_k -x_2^k = -\limsup_k x_2^k \leq -\liminf_k x_2^k,$$

se tiene $\liminf_k x_2^k < 0$, por lo que deberá existir un $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\liminf_k x_2^k < -r^{-1} < 0,$$

lo que se contradice con (1.18).

Por otra parte, si $p = (p_1, p_2)' \in (\mathbb{R}[y])^2$ fuese una solución polinomial de σ, entonces

$$p_2 \geq -r^{-1}, \text{ para todo } r \in \mathbb{N}, \tag{1.19}$$

y

$$-p_2 > 0$$

(con respecto del orden lexicográfico de $\mathbb{R}[y]$).

El polinomio p_2 debe tener grado mayor o igual que uno (ya que, en caso contrario, σ sería consistente) y coeficiente de mayor grado negativo (ya que $-p_2 > 0$). Sin embargo, en esas condiciones, no se cumple (1.19), por lo que p no puede ser solución polinomial de σ.

El siguiente resultado proporciona el método natural de decidir si σ es consistente o no, y de calcular una solución de σ en el primer caso. Para ello, asociamos a σ el siguiente problema PSIL:

$$\begin{array}{lll} (P_\sigma) & \text{Inf} & x_{n+1} \\ & \text{s.a.} & a_t' x + x_{n+1} \geq b_t, \, t \in E \\ & & a_t' x \geq b_t, \, t \in D. \end{array}$$

PROPOSICIÓN 1.10 *Sea σ el sistema de (1.1). Entonces, se verifican las siguientes condiciones:*

(i) *Si $v(P_\sigma) < 0$, entonces σ es consistente.*

(ii) *Si $v(P_\sigma) > 0$, entonces σ es inconsistente.*

(iii) *Si $v(P_\sigma) = 0$ y (P_σ) es no resoluble, entonces σ es inconsistente.*

Demostración. (i) Sea $\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{x}_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $a_t' \widehat{x} + \widehat{x}_{n+1} \geq b_t$ para todo $t \in E$, $a_t' \widehat{x} \geq b_t$ para todo $t \in D$ y $\widehat{x}_{n+1} < 0$. Entonces $\widehat{x}$ es solución de σ.

(ii) Si $\overline{x}$ es una solución de $\overline{\sigma}$, entonces $\begin{pmatrix}\overline{x}\\0\end{pmatrix}$ es una solución factible de (P_σ), de modo que $v\,(P_\sigma) \leq 0$. Por lo tanto, $v\,(P_\sigma) > 0$ implica la inconsistencia de $\overline{\sigma}$ (y de σ).

(iii) Si $v\,(P_\sigma) = 0$ y $\widehat{x}$ es una solución de σ, entonces $\begin{pmatrix}\widehat{x}\\0\end{pmatrix}$ es una solución óptima de (P_σ). ■

Si $v\,(P_\sigma) = 0$ y (P_σ) es resoluble, existe una solución óptima de (P_σ) que se puede escribir como $\begin{pmatrix}\overline{x}\\0\end{pmatrix}$. Entonces $\overline{x}$ es solución de $\overline{\sigma}$. Sin embargo, σ no es necesariamente consistente.

El sistema del Ejemplo 1.5 ilustra el caso dudoso: $v\,(P_\sigma) = 0$ con (P_σ) resoluble. En efecto, tomando límites cuando $t \to 0$ en $tx_1 + x_2 + x_3 \geq -t^2$, $t \neq 0$, se obtiene $x_2 + x_3 \geq 0$. La otra restricción es $-x_2 + x_3 \geq 0$, de modo que $x_3 \geq 0$ para toda solución factible de (P_σ). Puesto que 0_3 es solución factible, $v\,(P_\sigma) = 0$ y 0_3 es una solución óptima de (P_σ). En este caso σ es inconsistente.

1.3 Conjuntos linealizables

Se dice que un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es *linealizable* ("evenly convex set" en [14]) si es intersección de una cierta familia de semiespacios abiertos. Puesto que esta familia puede ser vacía, $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son conjuntos linealizables. Por otra parte, puesto que cualquier semiespacio cerrado es intersección de una infinidad de semiespacios abiertos, C es linealizable si, y sólo si, C es el conjunto de soluciones de un cierto sistema de desigualdades lineales de la forma (1.1). En particular, cualquier conjunto convexo cerrado es linealizable.

De acuerdo con (1.2), si C es un conjunto linealizable, $x^1 \in C$ y $x^2 \in \operatorname{cl} C$, entonces $]x^1, x^2[\subset C$ (compárese con la prueba de la afirmación 3.5 de [14]). El siguiente resultado proporciona nuevas caracterizaciones de los conjuntos linealizables que complementan las dadas en [14]. Las afirmaciones (ii), (iv) y (vi)-(ix) fueron conjeturadas por el Prof. Martínez Legaz (comunicación privada).

PROPOSICIÓN 1.11 *Dado un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\emptyset \neq C \neq \mathbb{R}^n$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *C es linealizable;*

(ii) *C es la intersección de una cierta familia no vacía de conjuntos convexos abiertos no vacíos;*

(iii) *C es un conjunto convexo y para cada $x \in \mathbb{R}^n \backslash C$ existe un hiperplano H tal que $x \in H$ y $H \cap C = \emptyset$;*

(iv) *C es un conjunto convexo y es intersección de una familia de complementos de hiperplanos;*

(v) *C es el resultado de eliminar de un cierto conjunto cerrado convexo la unión de una familia (posiblemente vacía) de sus caras expuestas;*

(vi) *C es un conjunto convexo y para cualquier conjunto convexo $K \subset (\operatorname{cl} C) \backslash C$, existe un hiperplano que contiene a K y que no corta a C;*

(vii) *C es un conjunto convexo y para cualquier conjunto convexo $K \subset (\operatorname{cl} C) \backslash C$, la cara expuesta minimal (en $\operatorname{cl} C$) que contiene a K no corta a C;*

(viii) *C es un conjunto convexo y para cualquier $x \in (\operatorname{cl} C) \backslash C$, la cara expuesta minimal (en $\operatorname{cl} C$) que contiene a x no corta a C; y*

(ix) *C es un conjunto convexo y para cada $x \in (\operatorname{cl} C) \backslash C$ existe un hiperplano H que soporta a $\operatorname{cl} C$ en x y tal que $H \cap C = \emptyset$.*

Además, cuando C es linealizable, las únicas caras de $\operatorname{cl} C$ que pueden ser componentes conexas de $(\operatorname{cl} C) \backslash C$ son las expuestas.

Demostración. Probaremos que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) y (i) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (vii) $\Rightarrow$ (viii) $\Rightarrow$ (ix) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Es trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea $C = \bigcap_{t \in T} C_t$, con $\{C_t,\ t \in T\}$ una familia no vacía de conjuntos convexos abiertos no vacíos. Entonces C es un conjunto convexo y dado $x \in \mathbb{R}^n \backslash C$, existe $t \in T$ tal que $x \notin C_t$.

Puesto que C_t es un conjunto convexo abierto no vacío y $\{x\}$ es un conjunto afín que no corta a C_t, podemos aplicar la Proposición 0.12 para obtener un hiperplano H que contiene a x y que no corta a C_t y, por lo tanto, tampoco a C.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Por hipótesis, dado $t \in T := \mathbb{R}^n \backslash C$, existe un hiperplano H_t tal que $t \in H_t$ y $H_t \cap C = \emptyset$. Por lo tanto,

$$C \subset \bigcap_{t \in T} (\mathbb{R}^n \backslash H_t) \tag{1.20}$$

y

$$\mathbb{R}^n \backslash C = T \subset \bigcup_{t \in T} H_t. \tag{1.21}$$

De (1.21), y aplicando las Leyes de De Morgan, se obtiene la igualdad en (1.20).

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sea $C = \bigcap_{t \in T} (\mathbb{R}^n \backslash H_t)$, con $H_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x = b_t\}$, $a_t \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}$ y $b_t \in \mathbb{R}$, para todo $t \in T$. Puesto que C es un conjunto convexo y, para cada $t \in T$, $C \subset \mathbb{R}^n \backslash H_t$, C estará contenido en uno de los semiespacios abiertos asociados con H_t. Así pues, podemos suponer, sin pérdida de generalidad,

$$C \subset \bigcap_{t \in T} \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x > b_t\}. \tag{1.22}$$

Por otra parte, si $\overline{x} \notin C$, existe $s \in T$ tal que $\overline{x} \notin \mathbb{R}^n \backslash H_s$ o, lo que es lo mismo, $a_s' \overline{x} = b_s$. Por lo tanto, $\overline{x} \notin \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_s' x > b_s\}$ y se obtiene la igualdad en (1.22).

(i) $\Rightarrow$ (v) Sea C el conjunto de soluciones de $\sigma = \{a_t' x > b_t,\ t \in T\}$ y sea $\overline{\sigma}$ su correspondiente sistema relajado. El conjunto de soluciones de $\overline{\sigma}$ es $\overline{F} = \operatorname{cl} C$ (por la Proposición 1.1). Dado $t \in T$, el conjunto $X_t := \left\{x \in \overline{F} \mid a_t' x = b_t\right\}$ es una cara expuesta de $\operatorname{cl} C$ (posiblemente vacía). Además,

$$C = \overline{F} \backslash \left[\bigcup_{t \in T} X_t \right].$$

(v) $\Rightarrow$ (vi) Sea X un conjunto convexo cerrado y sea $\{X_t,\ t \in E\}$ una familia de caras expuestas de X tal que

$$C = X \backslash \left[\bigcup_{t \in E} X_t \right].$$

Puesto que $X_t \neq X$ para todo $t \in E$ (en caso contrario $C = \emptyset$), por la Proposición 0.11, $\bigcup_{t \in E} X_t \subset \operatorname{rbd} X$ y se obtiene

$$\operatorname{rint} X = X \backslash (\operatorname{rbd} X) \subset C \subset X. \tag{1.23}$$

Tomando clausuras en (1.23), se concluye que, en realidad, $X = \operatorname{cl} C$, de manera que

$$C = (\operatorname{cl} C) \setminus \left[\bigcup_{t \in E} X_t \right]. \tag{1.24}$$

Sea $K \subset (\operatorname{cl} C) \backslash C$ un conjunto convexo no vacío (si $K = \emptyset$, cualquier hiperplano

que no corte a C contiene a K) y sea $\overline{x} \in \operatorname{rint} K$. Entonces, existe $t \in E$ tal que $\overline{x} \in X_t$ de manera que X_t es una cara de $\operatorname{cl} C$ que corta a $\operatorname{rint} K$ y, por la Proposición 0.10, $K \subset X_t$. Dado que X_t es una cara expuesta de $\operatorname{cl} C$, existe un hiperplano H tal que $X_t = H \cap \operatorname{cl} C$ y, por lo tanto, $K \subset H$ y

$$H \cap C = H \cap [(\operatorname{cl} C) \cap C] = X_t \cap C = \emptyset. \tag{1.25}$$

(vi) $\Rightarrow$ (vii) Sea $K \subset (\operatorname{cl} C) \setminus C$ un conjunto convexo y sea X la cara expuesta minimal tal que $K \subset X$.

Por hipótesis, existe un hiperplano H tal que $K \subset H$ y $H \cap C = \emptyset$. Si tomamos $Y = H \cap \operatorname{cl} C \neq \emptyset$ (ya que $K \subset Y$), Y es una cara expuesta que contiene a K, por lo que $X \subset Y$ y, dado que

$$Y \cap C = (H \cap \operatorname{cl} C) \cap C = H \cap C = \emptyset,$$

$X \cap C = \emptyset$.

(vii) $\Rightarrow$ (viii) Es trivial, ya que (viii) es un caso particular de (vii).

(viii) $\Rightarrow$ (ix) Sea $x \in (\operatorname{cl} C) \setminus C$ y sea X la cara expuesta minimal (en $\operatorname{cl} C$) que contiene a x.

Por ser X cara expuesta de $\operatorname{cl} C$, existe un hiperplano H tal que $\operatorname{cl} C$ está contenido en uno de los semiespacios cerrados asociados a H y $X = H \cap \operatorname{cl} C$, por lo que $x \in H$ y H soporta a $\operatorname{cl} C$ en x. Además, dado que, por hipótesis, $X \cap C = \emptyset$, razonando como en (1.25), se tiene

$$H \cap C = \emptyset.$$

(ix) $\Rightarrow$ (i) Por ser C un conjunto convexo, $\operatorname{cl} C$ es un conjunto convexo cerrado y, por lo tanto, es el conjunto solución de un cierto sistema semi-infinito lineal $\{a_t' x \geq b_t,\ t \in U\}$.

Por otra parte, dado $t \in E := (\operatorname{cl} C) \setminus C$, por hipótesis, existe un hiperplano $H_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x = b_t\}$, con $a_t \neq 0_n$ y $b_t \in \mathbb{R}$, que soporta a $\operatorname{cl} C$ en t y tal que $H_t \cap C = \emptyset$, es decir, $a_t' x \geq b_t$ para todo $x \in \operatorname{cl} C$, $a_t' x > b_t$ para todo $x \in C$ y $a_t' t = b_t$.

Definiendo $T := U \cup E$, está claro que $\operatorname{cl} C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x \geq b_t,\ t \in T\}$. Sea $D = T \backslash E$. Probaremos que σ, en (1.1), es una representación lineal de C.

Si $x \in C$, $a_t' x \geq b_t$ para todo $t \in T$ (puesto que $x \in \operatorname{cl} C$), con $a_t' x > b_t$ para todo $t \in E$, de manera que x es solución de σ.

Recíprocamente, si x es solución de σ, entonces $x \in \operatorname{cl} C$ (puesto que $a_t' x \geq b_t$ para todo $t \in T$). Supongamos $x \in (\operatorname{cl} C) \setminus C = E$. Entonces, existe $t \in E$ tal que $t = x$ y $a_t' x = a_t' t = b_t$, lo que se contradice con el hecho de que x sea solución de σ. Así pues, $x \in C$.

Supongamos ahora que (1.1) es una representación lineal de C y que $X \neq \emptyset$ es una cara de $\operatorname{cl} C$ contenida en $(\operatorname{cl} C) \setminus C$. Suponiendo que X no es expuesta, probaremos que existe un arco contenido en $(\operatorname{cl} C) \setminus C$ que une un punto de X con otro punto no perteneciente a X, por lo que X no podrá ser una componente conexa de $(\operatorname{cl} C) \setminus C$.

Tomemos $\overline{x} \in \operatorname{rint} X$ arbitrariamente. De acuerdo con la Proposición 0.6, existen $\{x^1, \ldots, x^p\} \subset X$ y escalares positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tales que

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x^i,\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1 \text{ y } \operatorname{aff}\left\{x^1, \ldots, x^p\right\} = \operatorname{aff} X.$$

Si fuese $a_t' \overline{x} = b_t$, con $t \in T$, se tendría $b_t = a_t' \overline{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left(a_t' x^i\right)$ y, dado que $a_t' x^i \geq b_t$, $i = 1, \ldots, p$ (al ser $x^i \in X$, $i = 1, \ldots, p$), esto sólo es posible si $a_t' x^i = b_t$, $i = 1, \ldots, p$. Si $x \in \operatorname{aff} X$, también se puede escribir $x = \sum_{i=1}^{p} \beta_i x^i$ para ciertos escalares $\beta_1, \ldots, \beta_p$ tales que $\sum_{i=1}^{p} \beta_i = 1$, por lo que $a_t' x = b_t$ para todo $x \in \operatorname{aff} X$, es decir, $\operatorname{aff} X \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x = b_t\}$.

Estamos suponiendo $\overline{x} \in \operatorname{rint} X \subset X \subset (\operatorname{cl} C) \setminus C$, de manera que $\overline{x}$ es solución de $\overline{\sigma}$, pero no de σ. Deberá cumplirse, por lo tanto, $a_t' \overline{x} = b_t$ para cierto $t \in E$, con $X \subset \operatorname{aff} X \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x = b_t\}$. Como estamos suponiendo que X es cara no expuesta de $\operatorname{cl} C$, deberá existir un punto $x^t \in (\operatorname{cl} C) \setminus X$ tal que $a_t' x^t = b_t$. Entonces cualquier $x \in [\overline{x}, x^t] \subset \operatorname{cl} C$ satisface $a_t' x = b_t$, por lo que x no es solución de σ y $x \notin C$. Así pues, $[\overline{x}, x^t] \subset (\operatorname{cl} C) \setminus C$. Este segmento es el arco buscado. ■

Como consecuencia de la Proposición 1.11 y de la Proposición 0.12, cualquier conjunto convexo relativamente abierto es linealizable. Análogamente, cualquier

conjunto estrictamente convexo (es decir, un conjunto convexo C tal que $\operatorname{bd}\operatorname{cl} C$ no contiene segmentos) es linealizable puesto que todas las caras expuestas propias de C son singulares. Obsérvese, además, que cualquier conjunto convexo $X \neq \emptyset$ está encajado entre dos conjuntos linealizables, $\operatorname{rint} X$ y $\operatorname{cl} X$, a distancia Hausdorff nula de X.

COROLARIO 1.12 *Si C es un conjunto linealizable no cerrado, entonces $(\operatorname{cl} C)\setminus C$ no puede ser la unión de una familia de caras no expuestas de $\operatorname{cl} C$.*

Demostración. De acuerdo con la Proposición 1.11, bastará probar que ninguna unión no vacía de caras no expuestas de $\operatorname{cl} C$ es igual a una unión de caras expuestas de $\operatorname{cl} C$. De hecho, probaremos que dos familias disjuntas de caras no vacías de un conjunto convexo cerrado no pueden tener uniones iguales.

Sea X un conjunto convexo cerrado y sean $\{X_u,\ u \in U\}$ y $\{X_v,\ v \in V\}$ dos familias disjuntas de caras no vacías de X.

Supongamos que $\bigcup\limits_{u\in U} X_u = \bigcup\limits_{v\in V} X_v$.

Dado $u_1 \in U$, existe $x \in \operatorname{rint} X_{u_1} \subset \bigcup\limits_{v\in V} X_v$, de manera que existe $v_1 \in V$ tal que $x \in X_{v_1}$ y $(\operatorname{rint} X_{u_1}) \cap X_{v_1} \neq \emptyset$. Entonces, de acuerdo con la Proposición 0.10, $X_{u_1} \subset X_{v_1}$, inclusión que resulta ser estricta por ser $\{X_u,\ u \in U\}\cap\{X_v,\ v \in V\} = \emptyset$. Por lo tanto, $\dim X_{u_1} < \dim X_{v_1}$. Razonando del mismo modo se tiene que, dado $v_1 \in V$, existe $u_2 \in U$ tal que $\dim X_{v_1} < \dim X_{u_2}$.

Por inducción, se obtienen dos sucesiones $\{u_k\} \subset U$ y $\{v_k\} \subset V$ tales que

$$\dim X_{u_k} < \dim X_{v_k} < \dim X_{u_{k+1}},\ k = 1, 2, \ldots.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_k \dim X_{u_k} = +\infty$, contradiciendo que $\dim X_u \leq n$ para todo $u \in U$. ■

EJEMPLO 1.13 Consideremos el conjunto convexo cerrado

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid tx_1 + (1-t)x_2 \geq t - t^2,\ t \in [0,1]\right\} \tag{1.26}$$

representado en la Figura 1.1.

Las caras no triviales de X son $X_u = \{(u, 1 + u - 2\sqrt{u})\}$, $0 \leq u \leq 1$, $X_2 = \{0\} \times [1, +\infty[$ y $X_3 = [1, +\infty[\times \{0\}$. Todas estas caras son expuestas excepto X_0 y X_1.

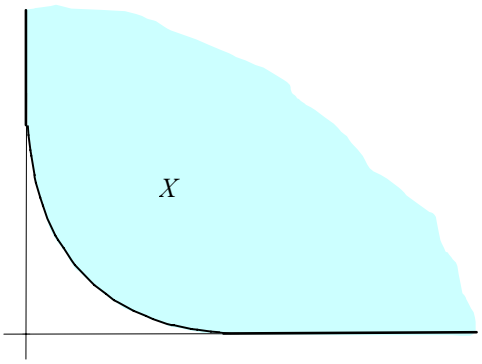

Figura 1.1

Por lo tanto, $C = X \setminus \left(\underset{u \in U}{\cup} X_u \right)$ es linealizable si, y sólo si, $U \subset]0,1[\cup \{2,3\}$ (por la Proposición 1.11 y el Corolario 1.12).

Así pues, C no es linealizable si $\emptyset \neq U \subset \{0,1\}$ (por el Corolario 1.12). Tampoco admiten representación lineal los conjuntos $C' = X \setminus \left[([1,+\infty[\times \{0\}) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right]$, y $C'' = X \setminus (]2,+\infty[\times \{0\})$. En el primer caso, $(\operatorname{cl} C') \setminus C'$ tiene una cara no expuesta de $\operatorname{cl} C'$ como componente conexa, mientras que en el segundo, $(\operatorname{cl} C'') \setminus C''$ no es unión de una familia de caras expuestas (es un trozo de una).

Obsérvese que, en el apartado (v) de la Proposición 1.11, no se puede sustituir "caras expuestas" por "interiores relativos de caras expuestas". En efecto, si consideramos el conjunto convexo cerrado X del Ejemplo 1.13 y la cara expuesta X_3 de X, el conjunto $C = X \setminus \operatorname{rint} X_3 = X \setminus (]1,+\infty[\times \{0\})$ no es linealizable.

Los apartados (vi) y (vii) de la Proposición 1.11 pueden inducir a pensar que otra condición equivalente a que un conjunto convexo no vacío C sea linealizable es que, para cualquier conjunto convexo $K \subset (\operatorname{cl} C) \setminus C$, $(\operatorname{aff} K) \cap C = \emptyset$. Sin embargo, el conjunto convexo $C = X \setminus \left(\underset{u \in [0,1]}{\cup} X_u \right)$ no es linealizable y verifica esta condición (ya que los únicos subconjuntos convexos de $(\operatorname{cl} C) \setminus C$ son los conjuntos singulares X_u y $\operatorname{aff} X_u = X_u$).

Los dos siguientes resultados comparan diferentes elementos de C y $\operatorname{cl} C$ cuando C es linealizable.

PROPOSICIÓN 1.14 *Si C es un conjunto linealizable no vacío, entonces*

(i) $D(C,x) = D(\operatorname{cl} C, x)$ *para todo* $x \in C$; *y*

(ii) *los puntos extremos de C son aquellos puntos extremos de $\operatorname{cl} C$ que pertenecen a C.*

Demostración. (i) Probaremos la inclusión no trivial $D(\operatorname{cl} C, x) \subset D(C, x)$ para todo $x \in C$.

Supongamos lo contrario. Sea $\overline{x} \in C$ y $u \in D(\operatorname{cl} C, \overline{x}) \setminus D(C, \overline{x})$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{x} + \varepsilon u \in \operatorname{cl} C$. Puesto que $u \notin D(C, \overline{x})$, $\overline{x} + \dfrac{\varepsilon}{2} u \in (\operatorname{cl} C) \setminus C$ y existe una cara expuesta de $\operatorname{cl} C$, digamos X, tal que $X \cap C = \emptyset$ y $\overline{x} + \dfrac{\varepsilon}{2} u \in X$ (por el apartado (v) de la Proposición 1.11).

Sea $a \neq 0_n$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $a'x \geq b$ para todo $x \in \operatorname{cl} C$ y

$$X = \{x \in \operatorname{cl} C \mid a'x = b\}.$$

Puesto que $a'\left(\overline{x} + \dfrac{\varepsilon}{2} u\right) = b$ y $a'\overline{x} \geq b$, se tiene que $a'u \leq 0$. Obtendremos una contradicción en los dos casos posibles.

Si $a'u < 0$, entonces $a'(\overline{x} + \varepsilon u) < a'\left(\overline{x} + \dfrac{\varepsilon}{2} u\right) = b$, de manera que $\overline{x} + \varepsilon u \notin \operatorname{cl} C$ (contradicción).

Si $a'u = 0$, entonces $a'\overline{x} = a'\left(\overline{x} + \dfrac{\varepsilon}{2} u\right) = b$, de manera que $\overline{x} \in X$. Por lo tanto, $\overline{x} \notin C$ y esto es de nuevo una contradicción.

(ii) Sea $x \in C$. Si x no es punto extremo de $\operatorname{cl} C$, entonces existe $u \neq 0_n$ tal que $\pm u \in D(\operatorname{cl} C, x) = D(C, x)$, de acuerdo con la parte (i), por lo que x no puede ser punto extremo de C.

El recíproco es trivial. ■

PROPOSICIÓN 1.15 *Si C un conjunto linealizable no vacío, entonces coinciden los conos de recesión de C y de $\operatorname{cl} C$, es decir, $O^+C = O^+(\operatorname{cl} C)$. En consecuencia, C es acotado si, y sólo si, $O^+C = \{0_n\}$.*

Demostración. Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t'x > b_t,\ t \in T\}$. Entonces

$$O^+C = \{y \in \mathbb{R}^n \mid a_t'y \geq 0,\ t \in T\} = O^+(\operatorname{cl} C), \tag{1.27}$$

puesto que $\operatorname{cl} C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t'x \geq b_t,\ t \in T\}$ (Proposición 1.1).

Finalmente, C es acotado si, y sólo si, $\operatorname{cl} C$ es acotado o, lo que es lo mismo, $O^+(\operatorname{cl} C) = \{0_n\}$ (Proposición 0.8). ■

Los dos últimos resultados pueden cumplirse o no para conjuntos convexos no linealizables, como puede verse en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.13 (revisitado). Ni $C_1 := X \setminus \{(1,0)'\}$ ni $C_2 := X \setminus (]2,+\infty[\times \{0\})$ son linealizables. Sin embargo, C_1 satisface tanto la Proposición 1.14 como la 1.15, mientras que C_2 no satisface ninguna de las dos (considérese el punto $(2,0)'$ en la Figura 1.2).

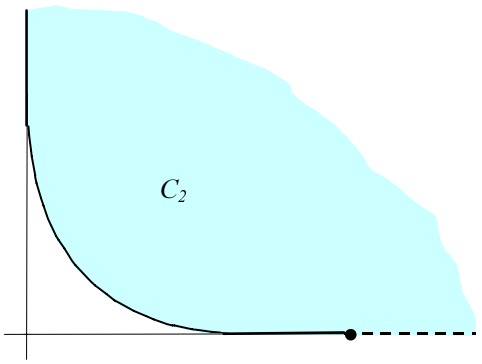

Figura 1.2

PROPOSICIÓN 1.16 *Sea C un conjunto linealizable no vacío y sea $y \neq 0_n$. Si existe un $x \in C$ tal que $\{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\} \subset C$, entonces $y \in O^+C$.*

Además, $\{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\} \subset \operatorname{rint} C$ para todo $x \in \operatorname{rint} C$, de modo que $y \in O^+(\operatorname{rint} C)$.

Demostración. Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t'x > b_t,\ t \in T\}$ y supongamos la existencia de $t \in T$ tal que $a_t'y < 0$. Entonces $a_t'(x + \lambda y) < b_t$ para λ suficientemente grande, de modo que $x + \lambda y \notin C$. Por lo tanto, $a_t'y \geq 0$ para todo $t \in T$, y esto implica que $y \in O^+C$ de acuerdo con (1.27).

Supongamos, ahora, $x \in \operatorname{rint} C$, entonces, para todo $\lambda \geq 0$, $[x, x + \lambda y]$ es un segmento en C que corta a $\operatorname{rint} C$ y, por la Proposición 0.2 (iii), dicho segmento debe tener su interior relativo en $\operatorname{rint} C$. Por lo tanto,

$$\{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\} \subset \operatorname{rint} C. \qquad \blacksquare$$

Aunque la Proposición 1.16 es consecuencia directa del Teorema 8.3 de [32] (si se considera que, en este caso, $O^+C = O^+(\operatorname{cl} C)$, por ser C linealizable, y

$\operatorname{rint} C = \operatorname{rint}(\operatorname{cl} C)$, por ser C convexo), hemos preferido hacer la prueba directa para subrayar que dicha proposición se puede considerar como una extensión, a los conjuntos linealizables, del mencionado teorema. Así mismo, el siguiente resultado extiende el Corolario 8.3.4 de [32].

PROPOSICIÓN 1.17 *Sea C un conjunto linealizable no vacío en $\mathbb{R}^n$ y sea $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que $A^{-1}C \neq \emptyset$. Entonces $A^{-1}C$ es linealizable y $O^+(A^{-1}C) = A^{-1}(O^+C)$.*

Demostración. Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x > b_t,\ t \in T\}$. Entonces, se puede comprobar fácilmente que

$$A^{-1}C = \left\{z \in \mathbb{R}^m \mid (A' a_t)' z > b_t,\ t \in T\right\},$$

de manera que $A^{-1}C$ es linealizable.

$A^{-1}(O^+C) \subset O^+(A^{-1}C)$. En efecto, si $y \in A^{-1}(O^+C)$, tomando $z \in A^{-1}C$ cualquiera y puesto que $Ay \in O^+C$, se tiene para cada $\lambda \geq 0$

$$A(z + \lambda y) = Az + \lambda Ay \in C,$$

de manera que $z + \lambda y \in A^{-1}C$. Por lo tanto, $y \in O^+(A^{-1}C)$.

Recíprocamente, supongamos que $y \in O^+(A^{-1}C)$. Sea $z \in A^{-1}C$ elegido arbitrariamente. Puesto que, para todo $\lambda \geq 0$, $z + \lambda y \in A^{-1}C$, se tiene que $Az + \lambda Ay = A(z + \lambda y) \in C$. Aplicando la Proposición 1.16, se concluye que $Ay \in O^+C$ y, por lo tanto, $y \in A^{-1}(O^+C)$. ■

Probaremos que la imagen, AC, de un conjunto linealizable C por una transformación lineal A no es necesariamente un conjunto linealizable. Pero antes, debemos considerar el producto y la suma de dos conjuntos linealizables.

PROPOSICIÓN 1.18 *El producto cartesiano de dos conjuntos linealizables es también linealizable.*

Demostración. Si

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_u' x > b_u,\ u \in U\}$$

y

$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid c_v' x > d_v,\ v \in V\},$$

entonces

$$C_1 \times C_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \begin{pmatrix} a_u \\ 0_m \end{pmatrix}' x > b_u,\ u \in U;\ \begin{pmatrix} 0_n \\ c_v \end{pmatrix}' x > d_v,\ v \in V \right\}.$$

Por lo tanto, $C_1 \times C_2$ es linealizable. ■

Con relación a la suma de conjuntos convexos cerrados, sabemos que no es necesariamente cerrada a menos que se cumpla cierta condición de recesión que garantiza que el cono de recesión de la suma es la suma de los correspondientes conos de recesión (véase [32, Cor. 9.1.2]). Seguidamente veremos que, esta última propiedad se puede extender a los conjuntos linealizables, pero su suma no es necesariamente linealizable (ni siquiera si uno de los dos conjuntos es acotado).

PROPOSICIÓN 1.19 *Sean C_1 y C_2 conjuntos linealizables no vacíos en $\mathbb{R}^n$ tales que $(O^+C_1) \cap (-O^+C_2) = \{0_n\}$. Entonces*

$$O^+(C_1 + C_2) = O^+C_1 + O^+C_2. \tag{1.28}$$

Demostración. De acuerdo con la Proposición 1.15,

$$\left[O^+(\operatorname{cl} C_1)\right] \cap \left[-O^+(\operatorname{cl} C_2)\right] = \{0_n\},$$

de manera que si $z^i \in O^+(\operatorname{cl} C_i)$, $i = 1, 2$, y $z^1 + z^2 = 0_n$, entonces

$$z^1 = -z^2 = 0_n \in \operatorname{lin}(\operatorname{cl} C_i),\ i = 1, 2,$$

que es la hipótesis de la Proposición 0.9. Por lo tanto, se cumple

$$O^+[\operatorname{cl}(C_1 + C_2)] = O^+(\operatorname{cl} C_1) + O^+(\operatorname{cl} C_2) = O^+C_1 + O^+C_2.$$

Entonces, se tiene

$$O^+C_1 + O^+C_2 \subset O^+(C_1 + C_2) \subset O^+[\operatorname{cl}(C_1 + C_2)] = O^+C_1 + O^+C_2,$$

de manera que se cumple (1.28). ■

EJEMPLO 1.13 (revisitado). Consideremos el conjunto linealizable X de (1.26). El conjunto compacto $C_1 := \{x \in X \mid x_1 + x_2 \leq 1\}$ (véase Figura 1.3) y el conjunto

$C_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_1 + x_2 > 0\}$ (véase Figura 1.4) son obviamente linealizables y satisfacen la condición de recesión de la Proposición 1.19. Sin embargo, en la Figura 1.5 se puede ver que, aunque se verifica

$$O^+(C_1 + C_2) = O^+C_2 = O^+C_1 + O^+C_2,$$

el conjunto $C_1 + C_2$ no es linealizable, ya que los puntos $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ son puntos extremos no expuestos de $\mathrm{cl}\,(C_1 + C_2)$.

Obsérvese también que $C_1 \times C_2$ es un conjunto linealizable cuya imagen por la transformación lineal $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ tal que $A(x, z) = x + z$ es $C_1 + C_2$, que no es linealizable. Esto demuestra que la imagen por una transformación lineal de un conjunto linealizable puede no ser linealizable (como ocurre con los conjuntos convexos cerrados). En cambio, las transformaciones lineales convierten los conjuntos relativamente abiertos en otros de la misma clase, como puede deducirse de la Proposición 0.3.

Sabemos que la intersección de una familia arbitraria $\{C_i \mid i \in I\}$ de conjuntos convexos cerrados es un conjunto convexo cerrado y, aunque la intersección no es una operación cerrada en la clase de los conjuntos relativamente abiertos, sí lo es cuando consideramos la clase más general de los conjuntos linealizables. Acabaremos esta sección con la extensión a los conjuntos linealizables de dos propiedades bien conocidas de los conjuntos convexos cerrados (Cor. 8.3.3 y Cor. 8.4.1 de [32], respectivamente).

PROPOSICIÓN 1.20 *Si $\{C_i\}_{i\in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos linealizables, entonces $\bigcap\limits_{i\in I} C_i$ es linealizable. Además, si $\bigcap\limits_{i\in I} C_i \neq \emptyset$, entonces*

$$O^+\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) = \bigcap_{i\in I} O^+C_i.$$

Demostración. Denotemos por $C := \bigcap\limits_{i\in I} C_i \neq \emptyset$, que es trivialmente linealizable, y sea $x \in C$.

Si $y \in O^+C_i$ para todo $i \in I$, entonces se tiene

$$\{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\} \subset C_i$$

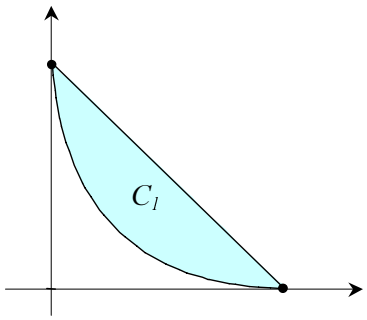

Figura 1.3

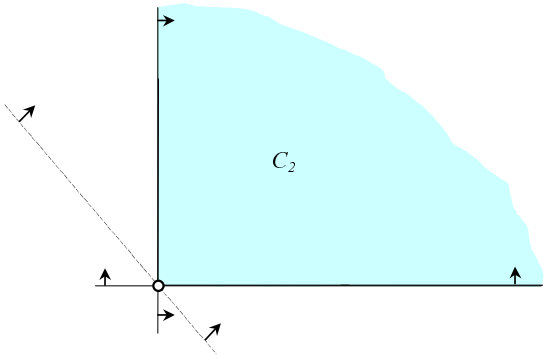

Figura 1.4

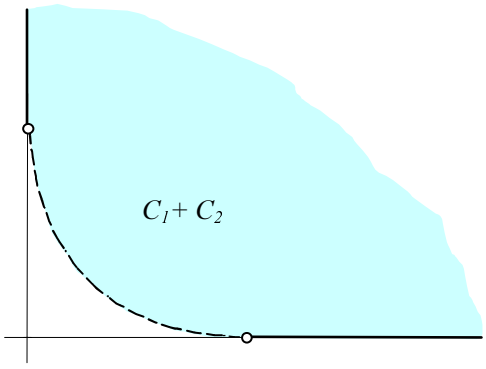

Figura 1.5

para todo $i \in I$, de modo que

$$\{x + \lambda y \mid \lambda \geq 0\} \subset C.$$

Por lo tanto, $y \in O^+C$ y $\underset{i\in I}{\cap} O^+C_i \subset O^+\left(\underset{i\in I}{\cap} C_i\right)$. La inclusión opuesta es trivial. ■

Este resultado justifica la definición, dada por Fenchel [14], de la *envoltura linealizable* de un conjunto no vacío X como el menor conjunto linealizable que contiene a X (la intersección de todos los conjuntos linealizables conteniendo a X), estando intercalado entre $\operatorname{conv} X$ y $\operatorname{cl}\operatorname{conv} X$. Si C es un convexo no vacío, la envoltura linealizable de C se obtiene eliminando de $\operatorname{cl} C$ todas sus caras expuestas que no contienen puntos de C.

COROLARIO 1.21 *Sea C un conjunto linealizable y sea M una variedad afín tal que $M \cap C$ es no vacío y acotado. Entonces $M' \cap C$ es acotado para toda variedad afín M' paralela a M.*

Demostración. Obviamente, puesto que toda variedad afín es un conjunto convexo cerrado, M' es linealizable. Además, puesto que estamos suponiendo que M' es paralela a M, $O^+M' = O^+M$ (subespacio vectorial). Si $M' \cap C \neq \emptyset$, por las Proposiciones 1.20 y 1.15, se tiene

$$O^+(M' \cap C) = O^+M' \cap O^+C = O^+M \cap O^+C = O^+(M \cap C) = \{0_n\},$$

de modo que $M' \cap C$ es acotado. ■

1.4 Geometría

En esta sección probaremos que es posible obtener información geométrica acerca del conjunto solución F de un sistema consistente

$$\sigma = \{a_t'x \geq b_t,\ t \in D;\ a_t'x > b_t,\ t \in E\}.$$

Para ello apelaremos a las relaciones bien conocidas entre el correspondiente sistema relajado $\overline{\sigma} = \{a_t'x \geq b_t,\ t \in T := D \cup E\}$ y su conjunto solución $\overline{F}$.

PROPOSICIÓN 1.22 *Sea $F \neq \emptyset$ el conjunto solución de σ y sea T_c su conjunto de índices portadores (es decir, $T_c = \{t \in T \mid a_t' x = b_t \text{ para todo } x \in F\} \subset D$). Entonces*

$$\operatorname{rint} F \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x = b_t,\ t \in T_c;\ a_t' x > b_t,\ t \in T \backslash T_c\}\,. \tag{1.29}$$

Además, si $\overline{\sigma}$ es LFM, entonces ambos miembros de (1.29) son iguales,

$$\dim F = n - \dim \operatorname{span}\{a_t,\ t \in T_c\}$$

y, si $T_c \neq \emptyset$,

$$\operatorname{aff} F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x = b_t,\ t \in T_c\}\,.$$

Demostración. Obsérvese que los índices portadores de $\overline{\sigma}$ son los mismos que los de σ, puesto que un hiperplano contiene a un conjunto convexo si, y sólo si, contiene a su clausura y $\overline{F} = \operatorname{cl} F$ (Proposición 1.1). Por otra parte, $\operatorname{rint} \overline{F} = \operatorname{rint} F$, $\operatorname{aff} \overline{F} = \operatorname{aff} F$ y $\dim \overline{F} = \dim F$, de manera que es suficiente probar todas las afirmaciones para $\overline{\sigma}$ y $\overline{F}$ en lugar de σ y F. Así pues, la conclusión se sigue de las Proposiciones 0.15 y 0.17. ■

PROPOSICIÓN 1.23 *Si el conjunto solución de σ es $F \neq \emptyset$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *F es acotado;*

(ii) $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{int} \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T;\ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$;

(iii) $\operatorname{cone}\{a_t,\ t \in T\} = \mathbb{R}^n$; *y*

(iv) *existe un subsistema finito de σ cuyo conjunto solución es acotado.*

Demostración. Puesto que el conjunto solución de un sistema consistente arbitrario es acotado si, y sólo si, el conjunto solución de su correspondiente sistema relajado es acotado (por la Proposición 1.1), se cumple la equivalencia entre las afirmaciones (i) a (iv) si, y sólo si, se cumple para $\overline{\sigma}$. La conclusión es una consecuencia directa de la Proposición 0.19. ■

Dado $x \in F$, el *cono de restricciones activas* en x (con respecto de σ) es

$$A(x) = \operatorname{cone}\{a_t \mid a_t' x = b_t,\ t \in D\}\,.$$

Denotaremos por $\overline{A}(\overline{x})$ el cono de restricciones activas en $\overline{x} \in \overline{F}$ (con respecto de $\overline{\sigma}$).

PROPOSICIÓN 1.24 *Sea $x \in F$. Si $\dim A(x) = n$, entonces x es punto extremo de F. El recíproco es cierto cuando $\overline{\sigma}$ es LOP.*

Demostración. Se puede ver fácilmente que $\overline{A}(x) = A(x)$ para todo $x \in F$.

Además, x es un punto extremo de F si, y sólo si, x es un punto extremo de $\overline{F}$ (por la Proposición 1.14). La conclusión se sigue de la Proposición 0.18. ■

El siguiente ejemplo muestra que las condiciones adicionales para los recíprocos de las Proposiciones 1.22 y 1.24 no son supérfluas.

EJEMPLO 1.13 (revisitado) Sea $\sigma = \{tx_1 + (1-t)x_2 > t - t^2,\ t \in]0,1[\}$ cuyo conjunto solución, F, está representado en la Figura 1.6.

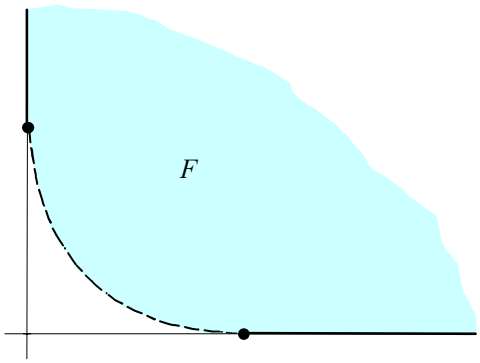

Figura 1.6

Aquí $T_c = \emptyset$, de modo que (1.29) se convierte en $\operatorname{rint} F \subset F$. Sin embargo, $\operatorname{rint} F \neq F$ ya que $\overline{\sigma}$ no es LFM (obsérvese que $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ no son consecuencia de ningún subsistema finito de $\overline{\sigma}$). Por otra parte,

$$\operatorname{cone}\{a_t,\ t \in T\} = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix},\ t \in]0,1[\right\} \neq \mathbb{R}^2,$$

de modo que F es no acotado. Finalmente, obsérvese que $A(x) = \{0_2\}$ para todo $x \in F$, incluso en los puntos extremos de F, $(1,0)'$ y $(0,1)'$ (de hecho, cualquier sistema LOP es LFM).

1.5 Optimización lineal

Asociamos al problema de optimización lineal con desigualdades estrictas

$$\begin{array}{lll}(P) & \text{Inf} & c'x \\ & \text{s.a.} & a_t'x \geq b_t,\, t \in D \\ & & a_t'x > b_t,\, t \in E \neq \emptyset,\end{array}$$

donde $c \neq 0_n$, el problema PSIL

$$\begin{array}{lll}\left(\overline{P}\right) & \text{Inf} & c'x \\ & \text{s.a.} & a_t'x \geq b_t,\, t \in T = D \cup E.\end{array}$$

Obviamente, los valores de ambos problemas están relaciones por $v\left(\overline{P}\right) \leq v\left(P\right)$ (la desigualdad puede ser estricta: por ejemplo, para (P) $\operatorname{Min} x$ s.a. $0 < x < 0$, $v\left(P\right) = +\infty$ y $v\left(\overline{P}\right) = 0$), con $v\left(P\right) = v\left(\overline{P}\right)$ si (P) es consistente (por la Proposición 1.1). Por lo tanto, cualquier método de aproximación exterior para $\left(\overline{P}\right)$ (como los métodos de discretización por planos de corte y por rejillas) es un método de aproximación exterior para (P). Por otra parte, cualquier método de direcciones factibles para $\left(\overline{P}\right)$ (como los métodos cuasi-simplex) da lugar a una sucesión de soluciones factibles para (P) que aproximan $v\left(P\right)$. De hecho, si $\{x^r\} \subset \overline{F}$ satisface $\lim\limits_r c'x^r = v\left(\overline{P}\right)$, tomando $\widehat{x} \in F$ y una sucesión $\{\lambda_r\} \subset [0,1]$ tal que $\lim\limits_r \lambda_r = 0$, se tiene $\{(1-\lambda_r)\,x^r + \lambda_r\widehat{x}\} \subset F$ y $\lim\limits_r c'\left[(1-\lambda_r)\,x^r + \lambda_r\widehat{x}\right] = v\left(P\right)$.

Aunque (P) será habitualmente irresoluble (incluso si F es acotado), podemos establecer una condición KKT que da lugar a una regla exacta de parada para cualquier método LSIP adaptado a (P).

PROPOSICIÓN 1.25 *Sea $\widehat{x} \in F$. Si $c \in A\left(\widehat{x}\right)$ ($c \in \operatorname{int} A\left(\widehat{x}\right)$), entonces $\widehat{x}$ es una solución óptima de (P) (una solución óptima fuertemente única de (P), respectivamente). Los recíprocos se cumplen si $\overline{\sigma}$ es LFM.*

Demostración. Si $c \in A\left(\widehat{x}\right)$, con $\widehat{x} \in F$, entonces se tiene que $\widehat{x} \in \overline{F}$ y $c \in \overline{A}\left(\widehat{x}\right)$, de manera que $\widehat{x}$ es una solución óptima de $\left(\overline{P}\right)$ [19, Th. 7.1].

Del mismo modo, si $c \in \operatorname{int} A(\widehat{x})$, entonces $c \in \operatorname{int} \overline{A}(\widehat{x})$ y $\widehat{x}$ es una solución óptima fuertemente única de $\left(\overline{P}\right)$ [19, Th. 10.6].

Recíprocamente, si $\widehat{x}$ es una solución óptima de (P), entonces también es una solución óptima de $\left(\overline{P}\right)$ (puesto que $v\left(\overline{P}\right) = v(P)$). Entonces se aplica de nuevo [19, Th. 7.1] para concluir que $c \in \overline{A}(\widehat{x}) = A(\widehat{x})$ bajo la hipótesis de que $\overline{\sigma}$ es LFM. El argumento es similar para el otro recíproco, teniendo en cuenta [19, Th. 10.6]. ■

El último resultado trata sobre la acotación del conjunto óptimo de (P), que denotamos por F^* (la acotación de F^* puede verse como una condición de buen condicionamiento para (P)).

PROPOSICIÓN 1.26 *Si (P) es resoluble, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *F^* es un conjunto acotado;*

(ii) *todos los conjuntos de subnivel no vacíos de (P)*

$$\text{(o } \{x \in F \mid c'x < \alpha\} \text{ o } \{x \in F \mid c'x \leq \alpha\}\text{, con } \alpha \in \mathbb{R}\text{)}$$

son acotados;

(iii) *existe un subproblema finito de (P) cuyos conjuntos de subnivel no vacíos son acotados; y*

(iv) $c \in \operatorname{int} \operatorname{cone}\{a_t,\ t \in T\}$.

Demostración. En primer lugar, obsérvese que los conjuntos de subnivel de (P) (en particular, F^*) son linealizables.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\{x \in F \mid c'x \leq \alpha\} \neq \emptyset$ (para conjuntos de subnivel estrictos se utiliza el mismo argumento). De acuerdo con la Proposición 1.20, se tiene

$$O^+F^* = O^+\left(F \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c'x \leq v(P)\}\right) = O^+F \cap \{y \in \mathbb{R}^n \mid c'y \leq 0\} =$$

$$= O^+\left(F \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid c'x \leq \alpha\}\right) = O^+\left(\{x \in F \mid c'x \leq \alpha\}\right).$$

Por lo tanto, puesto que $O^+F^* = \{0_n\}$ si, y sólo si, $O^+\left(\{x \in F \mid c'x \leq \alpha\}\right) = \{0_n\}$, (por la Proposición 1.15) F^* es acotado si, y sólo si, $\{x \in F \mid c'x \leq \alpha\}$ es acotado.

Probaremos ahora que todos los conjuntos de subnivel no vacíos de (P) son

acotados si, y sólo si, todos los conjuntos de subnivel no vacíos de $\left(\overline{P}\right)$ son acotados. Esto es consecuencia de la doble inclusión

$$\{x \in F \mid c'x \leq \alpha\} \subset \left\{x \in \overline{F} \mid c'x \leq \alpha\right\} \subset \operatorname{cl}\{x \in F \mid c'x < \alpha + \varepsilon\}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $\varepsilon > 0$ (si $\overline{x} = \lim_r x^r$, con $\{x^r\} \subset F$ y $c'\overline{x} \leq \alpha$, entonces $c'x^r < \alpha + \varepsilon$ para r suficientemente grande, de manera que $\overline{x} \in \operatorname{cl}\{x \in F \mid c'x < \alpha + \varepsilon\}$).

Se aplica el mismo argumento para los conjuntos de subnivel no vacíos de los subproblemas obtenidos al sustituir D y E por los conjuntos finitos $D' \subset D$ y $E' \subset E$ en (P) y $\left(\overline{P}\right)$. Por lo tanto, concluimos que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) por aplicación directa de [19, Cor. 9.3.1]. ■

Capítulo 2

Confín de un conjunto convexo

2.1 Introducción

Informalmente hablando, el confín de un conjunto convexo C en una dirección dada es el conjunto de puntos de C que se pueden ver desde el infinito en esa dirección. En realidad, el confín de C es el conjunto de puntos K-extremos de C (en el sentido de Yu [39]) para un cierto cono K y está conectado con dos conceptos de iluminación que han sido introducidos para abordar problemas de combinatoria geométrica sobre cuerpos convexos (véase el reciente artículo de Martini y Soltan [28]). En este capítulo se analizan las propiedades del confín de los conjuntos convexos en general y de los conjuntos convexos cerrados en particular (para los cuales los confines no vacíos son conexos por arcos), así como las relaciones entre el confín y ciertos conceptos de iluminación sobre conjuntos convexos. Además, se pretende demostrar que el confín puede ser una herramienta muy útil en análisis convexo y en temas relacionados (como los sistemas lineales o la optimización lineal).

En la Sección 2.2, se define el confín de un conjunto convexo C, se recupera la definición dada por Yu [39, Def. 4.1] de conjunto de puntos K-extremos, donde K es un cono, y se establecen relaciones entre estos dos conceptos. De hecho, se demuestra que el confín de C en una dirección dada, $u \neq 0_n$, es el conjunto de puntos

K-extremos de C para el cono $K = \operatorname{cone}\{-u\}$. También se dan, en esta sección, las propiedades básicas del confín de un conjunto convexo, estableciéndose relaciones con su estructura facial y su dimensión, con su frontera y frontera relativa, con su conjunto de puntos extremos, etc.

Los confines pueden no ser cerrados (incluso para los conjuntos convexos compactos), pero siempre son conexos por arcos cuando el conjunto es convexo cerrado. Este es el principal resultado de la Sección 2.3, donde también se obtiene, como consecuencia, la conexión por arcos de la frontera relativa de los conjuntos convexos compactos de dimensión mayor que 1.

En la Sección 2.4, se extienden las definiciones de iluminación por direcciones y visibilidad en una dirección (dadas para cuerpos convexos por Boltyanski [8] y Soltan [34], respectivamente) a los conjuntos convexos cerrados y se discuten las relaciones entre el confín y estos dos conceptos de iluminación.

La última sección de este capítulo muestra algunas aplicaciones del confín a la teoría de los sistemas lineales.

2.2 Confín: Propiedades básicas

El *confín* de un conjunto convexo no vacío C en la dirección de un vector no nulo u es el conjunto

$$\operatorname{end}(C;u) = \{x \in C \mid u \notin D(C,x)\}\,.$$

Obviamente, $\operatorname{end}(C;u) = \emptyset$ tanto si C es abierto como si $u \in O^+C$ y $\operatorname{end}(C;u) = C$, para todo $u \neq 0_n$, cuando C es singular. Por otra parte, dado un cono $K \subset \mathbb{R}^n$, el *conjunto de puntos K-extremos* de C se define [39] como

$$\operatorname{Ext}[C \mid K] = \{x \in C \mid x \notin y + K \text{ para todo } y \in C \backslash \{x\}\}\,.$$

Obsérvese que si C es singular, $\operatorname{Ext}[C \mid K] = C$ cualquiera que sea el cono K. Además, es obvio que $\operatorname{Ext}[C \mid \{0_n\}] = C$ y, para C no singular, $\operatorname{Ext}[C \mid \mathbb{R}^n] = \emptyset$.

Las dos siguientes proposiciones establecen relaciones entre estos dos conceptos.

PROPOSICIÓN 2.1 *Si C es un conjunto convexo no vacío y $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, entonces* $\operatorname{end}(C;u) = \operatorname{Ext}[C \mid \operatorname{cone}\{-u\}]$.

Demostración. El caso C singular es trivial, por lo que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que C es no singular.

Si $x \in C \setminus \operatorname{Ext}[C \mid \operatorname{cone}\{-u\}]$, entonces existen $y \in C \setminus \{x\}$ y $\lambda > 0$ tales que $x = y - \lambda u$ o, lo que es lo mismo, $x + \lambda u = y \in C$. Esta última igualdad implica que $u \in D(C,x)$ y, por lo tanto, $x \notin \operatorname{end}(C;u)$.

Recíprocamente, si $x \in C \setminus \operatorname{end}(C;u)$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $x + \lambda u \in C$. Tomando $y := x + \lambda u \in C \setminus \{x\}$, se tiene que $x \in y + \operatorname{cone}\{-u\}$ y, por lo tanto, $x \notin \operatorname{Ext}[C \mid \operatorname{cone}\{-u\}]$. ■

PROPOSICIÓN 2.2 *Si C es un conjunto convexo no vacío y $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \{0_n\}$, es un cono, entonces*

$$\operatorname{Ext}[C \mid K] = \bigcap_{y \in K \setminus \{0_n\}} \operatorname{end}(C;-y).$$

Demostración. Supongamos que C es no singular.

Si $x \in C \setminus \operatorname{end}(C;-y)$ para algún $y \in K \setminus \{0_n\}$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $x - \lambda y \in C$. Tomando $z := x - \lambda y$, se tiene que $z \in C \setminus \{x\}$ y $x = z + \lambda y \in z + K$, por lo que $x \notin \operatorname{Ext}[C \mid K]$.

Recíprocamente, si $x \in C \setminus \operatorname{Ext}[C \mid K]$, entonces existen $z \in C \setminus \{x\}$ e $y \in K \setminus \{0_n\}$ tales que $x = z + y$, por lo que $x - y = z \in C$ y $x \notin \operatorname{end}(C;-y)$. En consecuencia, $x \notin \bigcap_{y \in K \setminus \{0_n\}} \operatorname{end}(C;-y)$. ■

Podría pensarse que en el caso particular de que $K = \operatorname{cone} Z$, $\emptyset \neq Z \neq \{0_n\}$, debería cumplirse que $\operatorname{Ext}[C \mid K] = \bigcap_{y \in Z \setminus \{0_n\}} \operatorname{end}(C;-y)$ y, por lo tanto, la Proposición 2.1 se obtendría como consecuencia, tomando $K = \operatorname{cone}\{-u\}$. Sin embargo, este resultado no es cierto ni siquiera cuando Z es finito.

EJEMPLO 2.3 Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2,\ x_1 \geq 0,\ -x_2 \geq -1\}$ y sea $K = \operatorname{cone} Z$, con $Z = \{-e^1,\ \pm e^2\}$. En este caso, $\operatorname{end}(C;-y) = C$ para todo $y \in Z \setminus \{0_n\}$ y, sin embargo, $\operatorname{Ext}[C \mid K] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Las siguientes proposiciones proporcionan dos formas diferentes de describir el conjunto $\operatorname{end}(C;u)$.

PROPOSICIÓN 2.4 *Sea C un conjunto convexo, $\overline{x} \in C$ y $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}$. Si existe $y \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo*

$$\{u'y < 0;\ (x-\overline{x})'y \geq 0,\ x \in C\}, \tag{2.1}$$

entonces $\overline{x} \in \operatorname{end}(C;u)$. El recíproco es válido en $\overline{x} \in C$ para todo $u \neq 0_n$ si, y sólo si, $D(C;\overline{x})$ es cerrado.

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c'u < 0$ y $c'(x-\overline{x}) \geq 0$ para todo $x \in C$. Si $\overline{x} + \alpha u \in C$ para cierto $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $0 \leq c'(\overline{x} + \alpha u - \overline{x}) = \alpha c'u$ y esto implica que $\alpha \leq 0$. Así pues, $u \notin D(C,\overline{x})$ y $\overline{x} \in \operatorname{end}(C;u)$.

El recíproco es cierto en $\overline{x} \in C$ si $\overline{x} \in \operatorname{end}(C;u)$, con $u \neq 0_n$, implica la existencia de $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c'u < 0$ y $c'(x-\overline{x}) \geq 0$ para todo $x \in C$. Asumamos esta hipótesis y sea $u \neq 0_n$ tal que $u \in \operatorname{cl} D(C,\overline{x})$. Entonces, se tiene

$$u \in \operatorname{cl} D(C,\overline{x}) = \operatorname{cl}\operatorname{cone}\{x-\overline{x} \mid x \in C\},$$

de modo que, por el Lema de Farkas Homogéneo, $u'y \geq 0$ es una consecuencia del sistema lineal homogéneo

$$\{(x-\overline{x})'y \geq 0,\ x \in C\}$$

y no existe ningún $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c'u < 0$ y $c'(x-\overline{x}) \geq 0$ para todo $x \in C$. Por lo tanto, $\overline{x} \notin \operatorname{end}(C;u)$, es decir, $u \in D(C,\overline{x})$. En consecuencia, $D(C,\overline{x})$ es cerrado.

Recíprocamente, sea $D(C,\overline{x})$ cerrado y $\overline{x} \in \operatorname{end}(C;u)$. Si (2.1) no tuviese solución, entonces $u'y \geq 0$ sería consecuencia del sistema homogéneo

$$\{(x-\overline{x})'y \geq 0,\ x \in C\},$$

de manera que

$$u \in \operatorname{cl}\operatorname{cone}\{x-\overline{x} \mid x \in C\} = D(C,\overline{x}),$$

en contradicción con $\overline{x} \in \operatorname{end}(C;u)$. ■

La interpretación de la proposición anterior es que, si C está contenido en un semiespacio cuyo hiperplano de frontera, H, soporta a C en un punto, entonces dicho

punto está en el confín de C para toda dirección que forme ángulo agudo con la dirección normal a H dirigida hacia el exterior del semiespacio. El recíproco no se verifica en general, como puede verse en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.5 Sea $C = \operatorname{cl} B_2$. Si consideramos $\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, se tiene que $u \notin D(C, \overline{x})$, por lo que $\overline{x} \in \operatorname{end}(C; u)$ (véase Figura 2.1). Sin embargo, el único vector, $c \in \mathbb{R}^n$, que verifica que $c'(x - \overline{x}) \geq 0$ para todo $x \in C$ es $c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, para el cual se cumple que $c'u = 0$ (obsérvese que $D(C, \overline{x})$ no es un conjunto cerrado).

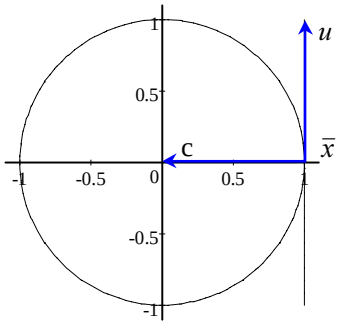

Figura 2.1

COROLARIO 2.6 *Un conjunto convexo cerrado $C \neq \emptyset$ es cuasipoliédrico si, y sólo si,* $\operatorname{end}(C; u) = \{\overline{x} \in C \mid$ *(2.1) es consistente*$\}$ *para todo* $u \neq 0_n$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.4, ya que los conjuntos cuasipoliédricos son aquellos conjuntos convexos cerrados tales que el cono de direcciones factibles es cerrado en todos los puntos (véanse [1, Lem. 3.2] y [6, VII, 1.6]). ■

Es bien conocido que el interior relativo de las caras de un conjunto convexo no vacío C forman una partición de C [32, Th. 18.2]. El siguiente resultado establece que un determinado subconjunto de dicha partición de C es, a su vez, una partición de $\operatorname{Ext}[C \mid K]$ y, en particular, de $\operatorname{end}(C; u)$.

PROPOSICIÓN 2.7 *Sea X una cara del conjunto convexo $C \neq \emptyset$ y sea K un cono. Si*

$$(\operatorname{rint} X) \cap \operatorname{Ext}[C \mid K] \neq \emptyset,$$

entonces $X \subset \operatorname{Ext}[C \mid K]$. Además, $\operatorname{Ext}[C \mid K]$ es la unión de cierta familia de caras de C y los correspondientes interiores relativos forman una partición de $\operatorname{Ext}[C \mid K]$.

Demostración. Si C es singular o $K = \{0_n\}$, entonces $\operatorname{Ext}[C \mid K] = C$ y la proposición se cumple trivialmente. Supongamos, pues, que C es no singular y $K \neq \{0_n\}$.

Sea $\overline{x} \in (\operatorname{rint} X) \cap \operatorname{Ext}[C \mid K]$ y supongamos que $x^1 \in X \setminus \operatorname{Ext}[C \mid K]$. Entonces, existen $y^1 \in C \setminus \{x^1\}$ y $k^1 \in K \setminus \{0_n\}$ tal que $x^1 = y^1 + k^1$.

Por ser $\overline{x} \in \operatorname{rint} X$, la Proposición 0.2(iv) nos asegura la existencia de $\mu > 1$ tal que

$$x^2 := (1-\mu)\, x^1 + \mu \overline{x} \in X \subset C.$$

Tomando $\lambda = (\mu - 1)/\mu$, se tiene $0 < \lambda < 1$ y

$$\overline{x} = (1-\lambda)\, x^2 + \lambda x^1 = (1-\lambda)\, x^2 + \lambda y^1 + \lambda k^1 \in (1-\lambda)\, x^2 + \lambda y^1 + K,$$

con $(1-\lambda)\, x^2 + \lambda y^1 \in C \setminus \{\overline{x}\}$, de modo que $\overline{x} \notin \operatorname{Ext}[C \mid K]$ en contra de la hipótesis.

Consideremos ahora la familia de todas las caras de C cuyo interior relativo contiene, al menos, un punto de $\operatorname{Ext}[C \mid K]$ y denotémosla como $\{X_i,\ i \in I\}$. Puesto que para cualquier $i \in I$, X_i es una cara de C tal que

$$(\operatorname{rint} X_i) \cap \operatorname{Ext}[C \mid K] \neq \emptyset,$$

acabamos de probar que

$$\bigcup_{i \in I} X_i \subset \operatorname{Ext}[C \mid K]. \tag{2.2}$$

Por otra parte, si $x \in \operatorname{Ext}[C \mid K] \subset C$, existe una única cara de C, digamos X, tal que $x \in \operatorname{rint} X$. Puesto que $(\operatorname{rint} X) \cap \operatorname{Ext}[C \mid K] \neq \emptyset$, existe $i \in I$ tal que $X = X_i$. Por lo tanto,

$$\operatorname{Ext}[C \mid K] \subset \bigcup_{i \in I} \operatorname{rint} X_i. \tag{2.3}$$

La combinación de (2.2) y (2.3) da lugar a

$$\operatorname{Ext}[C \mid K] = \bigcup_{i \in I} \operatorname{rint} X_i = \bigcup_{i \in I} X_i.$$

Finalmente, $\{\operatorname{rint} X_i,\ i \in I\}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos de acuerdo con [32, Th. 18.2]. ■

COROLARIO 2.8 *Sea X una cara del conjunto convexo $C \neq \emptyset$. Si*

$$(\operatorname{rint} X) \cap \operatorname{end}(C; u) \neq \emptyset,$$

con $u \neq 0_n$, entonces $X \subset \operatorname{end}(C; u)$. Además, $\operatorname{end}(C; u)$ es la unión de cierta familia de caras de C y los correspondientes interiores relativos forman una partición de $\operatorname{end}(C; u)$.

Nótese que $\operatorname{end}\left([0,1]^2; e^1\right)$ contiene 3 caras del cuadrado ($\left\{(1,0)'\right\}$, $\left\{(1,1)'\right\}$ y $\{1\} \times [0,1]$) e intersecta (pero no contiene) otras dos caras propias ($[0,1] \times \{0\}$ y $[0,1] \times \{1\}$). Por otra parte, $\operatorname{bd}[0,1]^2$ se puede escribir, de diferentes maneras, como unión de confines; por ejemplo, $\operatorname{bd}[0,1]^2 = \operatorname{end}(C; e^1 + e^2) \cup \operatorname{end}(C; -e^1 - e^2)$. Veremos que esto se cumple para cualquier conjunto convexo cerrado.

PROPOSICIÓN 2.9 *Dado un conjunto convexo no vacío C, se cumplen las siguientes proposiciones:*

(i) $(\operatorname{bd} C) \cap C = \underset{u \in S_n}{\cup} \operatorname{end}(C; u)$*; y*

(ii) $(\operatorname{rbd} C) \cap C = \cup \{\operatorname{end}(C; u),\ u \in S_n \cap [(\operatorname{aff} C) - C]\}$.

Demostración. (i) Si $\overline{x} \in (\operatorname{bd} C) \cap C$, existe un semiespacio soporte, $v'x \geq b$, para C en $\overline{x}$. Entonces $\overline{x} \in \operatorname{end}(C; -v/\|v\|)$, por lo que

$$(\operatorname{bd} C) \cap C \subset \underset{u \in S_n}{\cup} \operatorname{end}(C; u).$$

Recíprocamente, si $\overline{x} \in \operatorname{end}(C; u)$ para algún $u \in S_n$, entonces $\overline{x} \in C$ y $\overline{x} + \varepsilon u \notin C$ para cualquier $\varepsilon > 0$, de modo que $\overline{x} \in C \setminus (\operatorname{int} C) \subset \operatorname{bd} C$.

(ii) Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\dim C < n$, es decir, que $W := [(\operatorname{aff} C) - C]^{\perp} \neq \{0_n\}$. Sea $\widetilde{C} := C + W$.

Sea $\overline{x} \in (\operatorname{rbd} C) \cap C$. Entonces, existe una sucesión $\{x^r\} \subset (\operatorname{aff} C) \setminus C$ tal que $\lim_r x^r = \overline{x}$.

Si $x^r \in \widetilde{C}$, se puede descomponer como $x^r = y^r + w^r$, con $y^r \in C$ y $w^r \in W$. Entonces $x^r - y^r = w^r \in [(\operatorname{aff} C) - C] \cap W = \{0_n\}$ y llegamos a la contradicción de que $x^r = y^r \in C$. Puesto que $\overline{x} \in C \subset \widetilde{C}$, concluimos que $\overline{x} \in \operatorname{bd} \widetilde{C}$ y existe un semiespacio soporte $v'x \geq b$ para $\widetilde{C}$ en $\overline{x}$, por lo que $\overline{x} \in \operatorname{end}(C; -v/\|v\|)$. Además, puesto que $W \subset O^+\widetilde{C}$, deberá ser $v'w = 0$ para todo $w \in W$, es decir, $v \in W^{\perp} = (\operatorname{aff} C) - C$ y $-v/\|v\| \in S_n \cap [(\operatorname{aff} C) - C]$.

Recíprocamente, si $\overline{x} \in \operatorname{end}(C;u)$, con $u \in S_n \cap [(\operatorname{aff} C) - C]$, entonces $\overline{x} + \dfrac{1}{r}u \in (\operatorname{aff} C) \setminus C$, para todo $r \in \mathbb{N}$, y $\overline{x} = \lim\limits_{r} \left(\overline{x} + \dfrac{1}{r}u\right) \in \operatorname{rbd} C$. ■

De la Proposición 2.9 se deducen las siguientes caracterizaciones de los conjuntos convexos cerrados.

COROLARIO 2.10 *Sea C un conjunto convexo no vacío. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *C es cerrado;*

(ii) $\operatorname{bd} C = \bigcup\limits_{u \in S_n} \operatorname{end}(C;u)$; y

(iii) $\operatorname{rbd} C = \cup \{\operatorname{end}(C;u),\ u \in S_n \cap [(\operatorname{aff} C) - C]\}$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) y (i) $\Rightarrow$ (iii) son consecuencias directas de la Proposición 2.9.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Puesto que $\operatorname{end}(C;u) \subset C$ para todo $u \neq 0_n$, se tiene que $\operatorname{bd} C \subset C$ y C es cerrado.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Análogamente, $\operatorname{rbd} C \subset C$ y, por lo tanto, C es cerrado en el conjunto cerrado $\operatorname{aff} C$. Así pues, C también es cerrado. ■

Realmente, como consecuencia de un resultado de combinatoria geométrica que se mencionará más adelante, para cubrir $\operatorname{bd} C$ y $\operatorname{rbd} C$ son suficientes dos confines, aunque su unión puede no ser conexa (considérese $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^{n-1}$, con $\alpha < \beta$).

El siguiente ejemplo muestra que aunque el conjunto convexo C sea cerrado o compacto, $\operatorname{end}(C;u)$ no tiene por qué serlo. Sin embargo, probaremos que los confines de los conjuntos cuasipoliédricos son cerrados y, por lo tanto, los confines de los polítopos son compactos.

EJEMPLO 2.11 Consideremos el conjunto convexo compacto

$$C = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix},\ t \in [0, \pi/2];\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y la dirección $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. En la Figura 2.2 se puede comprobar que

$$\operatorname{end}(C;u) = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \bigcup_{t\in]0,\pi/2[} \left[\begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \right\}.$$

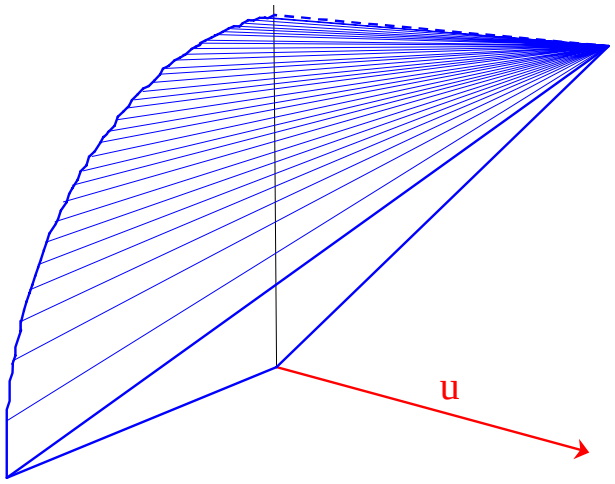

Figura 2.2

Obviamente,

$$\lim_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cl}(\operatorname{end}(C;u)),$$

mientras que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{end}(C;u)$.

Por lo tanto, $\operatorname{end}(C;u)$ no es cerrado.

PROPOSICIÓN 2.12 *Si C es un conjunto cuasipoliédrico, entonces $\operatorname{end}(C;u)$ es cerrado para todo $u \neq 0_n$.*

Demostración. Sea $\{X_i, i \in I\}$ la familia (numerable) de todas las caras de C tales que

$$(\operatorname{rint} X_i) \cap \operatorname{end}(C; u) \neq \emptyset.$$

En primer lugar, probaremos que $\operatorname{end}(C; u)$ es cerrado cuando C es un conjunto poliédrico. En efecto, cualquier conjunto poliédrico tiene un número finito de caras [9, Cor. 8.5], todas ellas cerradas como consecuencia de que C es cerrado [9, Th. 5.1]. Entonces, puesto que I es finito y $\operatorname{end}(C; u) = \bigcup_{i \in I} X_i$ (Corolario 2.8), $\operatorname{end}(C; u)$ resulta ser la unión finita de una familia de conjuntos cerrados, de modo que también es cerrado.

Asumamos ahora que C es cuasipoliédrico y sea $\overline{x} = \lim_r x^r$, con $x^r \in \operatorname{end}(C; u)$, $r = 1, 2, \ldots$. Consideremos un polítopo P tal que $\overline{x} \in \operatorname{int} P$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $x^r \in \operatorname{int} P$, $r = 1, 2, \ldots$.

Puesto que $u \notin D(C, x^r) = D(C \cap P, x^r)$, $x^r \in \operatorname{end}(C \cap P; u)$ para todo $r \in \mathbb{N}$, siendo $C \cap P$ un conjunto poliédrico (un polítopo). Puesto que hemos demostrado que $\operatorname{end}(C \cap P; u)$ es cerrado, obtenemos que $\overline{x} \in \operatorname{end}(C \cap P; u)$ y, por lo tanto, $\overline{x} \in \operatorname{end}(C; u)$. Esto prueba que $\operatorname{end}(C; u)$ es cerrado. ■

Las dos proposiciones siguientes proporcionan caracterizaciones de los puntos extremos y de la dimensión completa de los conjuntos convexos no vacíos en términos de los confines.

PROPOSICIÓN 2.13 *x es un punto extremo del conjunto convexo no vacío C si, y sólo si,*

$$x \in \operatorname{end}(C; u) \cup \operatorname{end}(C; -u) \tag{2.4}$$

para todo $u \neq 0_n$.

Demostración. Probaremos la equivalencia entre ambas negaciones para cualquier $x \in C$.

Si no se verifica (2.4) para cierto $u \neq 0_n$, entonces $\pm u \in D(C, x)$, por lo que deben existir $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $x + \varepsilon_1 u \in C$ y $x - \varepsilon_2 u \in C$. Entonces $x \in]x - \varepsilon_2 u, x + \varepsilon_1 u[\subset C$ y x no es un punto extremo de C.

Recíprocamente, si x no es un punto extremo de C, entonces existe $u \neq 0_n$, tal que $x \pm u \in C$, en cuyo caso $\pm u \in D(C, x)$ y no se verifica (2.4). ■

PROPOSICIÓN 2.14 *Dado un conjunto convexo no vacío C, se verifican las siguientes proposiciones:*

(i) $\operatorname{end}(C; u) = C$, *con* $u \neq 0_n$, *si, y sólo si,* $u \notin (\operatorname{aff} C) - C$.

(ii) $\dim C < n$ *si, y sólo si, existe* $u \neq 0_n$ *tal que* $\operatorname{end}(C; u) = C$.

Demostración. (i) Si $\operatorname{end}(C; u) \neq C$ podemos tomar $x \in C \setminus \operatorname{end}(C; u)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $x + \varepsilon u \in C$. Entonces $\varepsilon u \in (\operatorname{aff} C) - C$ y, por lo tanto, $u \in (\operatorname{aff} C) - C$.

Recíprocamente, asumamos que $u \neq 0_n$ satisface $u \in (\operatorname{aff} C) - C$. Tomando un punto arbitrario $x \in \operatorname{rint} C$, por la Proposición 0.7, $(\operatorname{aff} C) - C = \operatorname{span}(C - x)$ y $0_n \in \operatorname{rint}(C - x)$. Por lo tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon u \in C - x$ y $u \in D(C, x)$. Entonces, $x \in C \setminus \operatorname{end}(C; u)$.

(ii) Puesto que $(\operatorname{aff} C) - C = \operatorname{span}(C - x)$ cualquiera que sea $x \in \operatorname{rint} C$, $\dim C < n$ si, y sólo si, existe $u \neq 0_n$ tal que $u \notin \operatorname{span}(C - x) = (\operatorname{aff} C) - C$ o, equivalentemente (por la parte (i)), $\operatorname{end}(C; u) = C$. ■

La siguiente proposición establece condiciones suficientes para que un punto de C sea punto extremo o punto extremo expuesto.

PROPOSICIÓN 2.15 *Sea C un conjunto convexo no vacío. Si $\{\overline{x}\} = \operatorname{end}(C; u)$ para cierto $u \neq 0_n$, entonces $\overline{x} \in \operatorname{extr} C$. Si, además, C es cerrado, entonces $\overline{x}$ es punto extremo expuesto de C y $\dim C \leq 1$.*

Demostración. Si $\overline{x} \notin \operatorname{extr} C$, entonces existen dos puntos y, $z \in C$ y un escalar $0 < \lambda < 1$ tales que

$$\overline{x} = \lambda y + (1 - \lambda) z.$$

Dado que $y, z \notin \operatorname{end}(C; u)$ (pues $\operatorname{end}(C; u) = \{\overline{x}\}$), existen $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$ tales que $y + \varepsilon_1 u \in C$ y $z + \varepsilon_2 u \in C$. Por lo tanto,

$$\overline{x} + [\lambda \varepsilon_1 + (1 - \lambda)\varepsilon_2] u = \lambda(y + \varepsilon_1 u) + (1 - \lambda)(z + \varepsilon_2 u) \in C,$$

lo cual contradice que $\overline{x} \in \operatorname{end}(C; u)$.

Supongamos ahora que C es cerrado y $\{\overline{x}\} = \operatorname{end}(C;u)$. Si $C = \{\overline{x}\}$, es evidente que $\overline{x}$ es punto extremo expuesto de C y $\dim C = 0$.

Sea, pues, C un conjunto no singular. Probaremos, por reducción al absurdo, que $C - \overline{x} \subset \operatorname{span}\{u\}$.

En efecto, si $x \in C$ es tal que $x - \overline{x} \notin \operatorname{span}\{u\}$, se tiene que $x \notin \operatorname{end}(C;u)$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $x + \varepsilon u \in C$.

Consideremos el conjunto no vacío

$$L := \{\alpha \in \mathbb{R} \mid x + \alpha u \in C\}.$$

Dado que la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida como $\varphi(\alpha) = x + \alpha u$ es continua y $L = \varphi^{-1}(C)$, se tiene que L es cerrado. Entonces, se puede dar una de las dos situaciones siguientes:

(i) $\sup L = \max L = \overline{\alpha} > 0$, con lo que $x + \overline{\alpha}u \in C$ y

$$x + (\alpha + \overline{\alpha})u = (x + \overline{\alpha}u) + \alpha u \notin C,$$

para todo $\alpha > 0$. Por lo tanto, $x + \overline{\alpha}u \in \operatorname{end}(C;u)$ y $x + \overline{\alpha}u \neq \overline{x}$ (si fueran iguales, $x - \overline{x} \in \operatorname{span}\{u\}$), lo cual contradice la hipótesis $\operatorname{end}(C;u) = \{\overline{x}\}$.

(ii) $\sup L = +\infty$, con lo que $x + \varepsilon u \in C$ para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, $u \in O^+C$ y $\operatorname{end}(C;u) = \emptyset$, lo cual contradice de nuevo la hipótesis.

Concluimos, pues, que $C - \overline{x} \subset \operatorname{span}\{u\}$ y, por lo tanto, $\dim C \leq 1$. Es más, puesto que C no es singular, $\dim C = 1$.

Por otro lado, puesto que C es un conjunto convexo cerrado unidimensional contenido en $\overline{x} + \operatorname{span}\{u\}$ y $\overline{x} \in \operatorname{end}(C;u)$, C deberá ser la semirrecta $\{\overline{x} - \lambda u;\ \lambda \geq 0\}$ o un segmento $[\overline{x}, \overline{y}]$ con $\overline{y} = \overline{x} - \overline{\lambda}u$, para cierto $\overline{\lambda} > 0$. En ambos casos

$$C \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid u'(x - \overline{x}) = 0\} = \{\overline{x}\},$$

por lo que $\overline{x}$ es punto extremo expuesto de C. ■

La hipótesis $\operatorname{end}(C;u) = \{\overline{x}\}$ no implica que $\overline{x}$ sea punto extremo expuesto de C. En otras palabras, la condición de clausura (referida a C), en la segunda parte de la

Proposición 2.15, no es superflua. El siguiente ejemplo justifica esta afirmación.

EJEMPLO 2.16 Consideremos el conjunto C de soluciones del sistema

$$\left\{tx_1 + (1-t)x_2 > t - t^2, t \in]0,1[\,; x_1 > 0\right\},$$

representado en la Figura 2.3.

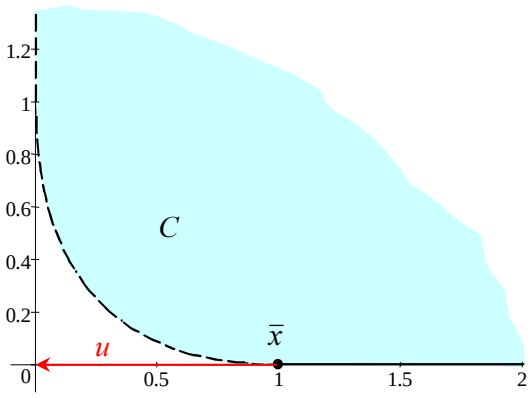

Figura 2.3

Si consideramos el punto $\overline{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y la dirección $u = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $\operatorname{end}(C;u) = \{\overline{x}\}$ y $\overline{x}$ es punto extremo de C, pero no es punto extremo expuesto. En efecto, el único hiperplano que soporta a C en el punto $\overline{x}$ es $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ y también contiene a todos los puntos del conjunto $]1, +\infty[\times \{0\} \subset C$.

El recíproco de la primera parte de la Proposición 2.15 no se verifica en general, como veremos en el siguiente ejemplo. Sin embargo, probaremos que sí se verifica para $\dim C \leq 1$.

EJEMPLO 2.17 Sea C el conjunto de soluciones del sistema

$$\left\{tx_1 + (1-t)x_2 > t - t^2, t \in]0,1[\right\},$$

representado en la Figura 2.4.

Los puntos x^1, $x^2 \in C$ son puntos extremos y, sin embargo, no existe ninguna dirección en la que el confín sea igual a uno de esos puntos. En efecto, cualquier vector no nulo, u, del primer cuadrante (incluidos los ejes) es una dirección de recesión, por lo que $\operatorname{end}(C;u) = \emptyset$. Las restantes elecciones del vector $u \neq 0_n$ dan lugar a los siguientes confines:

- Si $u \in]-\infty, 0[\times]0, +\infty[$, $\operatorname{end}(C;u) = \{0\} \times [1, +\infty[$.
- Si $u = \lambda\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, con $\lambda > 0$, $\operatorname{end}(C;u) = \{x^1\} \cup (\{0\} \times [1, +\infty[)$.

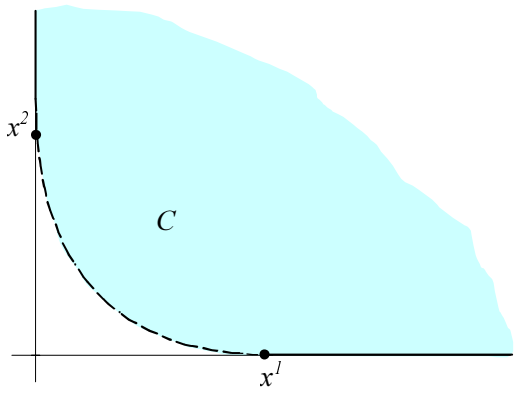

Figura 2.4

- Si $u \in]-\infty,0[\times]-\infty,0[$, $\operatorname{end}(C;u) = (\{0\} \times [1,+\infty[) \cup ([1,+\infty[\times \{0\})$.
- Si $u = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, con $\lambda > 0$, $\operatorname{end}(C;u) = \{x^2\} \cup ([1,+\infty[\times \{0\})$.
- Si $u \in]0,+\infty[\times]-\infty,0[$, $\operatorname{end}(C;u) = [1,+\infty[\times \{0\}$.

COROLARIO 2.18 *Sea C un conjunto convexo no vacío tal que $\dim C \leq 1$. Entonces, $\overline{x}$ es un punto extremo de C si, y sólo si, existe $u \neq 0_n$ tal que $\{\overline{x}\} = \operatorname{end}(C;u)$.*

Demostración. Si $\dim C = 0$, entonces $C = \{\overline{x}\}$ para cierto $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\operatorname{end}(C;u) = \{\overline{x}\}$, cualquiera que sea $u \neq 0_n$.

Si $\dim C = 1$, entonces $C - \overline{x} \subset \operatorname{span}\{v\}$ para cierto $v \neq 0_n$, es decir, $C \subset \{\overline{x} + \alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Puesto que $\overline{x} \in \operatorname{extr} C$, aplicando la Proposición 2.13, se tiene que $\overline{x} \in \operatorname{end}(C;v) \cup \operatorname{end}(C;-v)$ y se puede dar una de las dos situaciones siguientes:

(i) $\overline{x} \in \operatorname{end}(C;v)$ o, lo que es lo mismo, $v \notin D(C,\overline{x})$. En este caso, $\max\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \overline{x} + \alpha v \in C\} = 0$ y $\{\overline{x}\} = \operatorname{end}(C;v)$.

(ii) $\overline{x} \notin \operatorname{end}(C;v)$, en cuyo caso $\overline{x} \in \operatorname{end}(C;-v)$. Del mismo modo, $\max\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \overline{x} - \alpha v \in C\} = 0$ y $\{\overline{x}\} = \operatorname{end}(C;-v)$.

El recíproco es un caso particular de la Proposición 2.15. ■

PROPOSICIÓN 2.19 *Si C es un conjunto convexo no vacío tal que $\dim C \leq 1$, entonces existe $u \neq 0_n$ tal que $\operatorname{end}(C;u)$ es vacío o singular.*

Demostración. Si $\dim C = 0$, entonces $C = \{\overline{x}\}$ para cierto $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\operatorname{end}(C;u) = \{\overline{x}\}$, cualquiera que sea $u \neq 0_n$.

Si $\dim C = 1$, tomando $\overline{x} \in C$, se tiene que $C - \overline{x} \subset \operatorname{span}\{u\}$ para cierto $u \neq 0_n$. Por lo tanto, $C \subset \{\overline{x} + \alpha u \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ y se puede dar una de las dos situaciones siguientes:

(i) Existe un número real $\overline{\alpha} = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \overline{x} + \alpha u \in C\}$. Si $\overline{x} + \overline{\alpha} u \in C$, entonces

$$\{\overline{x} + \overline{\alpha} u\} = \operatorname{end}(C; u)$$

y $\operatorname{end}(C; u)$ es singular. De lo contrario, $\operatorname{end}(C; u) = \emptyset$.

(ii) $\sup\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \overline{x} + \alpha u \in C\} = +\infty$, con lo que $u \in O^+ C$ y $\operatorname{end}(C; u)$ es vacío. ■

2.3 Conexión del confín

Retomando el Ejemplo 2.17, podemos ver que si $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces

$$\operatorname{end}(C; u) = \left\{x^1\right\} \cup (\{0\} \times [1, +\infty[)\,,$$

que es la unión de dos cerrados disjuntos y, por lo tanto, no es un conjunto conexo.

Así pues, los confines de los conjuntos convexos no son necesariamente conexos. En el siguiente ejemplo veremos que también pueden ser conexos pero no conexos por arcos.

EJEMPLO 2.20 Sea X un subconjunto conexo de $[-1, 1]^2$ que no sea conexo por arcos. Consideremos la proyección estereográfica $\varphi : S_3 \backslash \{e^3\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, que asocia a $x \neq e^3$, la intersección de la semirrecta que sale de e^3 y pasa por x con el plano $x_3 = 0$, es decir

$$\varphi(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0\right)'.$$

Es bien sabido que φ establece un homeomorfismo entre $S_3 \backslash \{e^3\}$ y el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$, siendo fácil comprobar que la imagen mediante φ del hemisferio inferior, $\{x \in S_3 \mid x_3 \leq 0\}$, es el círculo $(\operatorname{cl} B_2) \times \{0\}$.

Puesto que $\|x\|_\infty \leq 1$ para cualquier $x \in X$, se tiene que $X \subset \sqrt{2} \operatorname{cl} B_2$, es decir, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} X \subset \operatorname{cl} B_2$.

$C := B_3 \cup \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X \times \{0\}\right)$ es un conjunto convexo (al ser el resultado de agregar a una bola abierta un subconjunto de la esfera correspondiente) para el cual

$$\operatorname{end}\left(C; -e^3\right) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X \times \{0\}\right),$$

que es homeomorfo a X y, por lo tanto, conexo, aunque no conexo por arcos.

Una posible elección para X es el conjunto

$$X := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \operatorname{sen}\frac{1}{x_1}, x_1 \in [-1,1] \setminus \{0\}\right\} \cup (\{0\} \times [-1,1]),$$

representado en la Figura 2.5.

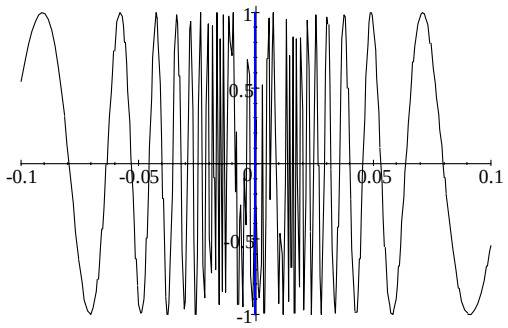

Figura 2.5

En cambio, para los conjuntos convexos cerrados, todo confín es conexo por arcos (y por lo tanto conexo), según veremos a continuación.

PROPOSICIÓN 2.21 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y $u \neq 0_n$ tal que $\operatorname{end}(C;u) \neq \emptyset$. Entonces $\operatorname{end}(C;u)$ es conexo por arcos.*

Demostración. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\operatorname{end}(C;u)$ contiene dos puntos distintos, $\overline{x}$ e $\overline{y}$. Probaremos la existencia de un arco contenido en $\operatorname{end}(C;u)$ que une $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Consideremos $f : C \to \mathbb{R}_+$ tal que, para $x \in C$,

$$f(x) := \max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid x + \lambda u \in C\}.$$

Puesto que u no es dirección de recesión (en caso contrario $\operatorname{end}(C;u) = \emptyset$) y C es cerrado, f está bien definida. Obviamente, $f(\overline{x}) = f(\overline{y}) = 0$.

Para probar que f es cóncava, consideremos $x \in C$, $y \in C$ y $\rho \in [0,1]$. Entonces, puesto que $x + f(x)\,u \in C$ e $y + f(y)\,u \in C$, se tiene

$$(1-\rho)\,x + \rho y + [(1-\rho)\,f(x) + \rho f(y)]\,u =$$

$$= (1-\rho)\,[x + f(x)\,u] + \rho\,[y + f(y)\,u] \in C,$$

de modo que

$$f((1-\rho)\,x + \rho y) \geq (1-\rho)\,f(x) + \rho f(y).$$

En consecuencia, la restricción de f al segmento $[\overline{x}, \overline{y}]$ es cóncava y, por lo tanto, continua en el interior de su dominio, es decir, en $]\overline{x}, \overline{y}[$. Probaremos, a continuación, su continuidad en $\overline{x}$ (la prueba es la misma en $\overline{y}$).

Supongamos que $\lim\limits_{x \to \overline{x}} f(x) \neq f(\overline{x}) = 0$. En tal caso, existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{x^r\}_{r \in \mathbb{N}} \subset]\overline{x}, \overline{y}[$ tal que $\lim\limits_{r} x^r = \overline{x}$ y $f(x^r) \geq \varepsilon$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Para cada $r \in \mathbb{N}$ se tiene que $x^r + f(x^r)\,u \in C$, de modo que

$$x^r + \varepsilon u \in [x^r, x^r + f(x^r)\,u] \subset C$$

y, puesto que C es cerrado, se obtiene $\overline{x} + \varepsilon u = \lim\limits_{r} (x^r + \varepsilon u) \in C$, lo cual contradice que $\overline{x} \in \operatorname{end}(C; u)$.

Por lo tanto, la función $\varphi : [\overline{x}, \overline{y}] \to \operatorname{end}(C; u)$ definida como $\varphi(x) := x + f(x)\,u$ es continua y satisface $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$ y $\varphi(\overline{y}) = \overline{y}$. Se concluye que $\{\varphi(x) \mid x \in [\overline{x}, \overline{y}]\}$ es la curva buscada. ■

Como consecuencia de la conexión por arcos de los confines no vacíos de los conjuntos convexos cerrados, se obtiene la conexión de la frontera de ciertos conjuntos convexos compactos. Dicha propiedad es trivial cuando la dimensión es menor que n (ya que cualquier conjunto convexo es conexo por arcos). Por lo tanto, analizaremos la conexión de la frontera relativa. Para ello necesitamos el siguiente lema.

LEMA 2.22 *Sea C un conjunto convexo no vacío, $Y \subset \mathbb{R}^n$ y $u \in \operatorname{cone} Y$, $u \neq 0_n$. Si $x \in \operatorname{end}(C; u)$, entonces $x \in \operatorname{end}(C; y)$ para un cierto $y \in Y \setminus \{0_n\}$.*

Demostración. Supongamos que $x \notin \operatorname{end}(C, y)$ para todo $y \in Y \setminus \{0_n\}$ y sea

$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y^i$, con $\lambda_i > 0$ e $y^i \in Y \setminus \{0_n\}$, $i = 1, \ldots, p$.

Puesto que $x \notin \operatorname{end}(C, y^i)$, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $x + \varepsilon_i y^i \in C$, $i = 1, \ldots, p$. Definiendo $\mu := \min \left\{ \dfrac{\varepsilon_i}{\lambda_i},\ i = 1, \ldots, p \right\} > 0$, se tiene

$$x + \mu\lambda_i y^i \in \left[x, x + \varepsilon_i y^i\right] \subset C,\ i = 1, \ldots, p,$$

y, por lo tanto, su media aritmética $x + \dfrac{\mu}{p} u \in C$. Por lo tanto, $u \in D(C, x)$, lo cual contradice la hipótesis $x \in \operatorname{end}(C; u)$. ■

PROPOSICIÓN 2.23 *Sea C un conjunto convexo compacto no vacío. Entonces* $\operatorname{rbd} C$ *es conexa por arcos (conexa) si, y sólo si,* $\dim C \neq 1$.

Demostración. Si $\dim C = 1$, entonces $C = [x, y]$ para dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$, de modo que $\operatorname{rbd} C = \{x, y\}$ ni siquiera es conexa.

Para demostrar el recíproco podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\dim C \geq 2$. Probaremos que

$$\operatorname{rbd} C = \cup \{\operatorname{end}(C; u),\ u \in S_n \cap [(\operatorname{aff} C) - C]\} \tag{2.5}$$

(véase Corolario 2.10) es conexo por arcos. Sea $\left\{u^1, \ldots, u^d\right\}$ una base ortonormal de $(\operatorname{aff} C) - C$ y sea $u^{d+1} := -\sum_{i=1}^{d} u^i/\sqrt{d} \in S_n \cap [(\operatorname{aff} C) - C]$. Puesto que

$$S_n \cap [(\operatorname{aff} C) - C] \subset \operatorname{span}\left\{u^1, \ldots, u^d\right\} = \operatorname{cone}\left\{u^1, \ldots, u^{d+1}\right\},$$

se obtiene, de (2.5) y del Lema 2.22,

$$\operatorname{rbd} C = \bigcup_{i=1}^{d+1} \operatorname{end}\left(C; u^i\right).$$

Por lo tanto, $\operatorname{rbd} C$ es unión de $d + 1$ conjuntos que son conexos por arcos (Proposición 2.21), por lo que bastará probar que

$$\operatorname{end}\left(C; u^i\right) \cap \operatorname{end}\left(C; u^{i+1}\right) \neq \emptyset,\ i = 1, \ldots, d.$$

Si $i \in \{1, \ldots, d-1\}$, consideremos una solución óptima, x^i, del problema

$$\operatorname{Inf} -\left(u^i + u^{i+1}\right)' x \ \text{ s.a } \ x \in C,$$

(dicha solución existe por ser continua la función objetivo y ser compacto el conjunto factible). Dicho punto satisface $-\left(u^i + u^{i+1}\right)'(x - x^i) \geq 0$ para todo $x \in C$, mientras

que $-\left(u^i + u^{i+1}\right)' u^j = -1$, $j = i, i+1$. Por lo tanto $x^i \in \operatorname{end}(C; u^j)$, $j = i, i+1$, de acuerdo con la Proposición 2.4. En consecuencia,

$$\operatorname{end}\left(C; u^i\right) \cap \operatorname{end}\left(C; u^{i+1}\right) \neq \emptyset,\ i = 1, \ldots, d-1.$$

Finalmente, sea x^d una solución óptima del problema

$$\operatorname{Inf}\left(\sum_{i=1}^{d-1} u^i - \frac{u^d}{2}\right)' x \ \text{ s.a } \ x \in C.$$

Puesto que

$$\left(\sum_{i=1}^{d-1} u^i - \frac{u^d}{2}\right)' \left(x - x^d\right) \geq 0$$

para todo $x \in C$ y

$$\left(\sum_{i=1}^{d-1} u^i - \frac{u^d}{2}\right)' u^j < 0,\ j = d, d+1,$$

se obtiene, de nuevo por la Proposición 2.4,

$$\operatorname{end}\left(C; u^d\right) \cap \operatorname{end}\left(C; u^{d+1}\right) \neq \emptyset. \qquad \blacksquare$$

La demostración que acabamos de realizar se puede considerar como una mera aplicación del confín al análisis convexo, ya que existen demostraciones alternativas más cortas. Por ejemplo, se puede demostrar considerando que C es un cuerpo convexo compacto en $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$, eligiendo un punto cualquiera $a \in \operatorname{int} C$ y definiendo la transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(x) = \dfrac{x-a}{\|x-a\|}$ si $x \in \operatorname{bd} C$ y $T(a + \lambda(x-a)) = \lambda T(x)$ si $\lambda \in [0,1]$. Dado que T es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ que lleva la frontera de C en la esfera S_n (que es conexa por arcos), resulta que $\operatorname{bd} C$ también es conexo por arcos.

2.4 El confín y la iluminación de los conjuntos convexos cerrados

Los siguientes conceptos son extensiones naturales para conjuntos convexos

cerrados de los dados por Boltyanski [8] y por Soltan [34] para cuerpos convexos compactos y cuerpos convexos, respectivamente.

Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0_n$. Dado $x \in \operatorname{rbd} C$, se dice que x *está iluminado por* u si $\{x + \lambda u \mid \lambda > 0\} \cap \operatorname{rint} C \neq \emptyset$. Del mismo modo, diremos que $x \in \operatorname{rbd} C$ *es visible en la dirección* u si $\{x - \lambda u \mid \lambda > 0\} \cap C = \emptyset$.

Denotaremos por $\operatorname{ill}(C;u)$ (por $\operatorname{vis}(C;u)$) el conjunto de puntos de la frontera relativa de C que están iluminados por $u \neq 0_n$ (visibles en la dirección $u \neq 0_n$, respectivamente).

La siguiente proposición establece relaciones entre los conjuntos que acabamos de definir y los confines.

PROPOSICIÓN 2.24 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0_n$. Entonces, se verifican las siguientes proposiciones:*

(i) $\operatorname{ill}(C;u) \subset \operatorname{vis}(C;u) \subset \operatorname{end}(C;-u)$;

(ii) $\operatorname{ill}(C;u) \neq \emptyset$ *si, y sólo si,* $u \in [(\operatorname{aff} C) - C] \setminus (-O^+C)$; y

(iii) $\operatorname{vis}(C;u) = \operatorname{end}(C;-u)$ *si, y sólo si,* $u \in (\operatorname{aff} C) - C$.

Demostración. (i) Si $x \in \operatorname{ill}(C;u) \setminus \operatorname{vis}(C;u)$, entonces existen $\lambda_1 > 0$ tal que $x + \lambda_1 u \in \operatorname{rint} C$ y $\lambda_2 > 0$ tal que $x - \lambda_2 u \in C$. Como consecuencia del Lema de Accesibilidad (Proposición 0.2(iii)), se tiene

$$x \in]x + \lambda_1 u, x - \lambda_2 u[\subset \operatorname{rint} C,$$

lo que contradice la hipótesis.

La inclusión $\operatorname{vis}(C;u) \subset \operatorname{end}(C;-u)$ es consecuencia directa de las definiciones de ambos conjuntos.

(ii) Si $\operatorname{ill}(C;u)$ es no vacío, entonces existen $x \in \operatorname{rbd} C$ y $\mu > 0$ tales que $\overline{x} := x + \mu u \in \operatorname{rint} C$. Por lo tanto, $u = \dfrac{1}{\mu}(\overline{x} - x) \in (\operatorname{aff} C) - C$.

Por otra parte, si $-u \in O^+C$, entonces $x - \mu u \in C$ y, por el Lema de Accesibilidad, se tiene

$$x \in]x + \mu u, x - \mu u[\subset \operatorname{rint} C,$$

en contra de la hipótesis. Por lo tanto, $u \in [(\operatorname{aff} C) - C] \setminus (-O^+C)$.

Recíprocamente, si $u \in [(\operatorname{aff} C) - C] \setminus (-O^+C)$ y tomamos un punto arbitrario $x \in \operatorname{rint} C$, entonces existe $\mu > 0$ tal que $x - \mu u \in C$. Sea

$$\varepsilon = \max \{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid x - \lambda u \in C\} > 0$$

(dicho máximo se alcanza por ser $-u \notin O^+C$ y C cerrado y es positivo por ser $\varepsilon \geq \mu$) y sea $\overline{x} := x - \varepsilon u \in C$. De nuevo por el Lema de Accesibilidad, se tiene que $]\overline{x}, x[\subset \operatorname{rint} C$ y, por lo tanto,

$$\emptyset \neq]\overline{x}, x[\subset \{\overline{x} + \lambda u \mid \lambda > 0\} \cap \operatorname{rint} C. \tag{2.6}$$

Dado que $-u \notin D(C, \overline{x})$, se cumple que $\overline{x} \in \operatorname{end}(C; -u) \subset \operatorname{rbd} C$ (véase Corolario 2.10 (iii)) y esto, junto con (2.6), implica que $\overline{x} \in \operatorname{ill}(C; u)$.

(iii) Si $u \notin (\operatorname{aff} C) - C$, entonces $-u \notin (\operatorname{aff} C) - C$ y, por la Proposición 2.14, $\operatorname{end}(C; -u) = C$. Entonces, se tiene

$$\operatorname{vis}(C; u) \subset \operatorname{rbd} C \subsetneq C = \operatorname{end}(C; -u),$$

lo que contradice la hipótesis.

Probaremos el recíproco viendo que $\operatorname{end}(C; -u) \subset \operatorname{vis}(C; u)$ para cualquier vector no nulo $u \in (\operatorname{aff} C) - C$.

En efecto, si $x \in \operatorname{end}(C; -u)$, por ser $-u \in (\operatorname{aff} C) - C$ y por el Corolario 2.10, se tiene que $x \in \operatorname{rbd} C$. Además, $-u \notin D(C, x)$ por lo que $\{x - \lambda u \mid \lambda > 0\} \cap C = \emptyset$ y $x \in \operatorname{vis}(C; u)$. ■

Nótese que $\operatorname{vis}(C; u) \neq \emptyset$ es conexo por arcos cuando $u \in (\operatorname{aff} C) - C$ (ya que $\operatorname{vis}(C; u) = \operatorname{end}(C; -u)$, conexo por arcos por la Proposición 2.21). Si $u \notin (\operatorname{aff} C) - C$, entonces $\operatorname{vis}(C; u) = \operatorname{rbd} C$ que, como veremos en el Capítulo 3, es conexo por arcos siempre que C no sea un sandwich.

La primera inclusión en la Proposición 2.24 (i) puede ser estricta. Por ejemplo, si $C = [0, 1]^2$, $\operatorname{ill}(C; e^1) = \{0\} \times]0, 1[$ mientras que $\operatorname{vis}(C; e^1) = \{0\} \times [0, 1]$. Sin embargo, como veremos en la siguiente proposición, ambos conjuntos están bastante próximos.

PROPOSICIÓN 2.25 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y consideremos* $\operatorname{rbd} C$ *dotado de la topología inducida por la norma Euclídea de* $\mathbb{R}^n$. *Si* $\operatorname{ill}(C;u) \neq \emptyset$, *entonces* $\operatorname{ill}(C;u)$ *es abierto, conexo por arcos y denso en* $\operatorname{vis}(C;u)$.

Demostración. Sea $\overline{x} \in \operatorname{ill}(C;u)$ y sea $\lambda > 0$ tal que $\overline{x} + \lambda u \in \operatorname{rint} C$. Sea $\rho > 0$ tal que $(\overline{x} + \lambda u + \rho B_n) \cap \operatorname{aff} C \subset \operatorname{rint} C$. Dado $x \in \operatorname{rbd} C$ tal que $\|x - \overline{x}\| < \rho$, se puede ver fácilmente que $x + \lambda u \in (\overline{x} + \lambda u + \rho B_n) \cap \operatorname{aff} C \subset \operatorname{rint} C$, de modo que $x \in \operatorname{ill}(C;u)$. Por lo tanto, $\operatorname{ill}(C;u)$ es abierto en $\operatorname{rbd} C$.

Sea, ahora, $x^i \in \operatorname{ill}(C;u)$, $i = 1, 2$. La función $\Psi : [x^1, x^2] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

$$\Psi(x) = \max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid x - \lambda u \in C\}$$

está bien definida porque $-u \in [(\operatorname{aff} C) - C] \setminus (O^+ C)$ (en otro caso $\operatorname{ill}(C;u) = \emptyset$) y C es cerrado. Además, Ψ es continua (retomemos la demostración de la Proposición 2.21), $\Psi(x^1) = \Psi(x^2) = 0$ y $x - \Psi(x)\, u \in \operatorname{end}(C;-u) \subset \operatorname{rbd} C$ para todo $x \in [x^1, x^2]$, por el Corolario 2.10. Tenemos que demostrar que $x - \Psi(x)\, u \in \operatorname{ill}(C;u)$ para todo $x \in\,]x^1, x^2[$. De hecho, si $x = (1-\mu)\, x^1 + \mu x^2$, con $0 < \mu < 1$, y $x^i + \lambda_i u \in \operatorname{rint} C$, con $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, entonces

$$[x - \Psi(x)\, u] + [(1-\mu)\, \lambda_1 + \mu\lambda_2 + \Psi(x)]\, u =$$

$$= (1-\mu)\left(x^1 + \lambda_1 u\right) + \mu\left(x^2 + \lambda_2 u\right) \in \operatorname{rint} C,$$

con $(1-\mu)\, \lambda_1 + \mu\lambda_2 + \Psi(x) > 0$, de modo que $x - \Psi(x)\, u \in \operatorname{ill}(C;u)$. Por lo tanto, $\{x - \Psi(x)\, u \mid x \in [x^1, x^2]\}$ es un arco contenido en $\operatorname{ill}(C;u)$ que conecta x^1 y x^2.

Finalmente, dado $x^1 \in \operatorname{vis}(C;u)$, tomemos un $x^2 \in \operatorname{ill}(C;u)$ arbitrario, $x^2 \neq x^1$, y consideremos de nuevo la función Ψ. Probaremos que, para todo $x \in\,]x^1, x^2[$, $x - \Psi(x)\, u \in \operatorname{ill}(C;u)$.

Sea $x^2 + \lambda_2 u \in \operatorname{rint} C$, con $\lambda_2 > 0$. Entonces, si $x = (1-\mu)\, x^1 + \mu x^2$, con $0 < \mu < 1$, el lema de accesibilidad establece que

$$[x - \Psi(x)\, u] + [\mu\lambda_2 + \Psi(x)]\, u = (1-\mu)\, x^1 + \mu\left(x^2 + \lambda_2 u\right) \in \operatorname{rint} C,$$

con $\mu\lambda_2 + \Psi(x) > 0$.

Por lo tanto, $x^1 = \lim\limits_{x \to x^1} (x - \Psi(x)\, u) \in \operatorname{cl} \operatorname{ill}(C;u)$. ■

Nótese que, en la demostración de la conexión por arcos de $\operatorname{ill}(C;u)$ y de su densidad en $\operatorname{vis}(C;u)$, hemos considerado $\operatorname{ill}(C;u)$ no singular. Si fuese un conjunto singular, $\operatorname{rbd} C = \operatorname{ill}(C;u) = \operatorname{vis}(C;u)$ y se cumpliría trivialmente la proposición.

De la Proposición 2.25, $\operatorname{ill}(C;u) \subset \operatorname{int}\operatorname{vis}(C;u)$ mientras que la inclusión inversa también es cierta cuando $\operatorname{ill}(C;u) \neq \emptyset$.

PROPOSICIÓN 2.26 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y consideremos $\operatorname{rbd} C$ dotado de la topología inducida por la norma Euclídea de $\mathbb{R}^n$. Si $\operatorname{ill}(C;u) \neq \emptyset$, entonces $\operatorname{ill}(C;u) = \operatorname{int}\operatorname{vis}(C;u)$.*

Demostración. Sea $\overline{x} \in \operatorname{int}\operatorname{vis}(C;u) \setminus \operatorname{ill}(C;u)$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$(\overline{x} + \varepsilon B_n) \cap \operatorname{rbd} C \subset \operatorname{vis}(C;u). \tag{2.7}$$

Tomando $\overline{\lambda} := \dfrac{\varepsilon}{\|u\|}$, se tiene que $\overline{x} + \lambda u \in (\overline{x} + \varepsilon B_n)$, para todo $0 < \lambda < \overline{\lambda}$, y, si suponemos que $\overline{x} + \lambda u \in \operatorname{rbd} C$, entonces, de acuerdo con (2.7), $\overline{x} + \lambda u \in \operatorname{vis}(C;u)$, lo cual se contradice con $\overline{x} \in C$. Por lo tanto, $\overline{x} + \lambda u \notin \operatorname{rbd} C$ para todo $\lambda \in \left]0, \overline{\lambda}\right[$.

Como, por otra parte, $\overline{x} + \lambda u \notin \operatorname{rint} C$ (pues $\overline{x} \notin \operatorname{ill}(C;u)$), se concluye que $\overline{x} + \lambda u \notin C$ para todo $\lambda \in \left]0, \overline{\lambda}\right[$ y, como consecuencia, $\overline{x} \in \operatorname{end}(C;u)$ y $u \notin O^+C$.

Sea $y \in \operatorname{ill}(C;u)$. Puesto que u no es dirección de recesión y C es cerrado, podemos considerar la restricción, al segmento $[y, \overline{x}]$, de la aplicación de la Proposición 2.21, es decir, $f_{|[y,\overline{x}]} : [y, \overline{x}] \to \mathbb{R}_+$ tal que, para $x \in [y, \overline{x}]$,

$$f(x) := \max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid x + \lambda u \in C\}.$$

Dado que $f(\overline{x}) = 0$ y f es continua en $\overline{x}$ (véase la demostración de la Proposición 2.21), se cumple que $\lim\limits_{x \to \overline{x}} (x + f(x)\, u) = \overline{x}$ por lo que, para x suficientemente próximo a $\overline{x}$, se tiene $x + f(x)\, u \in (\overline{x} + \varepsilon B_n)$. Además, por la propia definición de f, se tiene que $x + f(x)\, u \in \operatorname{end}(C;u) \subset \operatorname{rbd} C$, de modo que

$$x + f(x)\, u \in (\overline{x} + \varepsilon B_n) \cap \operatorname{rbd} C$$

y, sin embargo, $x + f(x)\, u \notin \operatorname{vis}(C;u)$, lo que se contradice con (2.7). ■

COROLARIO 2.27 *Si C es un cuerpo convexo y $u \notin O^+C$, entonces $\operatorname{end}(C;u) = \operatorname{vis}(C;-u)$ y $\operatorname{int}\operatorname{end}(C;u) = \operatorname{ill}(C;-u)$. Además, $\operatorname{end}(C;u)$ es cerrado si, y sólo si, $\operatorname{end}(C;u) = \operatorname{cl}\operatorname{ill}(C;-u)$.*

Demostración. Al ser C un cuerpo convexo, $(\operatorname{aff} C) - C = \mathbb{R}^n$, por lo que la hipótesis $u \notin O^+C$ implica que $-u \in [(\operatorname{aff} C) - C] \setminus (-O^+C)$ o, lo que es lo mismo, $\operatorname{ill}(C; -u) \neq \emptyset$ (Proposición 2.24 (ii)) y $\operatorname{vis}(C; -u) = \operatorname{end}(C; u)$ (Proposición 2.24 (iii)). Partiendo de estos dos resultados y aplicando la Proposición 2.26, se obtiene

$$\operatorname{ill}(C; -u) = \operatorname{int} \operatorname{vis}(C; -u) = \operatorname{int} \operatorname{end}(C; u).$$

Por otra parte, por la Proposición 2.25, $\operatorname{ill}(C; -u)$ es denso en $\operatorname{vis}(C; -u) = \operatorname{end}(C; u)$, por lo que

$$\operatorname{end}(C; u) \subset \operatorname{cl} \operatorname{ill}(C; -u) \subset \operatorname{cl} \operatorname{end}(C; u),$$

de donde se deduce la última parte de la proposición. ■

Acabaremos esta sección con algunos comentarios acerca de combinatoria geométrica en conjuntos convexos cerrados.

Dado $x \in \operatorname{rbd} C$, si $y \in \operatorname{rint} C$, entonces $x \in \operatorname{ill}(C; y - x)$. Por lo tanto, $\{\operatorname{ill}(C; u) \mid u \neq 0_n\}$ es un recubrimiento abierto de $\operatorname{rbd} C$.

Denotemos por $b(C)$ el mínimo número de direcciones que iluminan C (es decir, todos los puntos de $\operatorname{rbd} C$) y por $u(C)$ el mínimo número de direcciones en las que es visible C. Si $e(C)$ es el mínimo número de confines que cubren $\operatorname{bd} C$, entonces $e(C) = 1$ si $\dim C < n$ (véase Proposición 2.14 (ii)) y $e(C) \leq u(C) \leq b(C)$ para todo conjunto convexo cerrado C (consecuencia de la Proposición 2.24 (i)).

Por lo que respecta a $b(C)$, obsérvese que sólo las direcciones de $(\operatorname{aff} C) - C$ iluminan al menos un punto de $\operatorname{rbd} C$ y que

$$\{\operatorname{ill}(C; u) \mid u \in (\operatorname{aff} C) - C,\ u \neq 0_n\}$$

es una familia de conjuntos abiertos en $\operatorname{rbd} C$. Si C es compacto, $\operatorname{rbd} C$ es compacto también, de modo que $b(C) < \infty$. Puesto que $b(C) \geq n + 1$ para cuerpos convexos compactos [8], se obtiene $\dim C + 1 \leq b(C) < \infty$.

Alternativamente, si C es no acotado, es posible que $b(C) = \infty$ incluso para cuerpos convexos. Si $b(C) < \infty$, la conjetura de Soltan sobre la iluminación de cuerpos convexos no acotados [34] se puede reformular como $b(C) \leq 2^{\dim C - 1}$.

Por otra parte, $u(C) \leq 2$ si C es un cuerpo convexo [34] (obsérvese que $u(C) = 1$ si C es el epigrafo de una función cuadrática estrictamente convexa). En consecuencia, $e(C) \leq u(C) \leq 2$ para todo conjunto convexo cerrado C, es decir, bastan dos confines para cubrir la frontera o la frontera relativa de un conjunto convexo cerrado.

2.5 Algunas aplicaciones a los sistemas de desigualdades lineales

En esta sección, consideraremos sistemas en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$\sigma = \{a_t' x \geq b_t,\, t \in T\},$$

donde T es un conjunto arbitrario de índices (posiblemente infinito), $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T$. Al conjunto de soluciones de σ, que es un conjunto convexo cerrado, lo denotaremos por F.

A continuación, daremos dos propiedades geométricas de F (una de ellas para sistemas LFM) y una caracterización de los sistemas LOP, a través de los confines.

PROPOSICIÓN 2.28 *Sean $F \neq \emptyset$ y K, el conjunto de soluciones y el cono característico de $\sigma = \{a_t' x \geq b_t,\, t \in T\}$, respectivamente. Si $a_s' x \geq b_s$ (con $s \in T$) define un semiespacio soporte de F, entonces*

$$\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} \in \operatorname{end}\left(K; \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}\right). \tag{2.8}$$

El recíproco es cierto cuando F es compacto.

Demostración. Supongamos que $a_s \neq 0_n$, $a_s' x \geq b_s$ para todo $x \in F$ y $a_s' \overline{x} = b_s$ para cierto $\overline{x} \in F$.

Puesto que $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \geq 0$ para todo $t \in T$, $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = 1$ y $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} = 0$, la desigualdad $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \geq 0$ define un semiespacio soporte de K en $\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix}$.

Asumiendo que no se verifica (2.8), podemos escribir

$$\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_s \\ b_s + \gamma \end{pmatrix} \in K$$

para cierto $\gamma > 0$. Por lo tanto, $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a_s \\ b_s + \gamma \end{pmatrix} \geq 0$, es decir, $a_s'\overline{x} - b_s - \gamma = -\gamma \geq 0$, y se obtiene la contradicción deseada.

Asumamos, ahora, que se verifica (2.8). La compacidad de F implica (por la Proposición 0.19) que

$$\operatorname{int} K = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a'x > b \text{ para todo } x \in F \right\}.$$

Si $a_s'x \geq b_s$ no definiese un semiespacio soporte de F, entonces $a_s'x > b_s$ para todo $x \in F$, de modo que $\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} \in \operatorname{int} K$, lo que se contradice con (2.8). ■

El recíproco de la proposición anterior puede fallar si F no es compacto.

EJEMPLO 2.29 Consideremos el sistema

$$\sigma = \left\{ x_1 + tx_2 \geq \sqrt{t},\, t \in [0,1] \right\},$$

cuyo conjunto de soluciones está representado en la Figura 2.6, y tomemos el índice $s = 0$, que no define un semiespacio soporte de F.

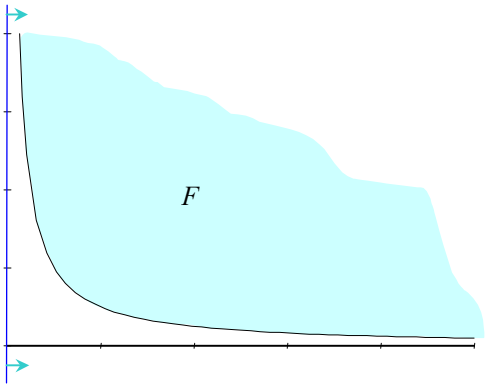

Figura 2.6

El cono característico del sistema es

$$K = \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}, t \in [0,1]\,; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Veremos que,

$$\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{end} \left(K; \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

En efecto, si tomamos cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \notin K$$

pues, de lo contrario,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \sum_{t\in[0,1]} \lambda_t \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ y $\gamma \in \mathbb{R}_+$. De (2.9) se obtiene

$$\sum_{t\in[0,1]} \lambda_t = 1, \quad \sum_{t\in[0,1]} \lambda_t t = 0 \text{ y } \sum_{t\in[0,1]} \lambda_t \sqrt{t} - \gamma = \varepsilon,$$

de donde se deduce que

$$\lambda_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases} \quad \text{y } -\gamma = \varepsilon,$$

con lo que γ resulta ser negativo.

PROPOSICIÓN 2.30 *Sea $F \neq \emptyset$ el conjunto de soluciones de un sistema $\sigma = \{a_t'x \geq b_t,\ t \in T\}$ tal que $a_t \neq 0_n$ para todo $t \in T$. Se cumple:*

(i) *Si $T_c \neq \emptyset$, entonces $F = \operatorname{end}(F;u) = \operatorname{end}(F;-u)$ para cierto $u \neq 0_n$.*

(ii) *Si $F = \operatorname{end}(F;u) = \operatorname{end}(F;-u)$ para algún $u \neq 0_n$ y σ es LFM, entonces $T_c \neq \emptyset$.*

Demostración. (i) Sea $s \in T_c$ y tomemos $\overline{x} \in F$ arbitrariamente. Dado que $a_s'(x - \overline{x}) = 0$ para todo $x \in F$, se tiene que $a_s \in [(\operatorname{aff} F) - F]^{\perp}$, $a_s \neq 0_n$, de modo que $\pm a_s \notin (\operatorname{aff} F) - F$ y $\operatorname{end}(F;a_s) = \operatorname{end}(F;-a_s) = F$ de acuerdo con la Proposición 2.14 (i).

(ii) Sea $F = \operatorname{end}(F;u) = \operatorname{end}(F;-u)$, $u \neq 0_n$. Puesto que $\dim F < n$ (por la afirmación (ii) de la Proposición 2.14), existe $v \neq 0_n$ tal que $v'(x - \overline{x}) = 0$ para todo $x \in F$, siendo $\overline{x}$ un punto arbitrario de F. Entonces $\pm v'(x - \overline{x}) \geq 0$ son semiespacios soporte de F en $\overline{x}$, y existe un conjunto finito de índices $S \subset T$ tal que ambas desigualdades son consecuencia de $\{a_t'x \geq b_t \mid t \in S\}$. De acuerdo con el Lema de Farkas no homogéneo, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} v \\ v'\overline{x} \end{pmatrix} = \sum_{t\in S} \lambda_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

y

$$-\begin{pmatrix} v \\ v'\overline{x} \end{pmatrix} = \sum_{t\in S} \gamma_t \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

con $\mu \geq 0$, $\delta \geq 0$, $\lambda_t \geq 0$ para todo $t \in S$ y $\gamma_t \geq 0$ para todo $t \in S$, no todos nulos.

De (2.10) y (2.11) se sigue que

$$(\mu + \delta) \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{t\in S} (\lambda_t + \gamma_t) \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \in K, \tag{2.12}$$

de modo que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in K$ si $\mu + \delta > 0$. Aplicando, de nuevo, el Lema de Farkas, se obtiene, para todo $x \in F$, la relación absurda $0_n' x \geq 1$.

Por lo tanto, $\mu = \delta = 0$ y (2.12) se convierte en

$$\sum_{t\in S} (\lambda_t + \gamma_t) \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = 0_{n+1}.$$

Si $\lambda_s + \gamma_s > 0$, entonces,

$$-\begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} = \sum_{t\in S\setminus\{s\}} \frac{\lambda_t + \gamma_t}{\lambda_s + \gamma_s} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \in K,$$

de modo que $a_s' x \leq b_s$ es consecuencia de σ (de nuevo por el Lema de Farkas no homogéneo). Por lo tanto, $a_s' x = b_s$ para todo $x \in F$ y $s \in T_c$. ■

La condición de que σ es LFM en (ii) no es supérflua. Podemos verlo en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.31 Consideremos el sistema

$$\sigma = \left\{ x_2 \geq \frac{-1}{r},\ r \in \mathbb{N};\ -x_2 \geq \frac{-1}{r},\ r \in \mathbb{N};\ x_1 - x_2 \geq 0 \right\},$$

cuyo conjunto factible está representado en la Figura 2.7.

Se trata de un sistema que no es LFM, pues la restricción $x_1 \geq 0$ define un hiperplano soporte de F, pero no es consecuencia de ningún subsistema finito de σ.

Si consideramos $a_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, se verifica que $\operatorname{end}(F; a_s) = \operatorname{end}(F; -a_s) = F$, pero no hay índices portadores.

PROPOSICIÓN 2.32 *Sea $F \neq \emptyset$ el conjunto de soluciones de un sistema $\sigma = \{a_t' x \geq b_t,\ t \in T\}$. Entonces, se verifica:*

(i) *Si $x \in F$ y $u \notin A(x)^o$, entonces $x \in \operatorname{end}(F; u)$.*

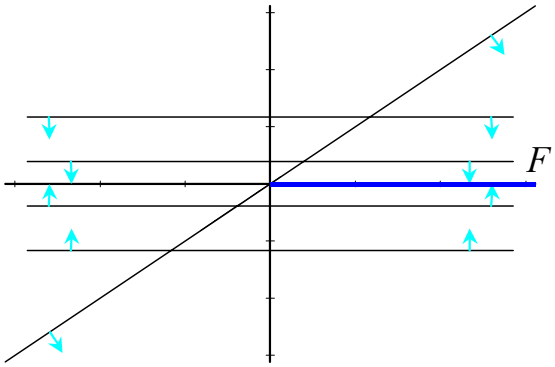

Figura 2.7

(ii) *σ es LOP si, y sólo si, $u \notin A(x)^o$ para todo par (x,u) tal que $x \in \operatorname{end}(F;u)$. En otras palabras, σ es LOP si, y sólo si, el recíproco de (i) se verifica en todos los puntos de F.*

Demostración. (i) Sean $\overline{x} \in F$ y $u \notin A(\overline{x})^o$. Entonces, existe un vector $y = \sum_{t \in T} \lambda_t a_t$, con $\lambda_t = 0$ para todo $t \notin T(\overline{x})$ y $\lambda_t \geq 0$ para todo $t \in T(\overline{x})$, satisfaciendo $y'u < 0$. Puesto que, para cualquier $x \in F$,

$$y'(x - \overline{x}) = \sum_{t \in T} \lambda_t a_t'(x - \overline{x}) = \sum_{t \in T} \lambda_t (a_t' x - b_t) \geq 0,$$

se concluye que y satisface (2.1) y, por tanto, $\overline{x} \in \operatorname{end}(F;u)$ de acuerdo con la Proposición 2.4.

(ii) Sea $x \in F$ y $u \neq 0_n$ tal que $x \in \operatorname{end}(F;u)$. Si σ es LOP, se verifica que $A(x)^o = D(F,x)$ y, puesto que $u \notin D(F,x)$, se tiene que $u \notin A(x)^o$.

Recíprocamente, dado $u \in A(x)^o$, la hipótesis implica que $x \notin \operatorname{end}(F;u)$, de modo que $u \in D(F,x)$. Por lo tanto, $A(x)^o \subset D(F,x)$ mientras que la inclusión opuesta siempre es cierta. Se obtiene, pues, $A(x)^o = D(F,x)$ para todo $x \in F$, por lo que σ es LOP. ■

Capítulo 3

Caracterización de familias de conjuntos cerrados convexos

3.1 Introducción

La caracterización de familias de conjuntos convexos cerrados puede ser útil desde diferentes puntos de vista. Un problema PSIL consiste en la minimización de un funcional lineal sobre un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^n$ que se describe por medio de infinitas desigualdades lineales. Si el conjunto factible es la suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio vectorial, veremos que la acotación del problema PSIL implica su resolubilidad. Por otra parte, asumiendo las hipótesis necesarias sobre el sistema de restricciones, es posible obtener un punto extremo del conjunto factible desde cualquier solución factible sin pérdida del objetivo (se pueden encontrar algoritmos de purificación en [3] y [19]) y después, comenzando en este punto extremo inicial, es posible construir una poligonal de aristas conectadas a lo largo de las cuales el funcional óptimo decrece (se ha propuesto un método simplex PSIL en [2]). Obviamente, la viabilidad de un algoritmo progresando sobre la frontera de la región factible requiere su conexión por arcos. En este capítulo caracterizaremos la clase de conjuntos convexos cerrados cuya frontera relativa es no vacía y conexa por

arcos (Sección 3.5).

Por otra parte, son problemas típicos de combinatoria geométrica, la caracterización de aquellos cuerpos convexos (conjuntos convexos cerrados de dimensión completa) para los cuales el mínimo número de puntos (o direcciones) que los iluminan en un cierto sentido tienen una expresión dada (véanse [27] y [28]).

Este capítulo trata sobre los diferentes modos de caracterizar familias de conjuntos convexos cerrados.

Cualquier conjunto convexo cerrado $C \subset \mathbb{R}^n$ admite diferentes representaciones. En primer lugar, C se puede descomponer como la suma de su espacio de linealidad, $\operatorname{lin} C$, con $C \cap (\operatorname{lin} C)^{\perp}$ (este es el cono apuntado de C, si C es un cono convexo). Este último conjunto es, a su vez, la suma de la envoltura convexa de su conjunto de puntos extremos, $E(C) \neq \emptyset$, con la envoltura convexa cónica de su conjunto de direcciones extremas, $D(C)$ [32, Th. 18.5], de modo que $C = \operatorname{lin} C + E(C) + D(C)$. El triplete $(\operatorname{lin} C, E(C), D(C))$ constituye la *representación interna* de C.

Por otra parte, C es el conjunto de soluciones de un cierto sistema semi-infinito lineal $\sigma = \{a_t' x \geq b_t,\ t \in T\}$, con $a_t \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in T$, el cual constituye una representación externa de C. Dicha representación no es única, pero el cono

$$K(C) = \operatorname{cl}\operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T;\ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

es el mismo para todas las representaciones externas de $C \neq \emptyset$, de modo que, el cono de referencia, $K(C)$, se puede considerar como una *representación cónica* de C. A partir de $K(C)$ se pueden obtener diferentes representaciones externas de C (por ejemplo, $\left\{ a'x \geq b,\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in I \right\}$, donde el conjunto de índices I es un subconjunto denso arbitrario de $K(C)$). Sin embargo, existe una correspondencia biyectiva entre los conjuntos convexos cerrados no vacíos de $\mathbb{R}^n$ y los conos convexos cerrados de $\mathbb{R}^{n+1}$ que contienen a $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$ pero no contienen a $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$ (sus correspondientes conos de referencia).

El interés de la representación cónica deriva del hecho de que $K(C)$ captura toda la información relevante sobre C. Por ejemplo, $\dim C = n - \dim \operatorname{lin}[K(C)]$ [19, Th. 5.8]) y el valor del problema de optimización $P(c) : \operatorname{Min} c'x \ \ s.a.\ \ x \in C$,

donde $c \in \mathbb{R}^n$, es $\sup\left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} c \\ \alpha \end{pmatrix} \in K(C)\right\}$ [19, Th. 8.1(ii)], de modo que las propiedades de $K(C)$ y $P(c)$ están íntimamente relacionadas unas con otras. Además, dos conjuntos convexos cerrados, C_1 y C_2, se pueden separar mediante un hiperplano si, y sólo si, $K(C_1) \cap [-K(C_2)]$ contiene al menos un rayo.

La unicidad, tanto de la representación interna como de la cónica, es una característica útil, de modo que grandes familias de conjuntos convexos cerrados no vacíos se pueden caracterizar por medio de las propiedades de sus correspondientes representaciones interna y cónica. Así, por ejemplo, resulta sencillo caracterizar la familia de los semiespacios cerrados.

PROPOSICIÓN 3.1 *Dado un conjunto convexo cerrado $C \neq \emptyset$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *C es un semiespacio;*

(ii) *$E(C)$ es singular,* $\dim D(C) = 1$ *y* $\dim(\operatorname{lin} C) = n - 1$*; y*

(iii) *$K(C)$ es un cono convexo cerrado y apuntado,* $\dim K(C) = 2$ *y* $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{rbd} K(C)$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x \geq b\},$$

con $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_n\}$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces, $\operatorname{lin} C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = 0\}$, por lo que $\dim(\operatorname{lin} C) = n - 1$ y $(\operatorname{lin} C)^{\perp} = \operatorname{span}\{a\}$.

Tomando $\overline{x} := \dfrac{b}{\|a\|^2} a$, resulta evidente que $\overline{x} \in C \cap (\operatorname{lin} C)^{\perp}$ y

$$\{\overline{x} + \lambda a,\ \lambda \geq 0\} \subset C \cap (\operatorname{lin} C)^{\perp}.$$

Para demostrar la inclusión contraria, tomamos $x \in C \cap (\operatorname{lin} C)^{\perp}$. Al ser $x - \overline{x} \in (\operatorname{lin} C)^{\perp}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x = \overline{x} + \lambda a$, pero, dado que $x \in C$, debe cumplirse

$$a'(\overline{x} + \lambda a) = b + \lambda \|a\|^2 \geq b,$$

por lo que $\lambda \geq 0$.

Así pues

$$E(C) + D(C) = C \cap (\operatorname{lin} C)^{\perp} = \{\overline{x} + \lambda a,\ \lambda \geq 0\},$$

de donde se obtiene $E(C) = \{\overline{x}\}$ y $D(C) = \operatorname{cone}\{a\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supongamos que $E(C) = \{\overline{x}\}$, $D(C) = \operatorname{cone}\{a\}$, $a \neq 0_n$, y $\dim(\operatorname{lin} C) = n - 1$. Como

$$\overline{x} + \operatorname{cone}\{a\} = C \cap (\operatorname{lin} C)^{\perp} \subset (\operatorname{lin} C)^{\perp}$$

y $\dim(\operatorname{lin} C)^{\perp} = 1$, se tiene

$$(\operatorname{lin} C)^{\perp} = \operatorname{span}\{a\}$$

y

$$\operatorname{lin} C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = 0\}.$$

Entonces, dado cualquier $x \in C$, $x = \overline{x} + \lambda a + z$ con $\lambda \geq 0$ y $a'z = 0$. Tomando $b := a'\overline{x}$, se obtiene

$$a'x = a'(\overline{x} + \lambda a + z) = b + \lambda \|a\|^2 \geq b,$$

por lo que, aplicando el Lema de Farkas, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K(C)$.

Probaremos que

$$K(C) = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}. \tag{3.1}$$

En efecto, si $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in K(C)$, entonces, de nuevo por el Lema de Farkas, $c'x \geq d$ para todo $x \in C$ y, en particular, $c'y \geq d$ para todo $y \in C \cap (\operatorname{lin} C)^{\perp}$. Tomando $y \in C \cap (\operatorname{lin} C)^{\perp}$ fijo y $z \in \operatorname{lin} C$ arbitrario, se tiene

$$c'(y + \alpha z) = c'y + \alpha c'z \geq d$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, de donde obtenemos que $c'z = 0$ para todo $z \in \operatorname{lin} C$. Así pues, $c \in (\operatorname{lin} C)^{\perp}$ y existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $c = \mu a$. En realidad, μ no puede ser negativo ya que, si lo fuese, $c'a = \mu \|a\|^2 < 0$ y, tomando $\lambda > \dfrac{d - c'\overline{x}}{\mu \|a\|^2} \geq 0$, se tendría

$$c'(\overline{x} + \lambda a) < d,$$

con $\overline{x} + \lambda a \in C$, contradiciéndose el hecho de que $c'x \geq d$ para todo $x \in C$. Así pues, $\mu \geq 0$.

Por otra parte, puesto que $\mu b = c'\overline{x} \geq d$, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (\mu b - d) \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por lo tanto, se cumple (3.1) y, dado que $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ son linealmente independientes, concluimos que $K(C)$ es un cono convexo cerrado apuntado bidimensional y $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{rbd} K(C)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que

$$K(C) = \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\},$$

con $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$ un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^{n+1}$. Puesto que $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in K(C)$, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

$\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$. Si fuesen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, por la Proposición 0.6, tendríamos $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{rint} K(C)$, lo que contradice la hipótesis.

Por lo tanto, podemos suponer $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ con $\beta > 0$ y

$$K(C) = \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

de modo que $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x \geq b\}$ es un semiespacio. ■

En la Tabla 3.1 se resume la información obtenida, en la proposición anterior, para los semiespacios cerrados y se recogen las caracterizaciones, ya conocidas [19, Ths. 5.8 y 5.13], de otras familias de conjuntos convexos cerrados. Dicha tabla podrá ir completándose con los resultados obtenidos, en las distintas secciones de este capítulo, para familias como la de las sumas de conjuntos convexos compactos con subespacios vectoriales (Sección 3.2), la de los símplices (Sección 3.3), sandwiches (Sección 3.4) o paralelotopos (Sección 3.6) (las tres subfamilias de la anterior), la de los conjuntos

continuos (Sección 3.7) o la de los cuerpos convexos suaves (Sección 3.8).

C	**Representación interna**	**Representación cónica**
semiespacio cerrado	$E(C)$ singular, $\dim D(C) = 1$, $\dim(\operatorname{lin} C) = n-1$	$K(C)$ apuntado, $\dim K(C) = 2$, $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{rbd} K(C)$
variedad afín	$E(C)$ singular, $D(C) = \{0_n\}$	El cono apuntado de $K(C)$ es $\operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$
conjunto convexo poliédrico	$E(C)$ polítopo, $D(C)$ poliédrico	$K(C)$ poliédrico
conjunto singular	$E(C)$ singular, $D(C) = \{0_n\}$, $\operatorname{lin} C = \{0_n\}$	$K(C)$ semiespacio
cuerpo convexo	$\dim(\operatorname{lin} C) + \dim[E(C) + D(C)] = n$	$K(C)$ apuntado

Tabla 3.1

En la última sección caracterizaremos algunas familias de cuerpos convexos utilizando ciertos conceptos de iluminación.

3.2 Caracterización de las sumas de conjuntos convexos compactos con subespacios vectoriales

PROPOSICIÓN 3.2 *Dado un conjunto convexo cerrado $C \neq \emptyset$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *C es la suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio vectorial;*

(ii) *$E(C)$ es compacto y $D(C) = \{0_n\}$;*

(iii) $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{rint} K(C)$*; y*

(iv) $(\operatorname{lin} C)^{\perp} = \Pi(K(C))$*, donde Π denota la proyección vertical*

$$\Pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Si $C = E + L$, con E conjunto convexo compacto y L subespacio vectorial, entonces $\lin C = L$ y $C \cap L^{\perp} = (E + L) \cap L^{\perp}$ es la proyección ortogonal de E sobre $L^{\perp}$, de modo que $C \cap L^{\perp}$ es compacto por ser la imagen continua de un conjunto compacto. Por lo tanto, $D(C) = \{0_n\}$ y $E(C) = C \cap L^{\perp}$ es compacto.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Asumamos que $C = E(C) + \lin C$, con $E(C)$ compacto, $E(C) \subset (\lin C)^{\perp}$. Si $\lin C = \mathbb{R}^n$, $C = \mathbb{R}^n$ y $K(C) = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, de modo que se verifica (iii).

Sea $\{u^1, \ldots, u^p\}$ una base ortonormal de $(\lin C)^{\perp} \neq \{0_n\}$ y sea $\rho > 0$ tal que $\|y\| \leq \rho$ para todo $y \in E(C)$.

Dado $x \in C$, podemos escribir $x = y + z$, $y \in E(C)$ y $z \in \lin C$, de modo que $|\pm x' u^j| = |\pm y' u^j| \leq \rho$ y $\pm x' u^j \geq -\rho$. Por lo tanto, $\begin{pmatrix} \pm u^j \\ -\rho \end{pmatrix} \in K(C)$, $j = 1, \ldots, p$ (por el Lema de Farkas).

Dado $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K(C)$, $a'x \geq b$ para todo $x \in C$. Si $z \in \lin C$, tomando un punto arbitrario $\overline{x} \in E(C)$, se tiene que $\overline{x} + \alpha z \in C$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo que $a'(\overline{x} + \alpha z) \geq b$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y esto implica que $a'z = 0$. Por lo tanto, $a \in (\lin C)^{\perp}$ y podemos escribir $a = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u^j$ para ciertos escalares $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, p$.

Puesto que

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = (2p\rho)^{-1} \sum_{j=1}^{p} \left[\begin{pmatrix} u^j \\ -\rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u^j \\ -\rho \end{pmatrix} \right],$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \begin{pmatrix} u^j \\ -\rho \end{pmatrix} - \left(b + \rho \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \right) \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \pm u^j \\ -\rho \end{pmatrix},\ j = 1, \ldots, p \right\},$$

y el último conjunto resulta ser $\operatorname{span} K(C)$. Por lo tanto, podemos aplicar la Proposición 0.6 para concluir que $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{rint} K(C)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Puesto que $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ es lineal y $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{rint} K(C)$, se tiene que $0_n \in \operatorname{rint} \Pi[K(C)]$ (Proposición 0.3), siendo $\Pi[K(C)]$ un cono convexo. Entonces $\Pi[K(C)]$ es subespacio vectorial.

Si $\Pi[K(C)] = \{0_n\}$, entonces $K(C) = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ y $C = \mathbb{R}^n$, de modo que

$\operatorname{lin} C = \mathbb{R}^n$ y $(\operatorname{lin} C)^{\perp} = \Pi\left[K\left(C\right)\right]$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\Pi\left[K\left(C\right)\right] \neq \{0_n\}$.

Sea $\{v^1, \ldots, v^q\}$ una base ortonormal del subespacio vectorial $\Pi\left[K\left(C\right)\right]$. Dado $k \in \{1, \ldots, q\}$, existen escalares α_k y β_k tales que

$$\begin{pmatrix} v^k \\ \alpha_k \end{pmatrix} \in K\left(C\right) \text{ y } \begin{pmatrix} -v^k \\ -\beta_k \end{pmatrix} \in K\left(C\right),$$

de manera que $\alpha_k \leq x' v^k \leq \beta_k$ para todo $x \in C$.

Probaremos que $\operatorname{lin} C = \left[\Pi\left[K\left(C\right)\right]\right]^{\perp}$.

En efecto, si $z \in \operatorname{lin} C$, tomando $\overline{x} \in C$ arbitrario, se tiene, para $k \in \{1, \ldots, q\}$, $\alpha_k \leq \left(\overline{x} + \alpha z\right)' v^k \leq \beta_k$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y esto implica $z' v^k = 0$. Por lo tanto, $\operatorname{lin} C \subset \{v^1, \ldots, v^q\}^{\perp} = \left[\Pi\left[K\left(C\right)\right]\right]^{\perp}$.

Recíprocamente, si $z \in \left[\Pi\left[K\left(C\right)\right]\right]^{\perp}$, entonces $a' z = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K\left(C\right)$ para cierto $b \in \mathbb{R}$. Puesto que

$$\left\{ a' x \geq b \mid \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K\left(C\right) \right\}$$

es una representación lineal de C, $\pm z$ es una solución del correspondiente sistema homogéneo, de manera que $\pm z \in O^{+} C$ y $z \in \operatorname{lin} C$.

Por lo tanto, $\left[\Pi\left[K\left(C\right)\right]\right]^{\perp} = \operatorname{lin} C$ y se verifica (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (i) Si $\Pi\left[K\left(C\right)\right] = \{0_n\}$, $C = \mathbb{R}^n$ y se verifica (i). Asumamos, pues, que $\dim \Pi\left[K\left(C\right)\right] = q$, $1 \leq q \leq n$.

Sea $\{v^1, \ldots, v^q\}$ una base ortonormal de $\Pi\left[K\left(C\right)\right]$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_q;\ \beta_1, \ldots, \beta_q$ escalares tales que $\alpha_k \leq x' v^k \leq \beta_k$, para todo $x \in C$, $k = 1, \ldots, q$.

Si $q = n$, C es compacto y se verifica (i).

En otro caso $(\operatorname{lin} C)^{\perp} = \Pi\left[K\left(C\right)\right] \neq \mathbb{R}^n$ y podemos seleccionar vectores $v^k \in \operatorname{lin} C$, $k = q+1, \ldots, n$, tales que $\{v^1, \ldots, v^n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Dado $x \in C \cap (\operatorname{lin} C)^{\perp}$, se tiene que $\alpha_k \leq x' v^k \leq \beta_k$, $k = 1, \ldots, q$ (puesto que $x \in C$) y $x' v^k = 0$, $k = q+1, \ldots, n$ (puesto que $x \in (\operatorname{lin} C)^{\perp}$). Por lo tanto $C \cap (\operatorname{lin} C)^{\perp}$ es compacto y $C = \left[C \cap (\operatorname{lin} C)^{\perp}\right] + \operatorname{lin} C$ es la descomposición buscada. ■

El siguiente resultado justifica el interés de esta clase de conjuntos convexos

cerrados en PSIL.

COROLARIO 3.3 *Sea C la suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio vectorial y sea $P(c) \equiv \operatorname{Inf} c'x$ s.a. $x \in C$. Si $P(c)$ es acotado, entonces es resoluble, discretizable y tiene salto de dualidad nulo.*

Demostración. Asumamos que C es la suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio vectorial. De acuerdo con la Proposición 3.2, podemos escribir $C = E(C) + \operatorname{lin} C$, con $E(C)$ compacto y $\Pi[K(C)] = (\operatorname{lin} C)^{\perp}$.

Sea $\sigma = \{a_t'x \geq b_t,\ t \in T\}$ cualquier representación externa de C y sea M el primer cono de momentos de σ. Dado $t \in T$, se tiene que $a_t = \Pi(a_t', b_t) \in \Pi[K(C)]$, de manera que $M \subset \Pi[K(C)]$. Por otra parte, si $z \in \Pi[K(C)]$, existe una sucesión

$$\{z^r\} \subset \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T;\ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

tal que $z_i = \lim_r z_i^r$, $i = 1, \ldots, n$. Para cada z^r existen $\lambda^r \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ y $\mu^r \geq 0$ tales que $z^r = \sum_{t \in T} \lambda_t^r \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + \mu^r \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$. Puesto que $\sum_{t \in T} \lambda_t^r a_t \in M$, $r = 1, 2, \ldots$, se tiene

$$z = \lim_r (z_1^r, \ldots, z_n^r)' = \lim_r \sum_{t \in T} \lambda_t^r a_t \in \operatorname{cl} M.$$

Hemos demostrado que $M \subset (\operatorname{lin} C)^{\perp} \subset \operatorname{cl} M$, de modo que $\operatorname{cl} M = (\operatorname{lin} C)^{\perp}$. Por lo tanto,

$$(\operatorname{lin} C)^{\perp} = \operatorname{rint} (\operatorname{lin} C)^{\perp} = \operatorname{rint} \operatorname{cl} M = \operatorname{rint} M \subset M \subset (\operatorname{lin} C)^{\perp},$$

y esto implica $\operatorname{rint} M = (\operatorname{lin} C)^{\perp}$.

Si $P(c)$ tiene valor finito, $v(c)$, entonces $c \in (\operatorname{lin} C)^{\perp}$ (en otro caso, existiría $y \in \operatorname{lin} C = (O^+C) \cap (-O^+C)$ tal que o $c'y < 0$ e $y \in O^+C$ o $c'(-y) < 0$ y $-y \in O^+C$, de modo que $v(c) = -\infty$ en ambos casos). Por lo tanto, $c \in \operatorname{rint} M$ y esto implica la resolubilidad de $P(c)$, su discretización (una solución óptima se puede obtener como límite de soluciones óptimas de una sucesión de subproblemas finitos) y el salto de dualidad nulo [19, Ths. 8.1(v) y 8.2]. ■

Aunque bajo las hipótesis del Corolario 3.3, $P(c)$ es resoluble y el salto de dualidad es nulo, $D(c)$ puede no ser resoluble, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.4 Consideremos el problema PSIL

$$\begin{array}{lll}(P) & \text{Inf} & x_1 \\ & s.a. & x_1 \geq -1/t,\ t = 1, 2, \dots, \\ & & -x_1 \geq -1 \quad (t = 0)\end{array}$$

cuyo conjunto factible es $C = ([0,1] \times \{0\}) + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio vectorial.

Se puede ver fácilmente que $v(P) = v(0) = 0$, por lo que, como era de esperar, (P) es resoluble.

Consideremos ahora el problema dual de (P)

$$\begin{array}{lll}(D) & \text{Sup} & -\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\lambda_t}{t} - \lambda_0 \\ & s.a. & \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \cdot \\ & & \lambda_t \geq 0,\ t = 0, 1, \dots\end{array}$$

Desde luego, $\Psi(\lambda) \leq 0$, para todo $\lambda \in \Lambda$, por lo que $v(D) \leq 0$. Veremos que, en realidad, $v(D) = 0$. En efecto, si $\{\lambda^r\}_{r=1}^{\infty} \subset \Lambda$ es tal que

$$\lambda_t^r = \begin{cases} 1, & t = r \\ 0, & t \neq r \end{cases},$$

al ser $\Psi(\lambda^r) = -\dfrac{1}{r}$, $\lim\limits_r \Psi(\lambda^r) = 0 \leq v(D)$. Por lo tanto, $v(D) = 0$.

Sin embargo, (D) no es resoluble ya que, si lo fuese, existiría $\lambda \in \Lambda$ tal que $-\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\lambda_t}{t} - \lambda_0 = 0$. Como $\lambda_t \geq 0$ para todo $t = 0, 1, \dots$, $-\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\lambda_t}{t} - \lambda_0 < 0$ si algún $\lambda_t \neq 0$. Por lo tanto, $\lambda_t = 0$ para todo $t = 0, 1, \dots$, en cuyo caso $\sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t - \lambda_0 \neq 1$, lo que se contradice con que $\lambda \in \Lambda$.

COROLARIO 3.5 *Dado un conjunto convexo cerrado $C \neq \emptyset$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *C es un conjunto compacto;*

(ii) *$E(C)$ es compacto y* $\operatorname{lin} C = D(C) = \{0_n\}$;

(iii) $\begin{pmatrix}0_n\\-1\end{pmatrix} \in \operatorname{int} K(C)$*;*

(iv) $\Pi(K(C)) = \mathbb{R}^n$*; y*

(v) *$P(c)$ es resoluble para todo $c \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. La equivalencia entre las cuatro primeras afirmaciones es consecuencia directa de la Proposición 3.2. Puesto que (i) $\Rightarrow$ (v) es trivial, acabaremos la demostración probando que (v) $\Rightarrow$ (i). En efecto, si no se verifica (i), entonces existe $y \in O^+C$, $y \neq 0_n$, y $P(-y)$ no es ni siquiera acotado. Por lo tanto, tampoco se verifica (v). ■

3.3 Caracterización de los símplices

C es a *k-símplice* si es la envoltura convexa de $k+1$ puntos afínmente independientes. Obviamente, cualquier k-símplice es compacto.

PROPOSICIÓN 3.6 *Dado un conjunto convexo cerrado $C \neq \emptyset$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *C es un k-símplice;*

(ii) *$E(C)$ tiene $k+1$ puntos extremos,* $\dim E(C) = k$ *y* $\operatorname{lin} C = D(C) = \{0_n\}$*; y*

(iii) $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{int} K(C)$, $\dim \operatorname{lin}[K(C)] = n-k$ *y el cono apuntado de $K(C)$ tiene $k+1$ rayos extremos.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Dado que C es un conjunto convexo compacto, por el Corolario 3.5, se tiene que $\operatorname{lin} C = D(C) = \{0_n\}$ y, por tanto, $E(C) = C$.

Si $C = \operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^{k+1}\}$, con $\{x^1, \ldots, x^{k+1}\}$ afínmente independientes, es obvio que $x^1, \ldots, x^{k+1}$ contiene a todos los puntos extremos de C. Por otra parte, si x^j, $j \in \{1, \ldots, k+1\}$, no fuese punto extremo de C, podríamos escribir $x^j = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \lambda_i x^i$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k+1$, $i \neq j$, $\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \lambda_i = 1$. Entonces $\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \lambda_i (x^i - x^j) = 0_{n+1}$, de modo que $\{x^i - x^j,\ i = 1, \ldots, k+1\}$ son linealmente dependientes, lo que resulta ser una contradicción. Así pues, los puntos extremos de C son $x^1, \ldots, x^{k+1}$.

Por lo tanto, $E(C) = C = \operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^{k+1}\}$ tiene exactamente $k+1$ puntos extremos y $\dim E(C) = \dim C = k$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\operatorname{lin} C = D(C) = \{0_n\}$ implica que $C = E(C)$. Si $\left\{x^1, \ldots, x^{k+1}\right\}$ es el conjunto de puntos extremos de $E(C) = C$, entonces, por el teorema de representación, $C = \operatorname{conv}\left\{x^1, \ldots, x^{k+1}\right\}$. Si $\left\{x^1, \ldots, x^{k+1}\right\}$ fuesen afínmente dependientes, entonces $\dim E(C) = \dim \operatorname{aff}\left\{x^1, \ldots, x^{k+1}\right\} \leq k - 1$, lo que contradice la hipótesis.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Puesto que todo k-símplice es compacto, por el Corolario 3.5, se tiene que $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{int} K(C)$. Por otra parte, de acuerdo con la fórmula dimensional,

$$\dim \operatorname{lin}[K(C)] = n - \dim C = n - k. \tag{3.2}$$

Puesto que C es un símplice de dimensión completa en la variedad afín $V := \operatorname{aff} C$, con $\dim V = k$, existen vectores no nulos

$$\{a_i, i = 1, \ldots, k+1\} \subset V - V$$

y correspondientes escalares

$$\{b_i, i = 1, \ldots, k+1\},$$

tales que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i' x = b_i\}$ es un hiperplano soporte en los puntos del interior relativo de la i-ésima faceta, $i = 1, \ldots, k+1$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $a_i' x \geq b_i$ para todo $x \in C$, $i = 1, \ldots, k+1$, de modo que

$$C = \{x \in V \mid a_i' x \geq b_i,\ i = 1, \ldots, k+1\}.$$

Además, puesto que $\dim V = k$, podemos escribir

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i' x = b_i,\ i = k+2, \ldots, n+1\},$$

con

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ i = k+2, \ldots, n+1 \right\}$$

linealmente independientes (si C es un n-símplice, entonces $V = \mathbb{R}^n$ y esta parte de la prueba se puede simplificar).

Entonces,

$$K(C) = \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, k+1;\ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} +$$

$$+\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix},\, i=k+2,\ldots,n+1\right\},$$

y demostraremos que $\begin{pmatrix}0_n\\ -1\end{pmatrix}$ se puede eliminar en esta expresión. Para ello, apelaremos a la conocida caracterización de los puntos interiores de un cono convexo dada en la Proposición 0.6.

Puesto que $\begin{pmatrix}0_n\\ -1\end{pmatrix} \in \operatorname{int} K(C)$, podemos escribir

$$\begin{pmatrix}0_n\\ -1\end{pmatrix} = \sum_{i\in I} \lambda_i \begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0_n\\ -1\end{pmatrix},\ \lambda_i > 0 \text{ si } i \le k+1,\ \mu \ge 0, \tag{3.3}$$

para un cierto conjunto $I \subset \{1,\ldots,n+1\}$, con

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix},\ i\in I\right\} = \mathbb{R}^{n+1} \text{ si } \mu = 0$$

y

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix},\ i\in I;\ \begin{pmatrix}0_n\\ -1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^{n+1} \text{ si } \mu > 0.$$

Si $0 \le \mu < 1$, de (3.3) se sigue

$$\begin{pmatrix}0_n\\ -1\end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix},\, i=1,\ldots,k+1\right\} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix},\, i=k+2,\ldots,n+1\right\}. \tag{3.4}$$

Probaremos que el caso $\mu \ge 1$ no se puede dar, por lo que (3.4) se cumple siempre. En efecto, si $\mu > 1$, entonces $(\mu-1)\begin{pmatrix}0_n\\ 1\end{pmatrix} = \sum_{i\in I} \lambda_i \begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix} \in K(C)$ y esto implica $C = \emptyset$. Por otra parte, si $\mu = 1$, entonces de (3.3) se sigue que $\sum_{i\in I} \lambda_i \begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix} = 0_{n+1}$ y existirá un $j \le k+1$ tal que $\lambda_j > 0$ (en otro caso $I \subset \{k+2,\ldots,n+1\}$ y $\left\{\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix},\, i=k+2,\ldots,n+1\right\}$ son linealmente dependientes). Entonces,

$$-\begin{pmatrix}a_j\\ b_j\end{pmatrix} = \sum_{i\in I\setminus\{j\}} \lambda_j^{-1}\lambda_i \begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix} \in K(C),$$

de modo que $a_j' x = b_j$ para todo $x \in C$. Por lo tanto,

$$a_j \in (V-V) \cap (V-V)^{\perp} = \{0_n\},$$

es decir, $a_j = 0_n$ y esto es una contradicción.

De (3.4) se sigue

$$K(C) = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, k+1\right\} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ i = k+2, \ldots, n+1\right\}.$$

Comparando $\dim \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ i = k+2, \ldots, n+1\right\} = n-k$ con (3.2), concluimos que el cono apuntado de $K(C)$ es

$$\widehat{K}(C) := \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, k+1\right\}.$$

Si $\operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}\right\}$, $j \in \{1, \ldots, k+1\}$, no es un rayo extremo de $\widehat{K}(C)$, entonces podemos escribir

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \gamma_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ \gamma_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k+1,\ i \neq j,$$

de modo que $\widehat{K}(C) = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, k+1,\ i \neq j\right\}$ y $\dim \widehat{K}(C) \leq k$. Entonces $\dim K(C) = \dim \widehat{K}(C) + \dim \operatorname{lin}[K(C)] \leq n$ y esto contradice el hecho de que $\operatorname{int} K(C) \neq \emptyset$. Así pues,

$$\left\{\operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}\right\},\ i = 1, \ldots, k+1\right\}$$

es el conjunto de rayos extremos de $\widehat{K}(C)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Las hipótesis $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{int} K(C)$ y $\dim \operatorname{lin}[K(C)] = n - k$ garantizan que C es compacto y $\dim C = k$, respectivamente. Sea

$$\left\{\operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}\right\},\ i = 1, \ldots, k+1\right\}$$

el conjunto de rayos extremos de $\widehat{K}(C)$. De acuerdo con el teorema de representación,

$$\widehat{K}(C) = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, k+1\right\}.$$

Sea

$$\left\{\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ i = k+2, \ldots, n+1\right\}$$

una base de $\operatorname{lin}[K(C)]$. Entonces $C = \{x \in V \mid a_i' x \geq b_i,\ i = 1, \ldots, k+1\}$, donde $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i' x = b_i,\ i = k+2, \ldots, n+1\}$.

Así pues, el número de puntos extremos de C es $p \leq \binom{k+1}{k} = k+1$. Asumamos que $p < k+1$ y sea $\{x^1, \ldots, x^p\}$ el conjunto de puntos extremos de C. El teorema de representación establece que $C = \operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^p\}$, de modo que $\dim C \leq p-1 < k$. Por lo tanto, $p = k+1$ y $\left\{x^1, \ldots, x^{k+1}\right\}$ es afínmente independiente (en otro caso, $\dim C < k$). Esto completa la prueba. ■

3.4 Caracterización de los sandwiches

Dos variedades afines de la misma dimensión en $\mathbb{R}^n$, U_1 y U_2, son paralelas si $U_1 - U_1 = U_2 - U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Diremos que un conjunto es un *k-sandwich* cuando es la envoltura convexa de la unión de dos variedades afines paralelas de dimensión $k-1$. El siguiente resultado establece algunas propiedades elementales de los k-sandwiches que se usarán más adelante.

PROPOSICIÓN 3.7 *Sea $C = \operatorname{conv}(U_1 \cup U_2)$, donde U_1 y U_2 son variedades afines paralelas, con $\dim U_i = k-1$, $i = 1, 2$. Sea $V = U_1 - U_1 = U_2 - U_2$, $U_i \cap V^\perp = \{x^i\}$, $i = 1, 2$ y $w = x^2 - x^1$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) *$C = V + [x^1, x^2]$ (y, por tanto, C es la suma de un conjunto convexo compacto con un subespacio vectorial);*

(ii) *$\dim C = k$;*

(iii) *$\operatorname{aff} C = U_i + \operatorname{span}\{w\}$, $i = 1, 2$;*

(iv) *$U_i = \{x \in \operatorname{aff} C \mid w'(x - x^i) = 0\}$, $i = 1, 2$; y*

(v) *$\operatorname{rbd} C = U_1 \cup U_2$ y $\operatorname{rint} C = V +]x^1, x^2[$.*

Demostración. Por ser U_i una variedad afín paralela a V, $U_i \cap V^\perp$ se reduce a un sólo punto, por lo que x^i está bien definido, $i = 1, 2$.

Como $U_i = x^i + V$, $i = 1, 2$, y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, necesariamente $x^1 \neq x^2$, es decir, $w := x^2 - x^1 \neq 0_n$.

Procedemos a la prueba:

(i) Si $x \in C$, podemos escribir $x = (1-\lambda)(x^1 + v^1) + \lambda(x^2 + v^2)$, donde

$\lambda \in [0,1]$ y $v^1,\ v^2 \in V$. Entonces

$$x = \left[(1-\lambda)\, x^1 + \lambda x^2\right] + (1-\lambda)\, v^1 + \lambda v^2 \in \left[x^1, x^2\right] + V.$$

Recíprocamente, si $v \in V$ y $\lambda \in [0,1]$,

$$v + (1-\lambda)\, x^1 + \lambda x^2 = (1-\lambda)\left(x^1 + v\right) + \lambda\left(x^2 + v\right) \in \operatorname{conv}(U_1 \cup U_2) = C.$$

(ii) Obviamente, para $\{i,j\} = \{1,2\}$, se tiene

$$U_i + \operatorname{span}\{w\} = x^i + V + \operatorname{span}\{w\} = V + \left(x^i + \operatorname{span}\{w\}\right) = V + \operatorname{aff}\left(\left[x^1, x^2\right]\right),$$

variedad afín que contiene a U_1 y a U_2. Así pues, si $\{i,j\} = \{1,2\}$,

$$\operatorname{conv}\left[U_i \cup \left\{x^j\right\}\right] \subset C \subset U_i + \operatorname{span}\{w\}. \tag{3.5}$$

Puesto que $x^j \notin U_i$ y $w \in V^{\perp}$, se sigue de (3.5)

$$\begin{aligned} k &\leq \dim \operatorname{conv}\left[U_i \cup \left\{x^j\right\}\right] \leq \dim C \leq \dim\left[U_i + \operatorname{span}\{w\}\right] = \\ &= \dim\left[V + \operatorname{span}\{w\}\right] = k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se verifica (ii).

(iii) Es consecuencia de la segunda inclusión en (3.5) y de la ecuación $\dim C = \dim\left[U_i + \operatorname{span}\{w\}\right]$ que hemos probado antes.

(iv) Dado $x \in U_i = x^i + V$, $w'(x - x^i) = 0$ debido a que $w \in V^{\perp}$.

Recíprocamente, si $x \in \operatorname{aff} C$ satisface que $w'(x - x^i) = 0$, entonces podemos escribir (en virtud de (iii)) $x = x^i + v + \alpha w$, $v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, con $w'(v + \alpha w) = \alpha \|w\|^2 = 0$. Esto implica que $\alpha = 0$, es decir, $x = x^i + v \in U_i$.

(v) Es consecuencia directa de la Proposición 0.4 aplicada a (i). ■

A continuación, damos tres caracterizaciones diferentes de los sandwiches basadas en las representaciones interna, externa y cónica de los mismos. En la Sección 3.5 se dará una caracterización topológica.

PROPOSICIÓN 3.8 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío y sea $K(C)$ su cono de referencia. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) C *es un* k*-sandwich.*

(ii) $D(C) = \{0_n\}$*,* $E(C)$ *es un segmento cerrado propio y* $\dim(\operatorname{lin} C) = k-1$*.*

(iii) *existe subespacio vectorial* $V \subset (\operatorname{aff} C) - C$ *con* $\dim V = k-1$*, un vector no nulo* $w \in V^{\perp} \setminus [(\operatorname{aff} C) - C]^{\perp}$ *y dos números reales* α_1 *y* α_2*, tales que* $\alpha_1 < \alpha_2$ *y*

$$C = \{x \in \operatorname{aff} C \mid \alpha_1 \leq w'x \leq \alpha_2\}.$$

(iv) $K(C) = K + W$*, donde* K *es un cono convexo cerrado y apuntado y* W *es un subespacio vectorial tales que* $\dim K = 2$*,* $\dim W = n-k$*,* $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{rint} K$ *y*

$$K \cap \left(W + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right) = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}. \tag{3.6}$$

Demostración. Probaremos (ii) $\Leftrightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $E(C) + D(C) = [x^1, x^2]$, con $x^1 \neq x^2$, definiendo $U_i = x^i + \operatorname{lin} C$, es fácil probar que $C = \operatorname{conv}(U_1 \cup U_2)$, siendo U_1 y U_2 variedades paralelas, tales que $\dim U_i = k-1$, $i = 1, 2$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Es consecuencia directa de la afirmación (i) de la Proposición 3.7.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Sea $C = \operatorname{conv}(U_1 \cup U_2)$, donde U_1 y U_2 son variedades afines paralelas. Sean V, x^1, x^2 y w definidos como en la Proposición 3.7, cuyas afirmaciones (ii) y (iii) demuestran que $\dim V = \dim C - 1$ y $V \subset V + \operatorname{span}\{w\} = (\operatorname{aff} C) - C$, respectivamente. Retomando la definición de w, se tiene que $w \in V^{\perp} \setminus \{0_n\}$ y $w \in (\operatorname{aff} C) - C$, por lo que $w \in V^{\perp} \setminus [(\operatorname{aff} C) - C]^{\perp}$.

Sean $\alpha_i = w'x^i$, $i = 1, 2$. Obviamente, $\alpha_2 - \alpha_1 = \|w\|^2 > 0$.

Puesto que $U_i = \{x \in \operatorname{aff} C \mid w'x = \alpha_i\}$, $i = 1, 2$, de acuerdo con la afirmación (iv) de la Proposición 3.7, se obtiene

$$C = \operatorname{conv}(U_1 \cup U_2) = \{x \in \operatorname{aff} C \mid \alpha_1 \leq w'x \leq \alpha_2\}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sea $d = \dim C$. Distinguiremos los casos $d = n$ y $d < n$.

Supongamos que $d = n$. Puesto que $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 \leq w'x \leq \alpha_2\}$, $\alpha_1 < \alpha_2$, se tiene

$$K(C) = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Además,

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[\begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} \right],$$

de modo que $K(C) = \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} \right\}$ y la Proposición 0.6 establece que $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{rint} K(C)$.

Es más, puesto que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes y $K(C)$ es un cono apuntado bidimensional.

Acabaremos esta parte de la demostración probando que $K(C) = K(C) + \{0_{n+1}\}$ es la descomposición deseada. En efecto, si

$$z \in K(C) \cap \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

se puede escribir

$$z = \rho_1 \begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \rho_2 \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}, \rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0, \gamma \in \mathbb{R},$$

lo que implica que $\rho_1 = \rho_2$ y $\gamma = \rho_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \geq 0$, de modo que $z \in \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Esto prueba que

$$K(C) \cap \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

mientras que la inclusión opuesta se cumple trivialmente. Por lo tanto, se verifica (3.6).

Supongamos ahora que $d < n$. Sea

$$\operatorname{aff} C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i' x = b_i, i = 1, \ldots, n-d\},$$

con $\{a_i, i = 1, \ldots, n-d\}$ un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$ y $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n-d$.

Puesto que $C = \{x \in \operatorname{aff} C \mid \alpha_1 \leq w'x \leq \alpha_2\}$, se tiene ahora

$$K(C) = \operatorname{cone} \left\{ \pm \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = 1, \ldots, n-d; \begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, i = 1, \ldots, n-d \right\} + \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sea

$$W := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, n-d\right\}$$

y

$$K := \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$, con $\dim W = n - d$, y K (el mismo cono que en el caso $d = n$) es un cono convexo cerrado y apuntado, con $\dim K = 2$ y $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{rint} K$. Además, es obvio que

$$\operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \subset K \cap \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \subset K \cap \left(W + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right). \quad (3.7)$$

Consideremos ahora $z \in K \cap \left(W + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ arbitrario. Podemos escribir

$$z = \rho_1 \begin{pmatrix} w \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \rho_2 \begin{pmatrix} -w \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-d} \beta_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

con $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n-d$, y $\gamma \in \mathbb{R}$. De (3.8), se deduce

$$(\rho_2 - \rho_1)\, w + \sum_{i=1}^{n-d} \beta_i a_i = 0_n,$$

siendo $\{w;\ a_i, i = 1, \ldots, n-d\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes, debido a que $w \neq 0_n$ y

$$w \notin [(\operatorname{aff} C) - C]^{\perp} = \operatorname{span}\{a_i, i = 1, \ldots, n-d\}.$$

Por lo tanto, $\rho_1 = \rho_2$ y $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-d$, de modo que (3.8) se convierte en

$$z = \rho_1 \begin{pmatrix} 0_n \\ \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$$

y se llega a que $\gamma = \rho_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \geq 0$. Así pues, $z = \gamma \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

Hemos probado que

$$K \cap \left(W + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right) \subset \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}\right\},$$

que junto con (3.7) demuestra que se verifica (3.6).

(iv) $\Rightarrow$ (i) Cualquier cono convexo cerrado apuntado bidimensional es la envoltura convexa cónica de dos direcciones extremas (es decir, un ángulo agudo plano). Sea $K = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}\right\}$, donde $\left\{\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}\right\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^{n+1}$. Puesto que estamos asumiendo que $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{rint} K$, podemos escribir (por la Proposición 0.6),

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} = \rho_1 \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} + \rho_2 \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix},\ \rho_1 > 0,\ \rho_2 > 0, \tag{3.9}$$

de modo que $a \neq 0_n$ (en otro caso $a = b = 0_n$ y $\left\{\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix}\right\}$ es linealmente dependiente).

Definiendo $w = \rho_1 a \neq 0_n$ y $\gamma = \rho_1 \alpha$, se obtiene de (3.9)

$$K = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} w \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\gamma - 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Sea $\left\{\begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, n-d\right\}$ una base de W, con $d = \dim C$.

Dado que estamos suponiendo que $K\,(C) = K + W$, se tiene

$$K\,(C) = \operatorname{cone}\left\{\pm\begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, n-d;\ \begin{pmatrix} w \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -w \\ -\gamma - 1 \end{pmatrix}\right\},$$

de modo que

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i' x = \alpha_i,\ i = 1, \ldots, n-d;\ \gamma \leq w' x \leq \gamma + 1\right\}. \tag{3.10}$$

Sean $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \gamma + 1$ y

$$U_j = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i' x = \alpha_i,\ i = 1, \ldots, n-d;\ w' x = \gamma_j\right\},\ j = 1, 2.$$

Probaremos que $U_j \neq \emptyset$, $j = 1, 2$.

Si $U_j = \emptyset$,

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in K\,(U_j) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, n-d;\ \begin{pmatrix} w \\ \gamma_j \end{pmatrix}\right\}$$

y podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-d} \beta_i \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix} + \beta_0 \begin{pmatrix} w \\ \gamma_j \end{pmatrix},\ \beta_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n-d, \tag{3.11}$$

de donde se deduce que $\beta_0 \begin{pmatrix} w \\ \gamma_j \end{pmatrix} \in W + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Si $\beta_0 > 0$, entonces $\begin{pmatrix} w \\ \gamma_j \end{pmatrix} \in W + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Si $j = 1$,

$$\begin{pmatrix} w \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \in K \cap \left[W + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right] = \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

de acuerdo con (3.6), contradiciendo que $w \neq 0_n$. Alternativamente, si $j = 2$, entonces

$$-\begin{pmatrix} w \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \in K \cap \left[W + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right] = \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

y obtenemos otra vez que $w = 0_n$.

Si $\beta_0 < 0$, se obtiene $w = 0_n$ del mismo modo.

Finalmente, si $\beta_0 = 0$, (3.11) implica que $\{a_i' x = \alpha_i,\ i = 1, \ldots, n-d\}$ es inconsistente, en contradicción con (3.10) (ya que $C \neq \emptyset$).

Se concluye que U_1 y U_2 son variedades afines paralelas y se puede demostrar fácilmente que $C = \operatorname{conv}(U_1 \cup U_2)$.

Esto completa la demostración. ■

3.5 Caracterización topológica de los k-sandwiches

Por la afirmación (v) de la Proposición 3.7, está claro que la frontera relativa de cualquier k-sandwich no es ni siquiera conexa. En la siguiente proposición demostraremos que la no conexión de la frontera relativa es, en realidad, una propiedad que caracteriza a los k-sandwiches.

PROPOSICIÓN 3.9 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío de $\mathbb{R}^n$ que no es una variedad afín, con $\dim C = k$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\operatorname{rbd} C$ *es no conexa;*

(ii) $\operatorname{rbd} C$ *es no conexa por arcos; y*

(iii) C *es un k-sandwich.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Es trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supongamos, en primer lugar, que C tiene dimensión completa. Así pues, la hipótesis será que $\mathrm{bd}\, C$ no es conexa por arcos.

Si $n = 1$, puesto que $\dim C = 1$ y $C \neq \mathbb{R}$, C será o una semirrecta cerrada (lo cual es imposible porque cualquier conjunto singular es conexo por arcos) o un segmento cerrado propio de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, C es un sandwich unidimensional.

Así pues, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n \geq 2$.

Sean $x^i \in \mathrm{bd}\, C$, $i = 1, 2$, puntos que no se pueden conectar por medio de ninguna curva enteramente contenida en $\mathrm{bd}\, C$.

Sean $c_i \neq 0_n$, tales que

$$c_i' \left(x - x^i\right) \geq 0 \text{ para todo } x \in C,\ i = 1, 2. \tag{3.12}$$

Denotaremos por

$$H_i := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid c_i' \left(x - x^i\right) = 0\right\},\ i = 1, 2,$$

los correspondientes hiperplanos soporte de C. Probaremos que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ por reducción al absurdo. Así pues, sea $z \in H_1 \cap H_2$.

Para $\{i, j\} = \{1, 2\}$, puesto que $z \in H_i$ y $x^j \in C$, se tiene

$$c_i' \left(z - x^j\right) = c_i' \left(z - x^i + x^i - x^j\right) = c_i' \left(x^i - x^j\right) \leq 0.$$

Si $c_i' \left(z - x^j\right) = 0$ entonces $x^j \in H_i$ (ya que $z \in H_i$), de modo que

$$\left[x^i, x^j\right] \subset C \cap H_i \subset \mathrm{bd}\, C$$

(ya que H_i es hiperplano soporte de C), y esto contradice la hipótesis acerca de x^1 y x^2. Por lo tanto,

$$c_i' \left(z - x^j\right) < 0 \text{ si } \{i, j\} = \{1, 2\}. \tag{3.13}$$

Consideremos ahora el vector $u = 2z - (x^1 + x^2)$. De (3.13), se obtiene

$$c_i' u = c_i' \left(z - x^i\right) + c_i' \left(z - x^j\right) < 0, \text{ si } \{i, j\} = \{1, 2\}. \tag{3.14}$$

De (3.12) y (3.14) se deduce que, para $i = 1, 2$, c_i es solución del sistema

$$\left\{y' u < 0;\ y' \left(x - x^i\right) \geq 0,\ x \in C\right\}$$

y, por la Proposición 2.4, esto implica que $x^i \in \operatorname{end}(C;u)$, $i = 1,2$. Entonces, podemos aplicar la Proposición 2.21 para obtener la deseada contradicción.

Así pues, hemos probado que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, de modo que $\operatorname{span}\{c_1\} = \operatorname{span}\{c_2\}$. Probaremos, a continuación, que $C = \operatorname{conv}(H_1 \cup H_2)$.

Puesto que $x^1 \notin H_2$ y $x^2 \notin H_1$ (en caso contrario $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$), $c_2'(x^1 - x^2) > 0$ y $c_1'(x^1 - x^2) < 0$, de modo que c_2 es un múltiplo negativo de c_1 y podemos escribir $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c'x = \alpha_i\}$, $i = 1,2$, donde $c \neq 0_n$, $c'x^i = \alpha_i$, $i = 1,2$, y $\alpha_1 < \alpha_2$. Puesto que H_i es un hiperplano soporte de C en x^i, $i = 1,2$, se tiene

$$C \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 \leq c'x \leq \alpha_2\} = \operatorname{conv}(H_1 \cup H_2). \tag{3.15}$$

Para probar la inclusión opuesta, consideremos un vector arbitrario

$$v \in V := H_1 - H_1 = H_2 - H_2.$$

Si $v \notin O^+C$, existen números reales no negativos

$$\lambda_i := \max\left\{t \in \mathbb{R} \mid x^i + tv \in C\right\},\ i = 1,2,$$

y $x^i + \lambda_i v \in \operatorname{end}(C;v)$, $i = 1,2$.

Entonces, por una parte, $[x^i, x^i + \lambda_i v] \subset C \cap H_i \subset \operatorname{bd} C$, $i = 1,2$, y por otra, existe un arco conectando $x^1 + \lambda_1 v$ con $x^2 + \lambda_2 v$ que está completamente contenido en $\operatorname{bd} C$ (de nuevo por la Proposición 2.21), y esto significa que x^1 se puede conectar con x^2 por medio de un arco contenido en $\operatorname{bd} C$, compuesto por tres arcos conectados. Esto es una contradicción, de modo que $V \subset O^+C$.

Así pues, $H_i = x^i + V \subset C + O^+C = C$, $i = 1,2$, y se obtiene

$$\operatorname{conv}(H_1 \cup H_2) \subset C. \tag{3.16}$$

De (3.15) y (3.16), se concluye que $C = \operatorname{conv}(H_1 \cup H_2)$ es un sandwich de dimensión completa.

Supongamos ahora que $k < n$. Entonces C es un conjunto convexo cerrado de dimensión completa, en $\operatorname{aff} C$, tal que su frontera, en la topología de $\operatorname{aff} C$, no es conexa por arcos. Aplicando el argumento previo, C es de nuevo un sandwich de dimensión completa en $\operatorname{aff} C$, es decir, un k-sandwich.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Es consecuencia directa de la afirmación (v) de la Proposición 3.7. ■

En la Proposición 2.23, se estableció como condición suficiente para la conexión por arcos de la frontera relativa de un conjunto convexo no vacío de dimensión mayor o igual que 2, la compacidad de dicho conjunto. Sin embargo, sólo hay que considerar el caso en el que C sea un semiespacio para ver que no es una condición necesaria. Quedaba pendiente, por tanto, el estudio de la conexión por arcos de la frontera relativa de los conjuntos convexos cerrados no vacíos de dimensión 1 y los de dimensión mayor o igual que 2 no acotados, cuestión que queda resuelta en la Proposición 3.9.

3.6 Caracterización de los paralelotopos

Un *paralelotopo* se puede definir como la intersección de una familia de n n-sandwiches "independientes", es decir, un conjunto de la forma $C = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$, con $C_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq a_i' x \leq \beta_i\}$, $\alpha_i < \beta_i$ para $i = 1, \ldots, n$, y $\{a_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ linealmente independientes. En la siguiente proposición se caracteriza esta familia de conjuntos en términos de sus representaciones interna y cónica.

PROPOSICIÓN 3.10 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío de $\mathbb{R}^n$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *C es un paralelotopo;*

(ii) *$E(C)$ es un polítopo de dimensión n con $2n$ facetas paralelas dos a dos y*

$$\operatorname{lin} C = D(C) = \{0_n\}\text{; y}$$

(iii) *existe una base de $\mathbb{R}^n$, $\{a_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ y dos conjuntos de escalares,*

$$\{\alpha_i,\ i = 1, \ldots, n\} \text{ y } \{\beta_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

con $\alpha_i < \beta_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, tales que

$$K(C) = \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, n;\ -\begin{pmatrix} a_i \\ \beta_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, n;\ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sea C un paralelotopo, es decir,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq a_i' x \leq \beta_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

con $\alpha_i < \beta_i$ para $i = 1, \ldots, n$ y $\{a_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ linealmente independientes. Entonces, denotando por σ el sistema finito $\{\alpha_i \leq a_i' x \leq \beta_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ que representa a C, el primer cono de momentos de σ resulta ser

$$M = \operatorname{cone}\{\pm a_i,\ i = 1, \ldots, n\} = \operatorname{span}\{a_i,\ i = 1, \ldots, n\} = \mathbb{R}^n$$

y, por la Proposición 0.19, C es acotado.

Así pues, C es un conjunto convexo compacto por lo que, aplicando el Corolario 3.5, se tiene

$$\operatorname{lin} C = D(C) = \{0_n\}$$

y, en consecuencia,

$$E(C) = C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq a_i' x \leq \beta_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

que es un polítopo por ser intersección de un número finito de semiespacios cerrados y ser acotado.

Por otra parte, como σ es un sistema LFM no trivial, de acuerdo con la Proposición 0.17, $\dim C = n$ si, y sólo si, ninguna combinación convexa de desigualdades no triviales de σ da lugar a la desigualdad trivial. Por reducción al absurdo, supongamos que

$$0_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \begin{pmatrix} a_i \\ \beta_i \end{pmatrix},$$

con $\lambda_i,\ \mu_i \in [0, 1]$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) = 1$. Entonces, podemos escribir

$$0_n = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)\, a_i \tag{3.17}$$

y

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i - \mu_i \beta_i. \tag{3.18}$$

Puesto que $\{a_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ son linealmente independientes, de (3.17) se deduce

que $\lambda_i = \mu_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y, sustituyendo en (3.18), obtenemos

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\alpha_i - \beta_i\right).$$

Al ser $\alpha_i - \beta_i < 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, se tiene que $\lambda_i = \mu_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, lo cual se contradice con $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) = 1$.

Así pues, $E(C)$ es un polítopo de dimensión n representado linealmente por el sistema σ. De acuerdo con la Proposición 0.20 (ii), las facetas de C deben ser de la forma $\{x \in C \mid a_i' x = \alpha_i\}$ o $\{x \in C \mid a_i' x = \beta_i\}$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por otra parte, si demostramos que σ es una representación minimal de C (es decir no tiene restricciones redundantes), por el apartado (iii) de la misma proposición, se obtiene que $C_i = \{x \in C \mid a_i' x = \alpha_i\}$ y $C_i' = \{x \in C \mid a_i' x = \beta_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, son las $2n$ facetas, paralelas dos a dos, de C.

Supongamos, pues, que $a_j' x \geq \alpha_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, es redundante en σ (se haría del mismo modo para $a_j' x \leq \beta_j$). Entonces, por el Lema de Farkas,

$$\begin{pmatrix} a_j \\ \alpha_j \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, n,\ i \neq j;\ -\begin{pmatrix} a_i \\ \beta_i \end{pmatrix},\ i = 1, \ldots, n;\ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

es decir, existen escalares $\lambda_i \geq 0$, $i = 1 \ldots, n$, $i \neq j$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1 \ldots, n$ y $\rho \geq 0$ tales que

$$\begin{pmatrix} a_j \\ \alpha_j \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_i \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \begin{pmatrix} a_i \\ \beta_i \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene

$$0_n = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\lambda_i - \mu_i\right) a_i - \left(\mu_j + 1\right) a_j.$$

Entonces, por ser $\{a_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ linealmente independientes, $\lambda_i - \mu_i = 0$, $i = 1 \ldots, n$, $i \neq j$, y $\mu_j + 1 = 0$, lo que se contradice con $\mu_j \geq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Por hipótesis, $C = E(C)$ es un polítopo de dimensión n con $2n$ facetas paralelas dos a dos. Sean $\{C_1, \ldots, C_n, C_1', \ldots, C_n'\}$ las $2n$ facetas y supongamos que C_i y C_i' son paralelas para todo $i = 1, \ldots, n$.

Por ser C un polítopo, siempre podemos encontrar una representación lineal finita

minimal para C. Sea

$$\sigma = \left\{a_j' x \geq b_j,\ j = 1, \ldots, p\right\}$$

dicha representación. Por la Proposición 0.20 (iii), los conjuntos $\left\{x \in C \mid a_j' x = b_j\right\}$, $j = 1, \ldots, p$, son las facetas de C, por lo que $p = 2n$. Reordenando si es preciso las inecuaciones de σ, podemos suponer que $C_i = \{x \in C \mid a_i' x = b_i\}$ y $C_i' = \left\{x \in C \mid a_{i+n}' x = b_{i+n}\right\}$, $i = 1, \ldots, n$. Dado $j \in \{1, \ldots, n\}$ y puesto que C_j y C_j' son paralelos, se tiene $a_{j+n} = \lambda_j a_j$ para algún $\lambda_j \neq 0$, en cuyo caso podemos escribir

$$\begin{pmatrix} a_{j+n} \\ b_{j+n} \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} + (b_{j+n} - \lambda_j b_j) \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, si fuese $\lambda_j > 0$, entonces $a_{j+n}' x \geq b_{j+n}$ es consecuencia de $a_j' x \geq b_j$ si $b_{j+n} - \lambda_j b_j \leq 0$ (Lema de Farkas) y $a_j' x \geq b_j$ es consecuencia de $a_{j+n}' x \geq b_{j+n}$ si $b_{j+n} - \lambda_j b_j \geq 0$. En ambos casos σ no es minimal.

Así pues, $\lambda_j < 0$ y $b_j \leq a_j' x \leq \dfrac{b_{j+n}}{\lambda_j}$ si, y sólo si, $x \in C$. Si denotamos $\alpha_j := b_j$ y $\beta_j := \dfrac{b_{j+n}}{\lambda_j}$, se tiene $\alpha_j \leq a_j' x \leq \beta_j$ si, y sólo si, $x \in C$.

Así pues,

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq a_i' x \leq \beta_i,\ i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Desde luego, $\alpha_i < \beta_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, puesto que $\dim C = n$.

Por otra parte, $\{a_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ son linealmente independientes ya que, en caso contrario,

$$M = \operatorname{cone}\left\{\pm a_i,\ i = 1, \ldots, n\right\} = \operatorname{span}\left\{a_i,\ i = 1, \ldots, n\right\} \neq \mathbb{R}^n$$

y, por la Proposición 0.19, C no sería acotado y, por lo tanto, no sería un polítopo.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Se obtiene de forma inmediata aplicando la definición de cono de referencia y teniendo en cuenta que los conos finitamente generados son cerrados. ■

3.7 Caracterización de conjuntos continuos

Un conjunto convexo cerrado no vacío C es *continuo* cuando su correspondiente función soporte, $\delta^*(\cdot \mid C)$ definida por

$$\delta^*(x \mid C) = \sup\{x'y \mid y \in C\},$$

es continua en $\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.

$\delta^*(\cdot \mid C)$ es una función convexa y $\operatorname{dom} \delta^*(\cdot \mid C) = \mathbb{R}^n$ si C es compacto (véase [32, Th. 5.5]). Por lo tanto, cualquier conjunto compacto es continuo (las funciones convexas son continuas en el interior de su dominio).

Esta clase de conjuntos fue introducida por Gale y Klee en 1959 en un artículo [15] en el que dan algunas caracterizaciones geométricas de estos conjuntos. En particular, la primera de ellas establece que un conjunto convexo cerrado de $\mathbb{R}^n$ es continuo si, y sólo si, no tiene ni rayos frontera ni asíntotas. Esta caracterización muestra que el epigrafo de una función cuadrática estrictamente convexa (por ejemplo, $x_2 = x_1^2$) es continuo, a pesar de no ser acotado. Por lo tanto, todo conjunto convexo compacto es continuo, pero no todo conjunto continuo es compacto.

Los conjuntos convexos compactos tienen importantes propiedades que no cumplen, en general, los conjuntos convexos cerrados no acotados. Por ejemplo, si C es un conjunto convexo compacto no vacío y D es cualquier convexo cerrado no vacío, se cumple que $C + D$ es cerrado y que C y D pueden separarse fuertemente en caso de ser C y D disjuntos. En [15] se demuestra que cada una de estas propiedades caracteriza a la familia de los conjuntos continuos, por lo que ésta es la clase maximal de conjuntos que poseen dichas propiedades.

Por otra parte, se demostró en el Corolario 3.5 que un conjunto convexo cerrado no vacío C es compacto si, y sólo si, el problema $P(c) \equiv \operatorname{Inf} c'x$ s.a. $x \in C$ es resoluble para todo $c \in \mathbb{R}^n$ y, en ese caso, su conjunto óptimo también es compacto. La condición análoga que caracteriza a la familia de los conjuntos continuos en general es la que damos en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.11 *[4, Pro. 2.4] Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío. Entonces C es continuo si, y sólo si, el conjunto óptimo de cualquier problema acotado*

$P(c)$, $c \neq 0_n$, *es un compacto no vacío.*

La condición de la Proposición 3.11 garantiza la anulación del salto de dualidad para todo $c \in \mathbb{R}^n$ (si $c = 0_n$ o $v(c) = -\infty$ la afirmación es trivial, mientras que si $c \neq 0_n$ y $v(c) > -\infty$, la conclusión se obtiene de la Proposición 3.11 y de [19, Th. 8.1]). Sin embargo, aunque la proposición

"Si $P(c)$, $c \neq 0_n$, es acotado entonces $P(c)$ es resoluble y $\delta(c) = 0$"

se cumple tanto para la familia de los conjuntos continuos como para la de las sumas de compactos con subespacios vectoriales (Corolario 3.3), ésta no caracteriza a la unión de ambas familias (basta considerar el semiespacio cerrado $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \geq 0\}$ y el único problema, con conjunto factible C, que es acotado: $P \equiv \operatorname{Inf}(x_1 + x_2)$ s.a. $x \in C$).

En esta sección, obtendremos una caracterización de los conjuntos continuos en términos de su cono de referencia, pero para ello será necesario probar previamente dos lemas.

LEMA 3.12 *Dados dos conjuntos convexos cerrados no vacíos, C_1 y C_2, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$;

(ii) $K(C_1) + K(C_2)$ *está contenido en el hipografo de una función lineal; y*

(iii) $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{cl}\{K(C_1) + K(C_2)\}$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $\overline{x} \in C_1 \cap C_2$ arbitrario.

Dado que

$$\left\{ a'x \geq b,\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K(C_i) \right\}$$

es una representación lineal de C_i, $i = 1, 2$, se cumple $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ -1 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \geq 0$ para todo $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K(C_1) \cup K(C_2)$. Por lo tanto, $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ -1 \end{pmatrix}' z \geq 0$ para todo $z \in K(C_1) + K(C_2)$ y $K(C_1) + K(C_2)$ está contenido en el hipografo de la función lineal $f(x) = \overline{x}'x$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) La hipótesis implica que $\operatorname{cl}\{K(C_1) + K(C_2)\}$ está contenido en

el hipografo (cerrado) de una función lineal $f(x) = a'x$. Si fallase (iii), $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$ pertenecería a dicho hipografo, por lo que $1 \leq a'0_n$, lo cual es imposible.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Por la Proposición 1.2 (ii.a), la hipótesis implica la consistencia del sistema

$$\left\{ a'x \geq b,\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K(C_1) \cup K(C_2) \right\}, \tag{3.19}$$

ya que su cono de referencia es

$$\operatorname{cl}\operatorname{cone}\left[K(C_1) \cup K(C_2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right] = \operatorname{cl}\left\{ K(C_1) + K(C_2) \right\},$$

de acuerdo con la Proposición 0.1. Se llega a la conclusión observando que (3.19) es una representación lineal de $C_1 \cap C_2$. ■

LEMA 3.13 *Sean C_1 y C_2 dos conjuntos convexos cerrados no vacíos. C_1 y C_2 son fuertemente separables si, y sólo si, existe un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$, W, tal que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, $\dim W = 2$ y $\operatorname{cl}\{W \setminus [K(C_1) \cup K(C_2)]\}$ es un cono apuntado.*

Demostración. Sean C_1 y C_2 fuertemente separables y sea $a \neq 0_n$ tal que $\sup\{a'x \mid x \in C_1\} < \inf\{a'y \mid y \in C_2\}$.

Sean $\overline{\alpha} := \sup\{a'x \mid x \in C_1\}$ y $\overline{\beta} := \inf\{a'y \mid y \in C_2\}$. Como $a'x \leq \overline{\alpha}$ para todo $x \in C_1$ y $a'y \geq \overline{\beta}$ para todo $y \in C_2$, se tiene

$$-\begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in K(C_1) \ y \ \begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix} \in K(C_2).$$

Sea $W := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Obviamente, $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ y $\dim W = 2$.

Probaremos que

$$W \cap K(C_2) \subset \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cup \operatorname{cone}\left\{ -\begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En efecto, sea $\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix} \in W \cap K(C_2)$, con $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Se pueden dar los siguientes casos:

(i) Si $\gamma > 0$, $\begin{pmatrix} a \\ \gamma^{-1}\delta \end{pmatrix} \in K(C_2)$, por lo que $a'y \geq \gamma^{-1}\delta$ para todo $y \in C_2$ y $\gamma^{-1}\delta \leq \overline{\beta}$. Entonces

$$\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix} + (\gamma\overline{\beta} - \delta) \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cone}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Si $\gamma = 0$, $\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ \delta \end{pmatrix} \in K(C_2)$, debiendo ser $\delta \leq 0$ puesto que $C_2 \neq \emptyset$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix} = (-\delta) \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii) Si $\gamma < 0$ y $\gamma\overline{\alpha} < \delta$, al ser $\overline{\alpha} < \overline{\beta}$, $\gamma\overline{\beta} < \gamma\overline{\alpha} < \delta$ y, como $\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix}$ y $|\gamma| \begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}$ son elementos de $K(C_2)$, tendríamos

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\delta - \gamma\overline{\beta}\right)^{-1} \left[\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma a \\ -\gamma\overline{\beta} \end{pmatrix} \right] \in K(C_2),$$

en contradicción con $C_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, para $\gamma < 0$, se cumple $\gamma\overline{\alpha} - \delta \geq 0$ y

$$\begin{pmatrix} \gamma a \\ \delta \end{pmatrix} = |\gamma| \begin{pmatrix} -a \\ -\overline{\alpha} \end{pmatrix} + (\gamma\overline{\alpha} - \delta) \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cone} \left\{ -\begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se cumple, pues, la doble inclusión

$$\operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset W \cap K(C_2) \subset$$

$$\subset \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cup \operatorname{cone} \left\{ -\begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{3.20}$$

De forma semejante, se demuestra que

$$\operatorname{cone} \left\{ -\begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset W \cap K(C_1) \subset$$

$$\subset \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cup \operatorname{cone} \left\{ -\begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{3.21}$$

De (3.20) y (3.21) se deduce que

$$W \cap [K(C_1) \cup K(C_2)] = \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cup \operatorname{cone} \left\{ -\begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

de donde (véase Figura 3.1)

$$\operatorname{cl} \{W \setminus [K(C_1) \cup K(C_2)]\} = \operatorname{cone} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix} \right\}. \tag{3.22}$$

Si $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix} \right\}$ fuesen linealmente dependientes, sería posible escribir $\begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lambda = 1$ y $\overline{\beta} = \overline{\alpha}$, en contradicción con $\overline{\alpha} < \overline{\beta}$. Como el cono convexo generado por dos vectores linealmente independientes

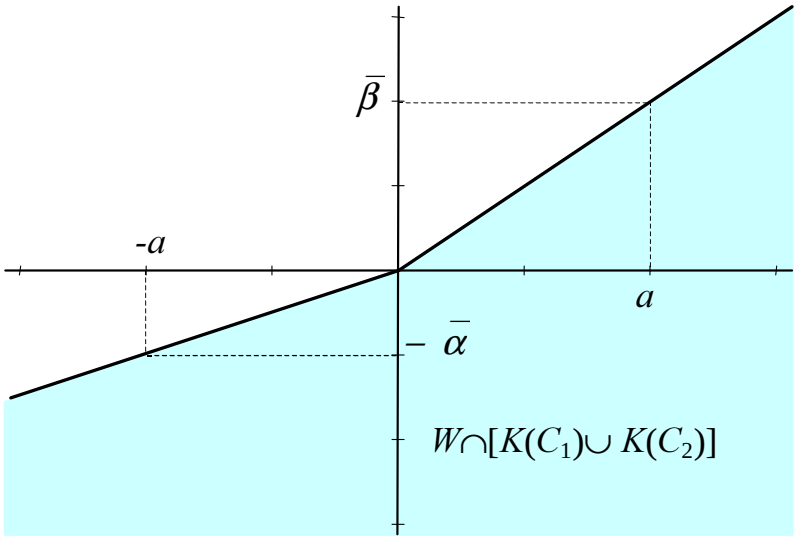

Figura 3.1

es siempre apuntado, (3.22) es un cono apuntado.

Recíprocamente, si W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, $\dim W = 2$ y $\operatorname{cl}\{W \setminus [K(C_1) \cup K(C_2)]\}$ es un cono apuntado, podemos escribir (3.22) para un vector $a \neq 0_n$ y dos escalares $\overline{\alpha}$ y $\overline{\beta}$ tales que $\overline{\alpha} < \overline{\beta}$.

Dado que $-\begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}$ pertenecen a la unión de $K(C_1)$ y $K(C_2)$, deberán pertenecer a uno de dichos conos. Supongamos $\begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix} \in K(C_2)$. Si $-\begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in K(C_2)$, entonces

$$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} = (\overline{\beta} - \overline{\alpha})^{-1} \left[\begin{pmatrix} a \\ \overline{\beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix} \right] \in K(C_2)$$

contradiciendo $C_2 \neq \emptyset$. Supondremos, por lo tanto, $-\begin{pmatrix} a \\ \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in K(C_1)$.

De acuerdo con el Teorema de Farkas, se tiene, para $x \in C_1$ e $y \in C_2$ cualesquiera, $-a'x \geq -\overline{\alpha}$ y $a'y \geq \overline{\beta}$. Por lo tanto,

$$\sup\{a'x \mid x \in C_1\} \leq \overline{\alpha} < \overline{\beta} \leq \inf\{a'y \mid y \in C_2\},$$

estando C_1 y C_2 fuertemente separados. ■

PROPOSICIÓN 3.14 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío. C es continuo si, y sólo si, para todo cono convexo cerrado, K, que contiene a $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$, no contiene a*

$\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$ *y tal que* $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{cl}\{K(C) + K\}$*, existe un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^{n+1}$*,* W*, con* $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ *y* $\dim W = 2$*, tal que* $\operatorname{cl}\{W \setminus [K(C) \cup K]\}$ *es un cono apuntado.*

Demostración. Se sabe que los conos de referencia de los cerrados convexos no vacíos son los conos cerrados convexos que contienen a $\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}$ pero no contienen a $\begin{pmatrix} 0_n \\ 1 \end{pmatrix}$. También se sabe [15] que $C_1 = C$ es continuo si, y sólo si, cualquier otro conjunto cerrado convexo no vacío, C_2, disjunto con C_1 puede ser separado fuertemente de C_1. Se llega a la conclusión combinando estos resultados con los Lemas 3.12 y 3.13. ■

3.8 Caracterización de cuerpos convexos suaves

Dado un conjunto convexo cerrado no vacío C, se dice que un *punto* de $\operatorname{bd} C$ es *suave* en C cuando existe un único hiperplano soporte de C en dicho punto. Un *conjunto* convexo cerrado $C \neq \mathbb{R}^n$ es *suave* cuando todos sus puntos frontera son suaves en C.

Si $\dim C < n$ y C no es una variedad afín, entonces $\operatorname{rbd} C \neq \emptyset$ y no hay puntos de $\operatorname{rbd} C$ que sean suaves. Si C es variedad afín, C es suave si, y sólo si, $\dim C = n - 1$.

Así pues, los conjuntos suaves son cuerpos convexos o hiperplanos. Dado que estos últimos carecen de interés, se refieren a *cuerpos convexos suaves* Felcyn [13] y Bezdek [7] en artículos sobre combinatoria geométrica. El concepto de punto suave aparece en Valentine [36] para cuerpos convexos. La definición de otros autores es más exigente, imponiendo, por ejemplo, que $\operatorname{bd} C$ sea una variedad diferenciable de orden $p \geq 1$ (véase, por ejemplo, [22]).

Como se apunta en [36], la diferenciabilidad de las funciones convexas está conectada con la suavidad de su epigrafo. En efecto, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función convexa y $\operatorname{epi} f$ es suave (en cuyo caso es cuerpo convexo, porque los únicos hiperplanos que pueden ser epigrafo son los verticales y entonces la imagen de cierta recta de $\mathbb{R}^n$ debería ser $-\infty$), entonces, para cada $x \in \operatorname{dom} f$, existe un

único hiperplano que soporta a $\operatorname{epi} f$ en $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ y, si dicho hiperplano es no vertical, entonces tiene asociado un subgradiente de f en x. Por lo tanto, si $\operatorname{epi} f$ es suave, la diferenciabilidad y la subdiferenciabilidad de f en un punto de $\operatorname{dom} f$ resultan ser conceptos equivalentes y, en particular, f es diferenciable en $\operatorname{rint}(\operatorname{dom} f)$ [32, Th. 23.4].

La siguiente proposición caracteriza los puntos suaves de un conjunto convexo cerrado en función de su cono de referencia.

PROPOSICIÓN 3.15 *Sea C un conjunto convexo cerrado. Entonces $\overline{x} \in \operatorname{bd} C$ es un punto suave de C si, y sólo si, el cono convexo*

$$\left\{ a \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a \\ a'\overline{x} \end{pmatrix} \in K(C) \right\} \tag{3.23}$$

tiene dimensión 1. En particular, si C es un cuerpo convexo, $\overline{x}$ es suave si, y sólo si, el conjunto de (3.23) es un rayo.

Demostración. Sea $\overline{x} \in \operatorname{bd} C$ un punto suave de C y sea $\widetilde{a} \neq 0_n$ tal que $\widetilde{a}'x \geq \widetilde{a}'\overline{x}$ para todo $x \in C$. Por el Lema de Farkas, $\begin{pmatrix} \widetilde{a} \\ \widetilde{a}'\overline{x} \end{pmatrix} \in K(C)$, es decir, $\widetilde{a}$ pertenece al conjunto (3.23), cuya dimensión es al menos 1.

Dado $\begin{pmatrix} a \\ a'\overline{x} \end{pmatrix} \in K(C)$, tenemos $a'x \geq a'\overline{x}$ para todo $x \in C$ (de nuevo por el Lema de Farkas) y se cumple

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a'(x - \overline{x}) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \widetilde{a}'(x - \overline{x}) = 0\},$$

de donde $a = \alpha\widetilde{a}$ para cierto $\alpha \neq 0$. Entonces

$$\left\{ a \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a \\ a'\overline{x} \end{pmatrix} \in K(C) \right\} \subset \operatorname{span}\{\widetilde{a}\},$$

y

$$\dim \left\{ a \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a \\ a'\overline{x} \end{pmatrix} \in K(C) \right\} = 1. \tag{3.24}$$

Supongamos ahora que $\overline{x} \in \operatorname{bd} C$ satisface (3.24), y sea $\widetilde{a} \neq 0_n$ un elemento de (3.23). Si $a'x \geq a'\overline{x}$ para todo $x \in C$, con $a \neq 0_n$, entonces $\begin{pmatrix} a \\ a'\overline{x} \end{pmatrix} \in K(C)$ y, por la hipótesis, puede escribirse $a = \alpha\widetilde{a}$ para cierto $\alpha \neq 0$, en cuyo caso $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a'(x - \overline{x}) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \widetilde{a}'(x - \overline{x}) = 0\}$. Por lo tanto, $\overline{x}$ es punto suave de C.

Supongamos ahora que C es un cuerpo convexo y $\overline{x} \in \operatorname{bd} C$ es un punto suave o, lo que es lo mismo, satisface (3.24).

Sea $\widetilde{a} \neq 0_n$ un elemento de (3.23). Entonces, tomando $x^1 \in \operatorname{int} C$ arbitrariamente, se tiene $\widetilde{a}'(x^1 - \overline{x}) > 0$ y $a'(x^1 - \overline{x}) > 0$ si $\begin{pmatrix} a \\ a'\overline{x} \end{pmatrix} \in K(C)$, lo que implica, junto con (3.24), que $a = \alpha\widetilde{a}$ para cierto $\alpha > 0$. Así pues,

$$\operatorname{cone}\{\widetilde{a}\} \subset \left\{ a \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a \\ a'\overline{x} \end{pmatrix} \in K(C) \right\} \subset \operatorname{cone}\{\widetilde{a}\}.$$

Por lo tanto, $\left\{ a \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a \\ a'\overline{x} \end{pmatrix} \in K(C) \right\} = \operatorname{cone}\{\widetilde{a}\}$ es un rayo. ■

Obsérvese que, si C es un hiperplano, entonces el conjunto de (3.23) es una recta por el origen 0_n.

COROLARIO 3.16 *Un conjunto convexo cerrado no vacío (cuerpo convexo) C es suave si, y sólo si, el conjunto de (3.23) tiene dimensión 1 (es un rayo, respectivamente) en todos los puntos de* $\operatorname{bd} C$.

Este resultado caracteriza a los cerrados convexos suaves (cuerpos convexos suaves) en función de su representación cónica.

Por otra parte, si $\sigma = \{a_t'x \geq b_t,\ t \in T\}$ es una representación LFM de C (cuya existencia garantiza [19, Th. 5.11]), el conjunto de (3.23) coincide con $A(\overline{x})$ para todo $\overline{x} \in C$ (por [19, (5.18)]) y, por lo tanto, $\overline{x} \in \operatorname{bd} C$ es suave si, y sólo si, $\dim A(\overline{x}) = 1$. Obviamente, como consecuencia de esta afirmación, se puede obtener una caracterización de los cerrados convexos suaves (cuerpos convexos suaves) en relación con cualquier representación externa que sea LFM.

A continuación, nos proponemos caracterizar estos conjuntos en función de su representación interna. Con tal fin relajaremos el concepto de conjunto suave para que no implique dimensión máxima.

Si C es un conjunto convexo cerrado que no es variedad afín y $d = \dim C$, se dice que un punto $\overline{x} \in \operatorname{rbd} C$ es *relativamente suave* en C si existe una única variedad afín $V \subset \operatorname{aff} C$, $\dim V = d - 1$, tal que $\overline{x} \in V$ y C está contenido en una de las dos componentes conexas de $(\operatorname{aff} C) \setminus V$. Decimos que C es *relativamente suave* cuando todos los puntos de $\operatorname{rbd} C$ son relativamente suaves en C.

PROPOSICIÓN 3.17 *Sea C un conjunto convexo cerrado que no es variedad afín. $\overline{x} \in \operatorname{rbd} C$ es relativamente suave en C si, y sólo si, el cono convexo*

$$\left\{ a \in (\operatorname{aff} C) - C \mid \begin{pmatrix} a \\ a'\overline{x} \end{pmatrix} \in K(C) \right\} \tag{3.25}$$

es un rayo.

Demostración. Si $d = n$, entonces C es un cuerpo convexo, $\operatorname{rbd} C = \operatorname{bd} C$ y $(\operatorname{aff} C) - C = \mathbb{R}^n$, por lo que los conjuntos de (3.25) y de (3.23) coinciden.

Suponemos, pues, $d < n$. Sean $W := [(\operatorname{aff} C) - C]^{\perp} \neq \{0_n\}$ y $\widetilde{C} := C + W$ (cuerpo convexo). Entonces, como se vió en la demostración de la Proposición 2.9(ii), $\operatorname{rbd} C \subset \operatorname{bd} \widetilde{C}$. Probaremos que $\overline{x} \in \operatorname{rbd} C$ es relativamente suave en C si, y sólo si, $\overline{x} \in \operatorname{bd} \widetilde{C}$ es suave en $\widetilde{C}$.

En efecto, si $V \subset \operatorname{aff} C$, con $\dim V = d - 1$, es la única variedad afín tal que $\overline{x} \in V$ y C está contenido en una de las dos componentes conexas de $(\operatorname{aff} C) \setminus V$, considerando $H := V + W$, se tiene $\dim H = \dim V + \dim W = n - 1$, $\overline{x} \in H$ y $\widetilde{C}$ está contenido en uno de los semiespacios determinados por H (aquel que contenga a la componente conexa de $(\operatorname{aff} C) \setminus V$ que contiene a C), por lo que H es el único hiperplano que soporta a $\widetilde{C}$ en $\overline{x} \in \operatorname{bd} \widetilde{C}$. Recíprocamente, si H es el único hiperplano que soporta a $\widetilde{C}$ en $\overline{x} \in \operatorname{rbd} C \subset \operatorname{bd} \widetilde{C}$, tomando la variedad afín $V := H \cap \operatorname{aff} C$, resulta que $V \subset \operatorname{aff} C$, $\overline{x} \in V$, $\dim V = d - 1$ (ya que $H = V + W$), C está contenido en una de las dos componentes conexas de $(\operatorname{aff} C) \setminus V$ y además V es la única variedad afín que cumple todas estas propiedades.

Sea $a \neq 0_n$ la dirección del hiperplano H y supongamos que $a'(x - \overline{x}) \geq 0$ para todo $x \in \widetilde{C}$. Entonces, tomando $x = \overline{x} + \lambda w$, $w \in W$ fijo y $\lambda \in \mathbb{R}$, debe cumplirse $\lambda (a'w) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y esto sólo es posible si $a'w = 0$. Por lo tanto, $a \in W^{\perp} = (\operatorname{aff} C) - C$.

Así pues, $\overline{x}$ es relativamente suave en C si, y sólo si, existe un único vector (salvo factor multiplicativo positivo) $a \in (\operatorname{aff} C) - C$, $a \neq 0_n$, tal que $a'(x - \overline{x}) \geq 0$ para todo $x \in C$, pudiendo sustituirse esta última condición por $\begin{pmatrix} a \\ a'\overline{x} \end{pmatrix} \in K(C)$ como consecuencia de Lema de Farkas. Por lo tanto, (3.25) está formado por los múltiplos positivos de dicho a y por 0_n. ■

COROLARIO 3.18 *Sea C un conjunto convexo cerrado no vacío que no es variedad afín. C es relativamente suave si, y sólo si, el conjunto de (3.25) es un rayo cualquiera que sea $\overline{x} \in \operatorname{rbd} C$.*

PROPOSICIÓN 3.19 *Un cuerpo convexo C es suave si, y sólo si, $E(C) + D(C)$ es relativamente suave.*

Demostración. Sea $X := E(C) + D(C)$, conjunto convexo cerrado no vacío. Sabemos que $C = X + \operatorname{lin} C$. Repitiendo el argumento de la Proposición 3.17, con $W = \operatorname{lin} C$, C es suave si, y sólo si, X es relativamente suave. ■

Obsérvese que si $E(C)$ es relativamente suave y $D(C) = \{0_n\}$ se cumple la condición de la Proposición 3.19. Sin embargo, como se puede ver en el siguiente ejemplo, el recíproco no es cierto.

EJEMPLO 3.20 Sea $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq x_1^2\}$ el cilindro parabólico de la Figura 3.2.

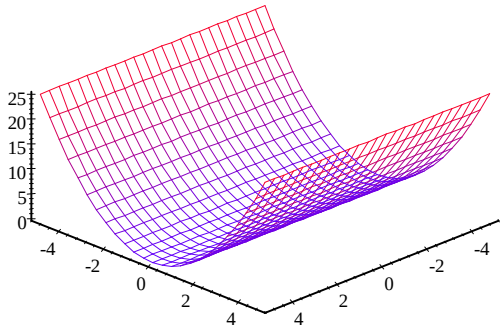

Figura 3.2

En este caso, $\operatorname{lin} C = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $E(C) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \geq x_1^2\right\}$ y $D(C) = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Se observa que C es suave, $E(C) + D(C) = E(C)$ es relativamente suave, pero $D(C) \neq \{0_3\}$.

A pesar de lo visto anteriormente, no basta con que $E(C)$ sea relativamente suave para que el cuerpo convexo C sea suave.

EJEMPLO 3.21 Sea $C = (\operatorname{cl} B_2 \times \{0\}) + \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ el cono truncado de la Figura 3.3.

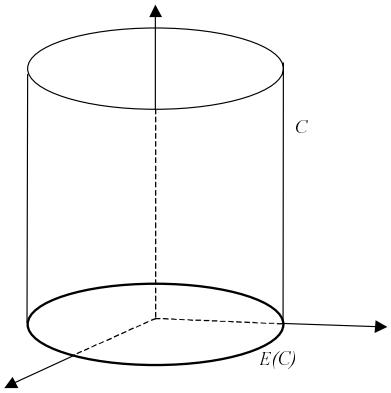

Figura 3.3

C no es suave por no serlo los puntos de la circunferencia de la base, a pesar de que la base, $E(C)$, es relativamente suave. Aquí, $D(C) = \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Tampoco es cierto que C suave implique que $E(C)$ sea relativamente suave.

EJEMPLO 3.22 Sea $C = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix},\ t \in [\pi/2, 3\pi/2]\right\} + \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ el conjunto convexo cerrado de la Figura 3.4.

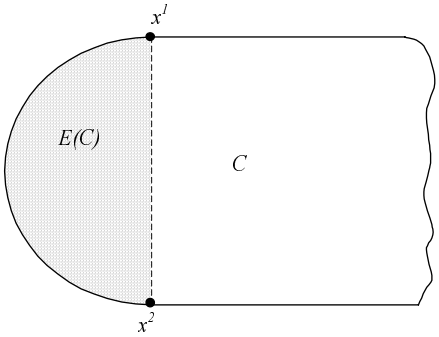

Figura 3.4

En este caso, C es suave, mientras que $E(C)$, que es la región sombreada de la figura, no es relativamente suave por no serlo los puntos x^1 y x^2.

3.9 Caracterización de familias de cuerpos convexos mediante conceptos de iluminación

Además de los conceptos de iluminación que ya hemos tratado en la Sección 2.4, existen otros muchos (véase [28]). Entre ellos el siguiente, que fue introducido por Valentine [37]: dado un cuerpo convexo C y $z \notin C$, se dice que $x \in \operatorname{bd} C$ es *visible* desde z si $]x, z[\cap C = \emptyset$. Denotamos por $\operatorname{vis}(C; z)$ el conjunto de puntos frontera de C visibles desde $z \notin C$ y por $t(C)$ el mínimo número de puntos exteriores a C necesarios para que sea visible toda la frontera de C.

Soltan [34] demostró que, si C es un cuerpo convexo compacto, entonces $2 \leq t(C) \leq n+1$, por lo que $\operatorname{vis}(C; z) \neq \operatorname{bd} C$ para cualquier $z \notin C$.

En un reciente artículo de Martini y Soltan [27], se prueba que, dado un cuerpo convexo compacto C, C es un n-símplice si, y sólo si, para todo $z^1 \notin C$ existe otro punto $z^2 \notin C$ tal que $\operatorname{vis}(C; z^1) \cup \operatorname{vis}(C; z^2) = \operatorname{bd} C$, es decir, todo el conjunto C es visible desde $\{z^1, z^2\}$.

La compacidad de C es esencial en esta caracterización, incluso reforzando la anterior condición con $\operatorname{vis}(C; z) \neq \operatorname{bd} C$ para todo $z \notin C$. En efecto, dado un n-sandwich $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 \leq a'x \leq \alpha_2\}$, con $a \neq 0_n$ y $\alpha_1 < \alpha_2$, y $z \notin C$, se tiene

$$\operatorname{vis}(C; z) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = \alpha_1\} & si \quad a'z < \alpha_1 \\ \\ \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = \alpha_2\} & si \quad a'z > \alpha_2 \end{cases}, \tag{3.26}$$

de modo que los n-sandwiches (que son cuerpos convexos no acotados) satisfacen las condiciones anteriores. Desafortunadamente, no son los únicos cuerpos convexos no acotados que satisfacen estas condiciones. Este es el caso de cualquier conjunto convexo cerrado C tal que $E(C)$ es un $(n-1)$-símplice, $\operatorname{lin} C$ es una recta que pasa por el origen y $D(C) = \{0_n\}$ (por ejemplo, el producto cartesiano $S \times \mathbb{R}$ donde S es un $(n-1)$-símplice de $\mathbb{R}^{n-1}$). Sin embargo, los n-sandwiches (la clase de cuerpos convexos con frontera no vacía y no conexa) también se pueden caracterizar en términos de visibilidades.

PROPOSICIÓN 3.23 *Sea C un cuerpo convexo. Entonces C es un n-sandwich si, y sólo si,* $\operatorname{vis}(C; z)$ *es un hiperplano y* $\operatorname{vis}(C; z) \neq \operatorname{bd} C$ *para todo $z \notin C$.*

Demostración. La implicación directa es consecuencia de (3.26).

Supongamos que $\mathrm{vis}\,(C;z)$ es un hiperplano distinto de $\mathrm{bd}\,C$ para todo $z \notin C$. Puesto que $\{\mathrm{vis}\,(C;z)\,,\ z \notin C\}$ es un recubrimiento de $\mathrm{bd}\,C$, $\mathrm{bd}\,C$ resulta ser la unión de al menos dos hiperplanos. Suponiendo que $\mathrm{bd}\,C$ contiene dos hiperplanos no paralelos, obtendremos una contradicción. En efecto, sea $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i'x = b_i\}$, con $a_i'x \geq b_i$ para todo $x \in C$, $i = 1, 2$, con $\mathrm{span}\,\{a_1\} \neq \mathrm{span}\,\{a_2\}$. Puesto que H_1 no está contenido en $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_2'x \geq b_2\}$, existe $x^1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_1'x^1 = b_1$ y $a_2'x^1 < b_2$. Entonces $x^1 \in H_1 \backslash C$, contradiciendo $H_1 \subset \mathrm{bd}\,C \subset C$.

Puesto que $\mathrm{bd}\,C$ es la unión de al menos dos hiperplanos paralelos, $\mathrm{bd}\,C$ no es conexa, y por tanto C es un n-sandwich por la Proposición 3.9. ■

Nótese que, en esta caracterización de los n-sandwiches, se puede sustituir $\mathrm{vis}\,(C;z)$ por $\mathrm{ill}\,(C;u)$, $\mathrm{vis}\,(C;u)$ o $\mathrm{end}\,(C;u)$, con $u \in \mathbb{R}^n \backslash O^+C$.

Al igual que los n-símplices y los n-sandwiches, los paralelotopos no sólo se pueden caracterizar por medio de sus representaciones interna y cónica sino también a través de sus propiedades de combinatoria geométrica. Un paralelotopo es una clase particular de n-zonotopo (cuerpo convexo que se puede expresar como la suma de un número finito de segmentos compactos). Un n-zonotopo dado, C, es un paralelotopo si, y sólo si, el mínimo número de copias homotécicas más pequeñas de C que cubren C (o direcciones iluminando C) es exactamente 2^n [33].

También existen artículos ([34] y [35], por ejemplo) en los que se utilizan otros conceptos de iluminación distintos para caracterizar familias de cuerpos convexos como los semiespacios o los conos. Así, a partir de la caracterización de los semiespacios cerrados que se da en [34, Cor. 1], se puede demostrar fácilmente que un cuerpo convexo C es un semiespacio si, y sólo si, $\mathrm{vis}\,(C;z) = \mathrm{bd}\,C$ para todo $z \notin C$.

Los paralelotopos, n-símplices y n-sandwiches son sólo algunas de las familias de cuerpos convexos que tienen buenas propiedades de combinatoria geométrica, de optimalidad y de separabilidad (véase, por ejemplo, [28], [19] y [6], respectivamente). La caracterización de todas estas familias en términos de sus representaciones interna y cónica y sus propiedades de iluminación son desafiantes problemas abiertos.

Bibliografía

[1] E. J. ANDERSON, M. A. GOBERNA and M. A. LÓPEZ, Locally polyhedral linear inequality systems, *Linear Algebra and Its Applications* 270:231-253, 1998.

[2] E. J. ANDERSON, M. A. GOBERNA and M. A. LÓPEZ, Simplex-like trajectories on quasi-polyhedral sets, *Mathematics of Operations Research*, en prensa.

[3] E. J. ANDERSON and P. NASH, *Linear programming in infinite dimensional spaces*, J. Wiley, New York, NY, 1987.

[4] A. AUSLENDER and P. COUTAT, On closed convex sets without boundary rays and asymptotes, *Set-Valued Analysis* 2, N^{o}1-2: 19-33, 1994.

[5] J. BAIR, Strict separation of several convex sets, *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, Ser. B 32:135-148, 1980.

[6] J. BAIR and R. FOURNEAU, *Etude géometrique des espaces vectoriels II: polyèdres et polytopes convexes,* Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1980.

[7] K. BEZDEK, On the illumination of smooth convex bodies, *Archiv der Mathematik* 58, N^{o}6:611-614, 1992.

[8] V. BOLTYANSKI, A problem on illumination of the boundary of a convex body, *Izvestija Moldavsko Filiala Akademii Nauk SSSR* 10:77-84, 1960 (en ruso).

[9] A. BRØNDSTED, *An introduction to convex polytopes*, Springer-Verlag, New York,

NY, 1983.

[10] W. B. CARVER, Systems of linear inequalities, *Annals of Mathematics* 23:212-220, 1921-22.

[11] U. ECKHARDT, Theorems on the dimension of convex sets, *Linear Algebra and its Applications* 12:63-76, 1975.

[12] K. FAN, On infinite systems of linear inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 21:475-478, 1968.

[13] P. FELCYN, Liminal number of a convex body with a smooth boundary, *Demonstratio Mathematica* 21, N^{o}2:393-398, 1988.

[14] W. FENCHEL, A remark on convex sets and polarity, *Communications du Séminaire Mathématique de l'Université de Lund*, Supplement 82-89, 1952.

[15] D. GALE and V. KLEE, Continuous convex sets, *Mathematica Scandinavica* 7:379-391, 1959.

[16] M. A. GOBERNA, V. JORNET, R. PUENTE and M. I. TODOROV, Analytical linear inequality systems and optimization, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 103:95-119, 1999.

[17] M. A. GOBERNA and M. A. LÓPEZ, A theory of linear inequality systems, *Linear Algebra and its Applications* 106:77-115, 1988.

[18] M. A. GOBERNA and M. A. LÓPEZ, Dimension and finite reduction in linear semi-infinite programming, *Optimization* 25:143-160, 1992.

[19] M. A. GOBERNA and M. A. LÓPEZ, *Linear semi-infinite optimization*, John Wiley and Sons, Chichester, England, 1998.

[20] M. A. GOBERNA, M. A. LÓPEZ, J. T. PASTOR and E. VERCHER, Alternative

theorems for infinite systems with applications to semi-infinite games, *Nieuw Archief voor Wiskunde* IV, Ser. 2:218-234, 1984.

[21] M. A. GOBERNA, M. A. LÓPEZ and M. TODOROV, Stability theory for linear inequality systems, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 17:730-743, 1996.

[22] C. O. KISELMAN, How smooth is the shadow of a smooth convex body?, *Serdica* 12:189-195, 1986.

[23] E. MARCHI, R. PUENTE and V. N. VERA DE SERIO, Quasi-polyhedral sets in semi-infinite linear inequality systems, *Linear Algebra and its Applications*, 225:157-169, 1997.

[24] J. E. MARTÍNEZ LEGAZ, A generalized concept of conjugation, *Optimization: theory and algorithms*, edited by A. Auslender, J. B. Hiriart-Urruty and W. Oettli, Marcel Dekker, New York, NY, 45-59, 1983.

[25] J. E. MARTÍNEZ LEGAZ, Quasiconvex duality theory by generalized conjugation methods, *Optimization* 19:603-652, 1988.

[26] J. E. MARTÍNEZ LEGAZ, Characterization of R-evenly quasiconvex functions, *Journal of Optimization Theory and Applications* 95, N^{o}3:717-722, 1997.

[27] H. MARTINI and V. SOLTAN, A characterization of simplices in terms of visibility, *Archiv der Mathematik* 72 N^{o}6: 461-465, 1999.

[28] H. MARTINI and V. SOLTAN, Combinatorial problems on the illumination of convex bodies, *Aequationes Mathematicae* 57:121-152, 1999.

[29] T. S. MOTZKIN, *Beiträge zur theorie der linearen ungleichungen*, Azriel, Jerusalem, 1936; transl. in *Theodore S. Motzkin: Selected papers* (D. Cantor, B. Gordon and B. Rothschild, eds.), Birkhäuser, Boston, 1-80, 1983.

[30] U. PASSY and E. Z. PRISMAN, Conjugacy in quasiconvex programming, *Mathematical Programming* 30:121-146, 1984.

[31] R. PUENTE and V. N. VERA DE SERIO, Locally Farkas-Minkowski linear inequality systems, *Trabajos Investigación Operativa* 7:103-121, 1999.

[32] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[33] P. SOLTAN, On the covering of polyhedra by homothetic images, *Soviet. Math. Dokl.* 13:155-159, 1972.

[34] V. SOLTAN, External illumination according to L. Fejes Tóth, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 28:473-483, 1993.

[35] P. SOLTAN, An illumination problem, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 29, N^{o}1-2:25-32, 1994.

[36] F. A. VALENTINE, *Convex sets*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, IX, 1964.

[37] F. A. VALENTINE, Visible shorelines, *The American Mathematical Monthly* 77:146-152, 1970.

[38] H. WEYL, Elementare theorie der konvexen polyeder, *Commentarii Mathematici Helvetici* 7:290-306, 1935.

[39] P. L. YU, Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives, *Journal of Optimization Theory and Applications* 14:319-377, 1974.

[40] Y. J. ZHU, Generalizations of some fundamental theorems on linear inequalities, *Acta Mathematica Sinica* 16, N^{o}1:25-39, 1966.